П.54

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 49 - 70

В.Л.Поляченко, А.М.Фридман

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ГАЛАКТИК С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной физики
СО АН СССР

Новосибирск

1970

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ГАЛАКТИК С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В.Л.Поляченко, А.М.Фридман

АННОТАЦИЯ

В работе исследуется устойчивость проводящего вращающегося диска в магнитном поле, направленном параллельно оси вращения. Доказана самосопряженность исходной системы линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики для случая радиальных возмущений, что позволило сформулировать (в виде интегрального уравнения) энергетический принцип, установленный Лундквистом для покоящихся систем.

Получен критерий центробежной неустойчивости системы, совпадающий при однородной плотности с известным из гидродинамики критерием Рэлея.

Поскольку максимум инкремента гравитационной неустойчивости лежит в области коротких длин волн, в полученном интегральном уравнении сделан переход к коротковолновым возмущениям. Найденное таким способом дисперсионное уравнение совпадает с аналогичным в работе авторов /12/ с той разницей, что вместо скорости звука в /12/, в настоящее уравнение входит альфвеновская скорость. Таким образом, аналогично /12/, наиболее коротковолновые возмущения стабилизируются силой магнитного давления.

Используя числовые значения основных параметров нашей галактики, показано, что в настоящее время величина магнитного поля в рукавах такова, что могут быть стабилизированы возмущения с длиной волны приблизительно равной толщине диска (на границе применимости рассматриваемой модели).

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
Физики СО АН СССР
ИНВ. №

ON THE STABILITY OF FLAT ROTATING GALACTICS IN THE MAGNETIC FIELD

V.L.POLYACHENKO, A.M.FRIDMAN

ABSTRACT.

The work investigates the stability of conducting, rotating disks in the magnetic field, parallel to the axis of rotation. The self-conjugatence of the initial set of linerized magnetic hydrodynamic equations for axi-symmetrical disturbances is proved. That made it possible to formulate the energetic principle (as the integral equation), stated for motionless systems by Lundquist.

The criterion of the centrifugal unstability, coinciding with the known criterion of Reley for the case of the uniform density, is obtained. As maximum of the growth rate of the gravitational unstability is in the region of short-wave-lengths, in the derived integral equation is made a transition to short wave characteristic frequency of the gravitational condensation. Formation of a ring or two-armed spiral is determined by the density value of the flat subsystem (larger density corresponds to a ring). Other modes (apart from $m=0,2$) increase in this case with much smaller growth rates. If the frequency of "sound" is much larger, than all other characteristic frequencies, the dependence between a growth rate of the unstability and number of the mode is practically lacking. Classification of galactics by their specific angular momenta and the connected hypothesis on the nature of bar galactics are proposed.

§ 1. Введение

Для теории эволюции галактических систем представляет интерес вопрос об устойчивости плоских (вращающихся) распределений масс в магнитном поле. За последнее время этот вопрос без учёта влияния магнитного поля исследовался многими авторами (см., например, [1-4]).

Специфическим отличием исследования устойчивости вращающегося гравитирующего диска от хорошо изученных особенностей устойчивости других тел вращения, являющихся астрономическими объектами (шара, эллипсоида, изучение устойчивости которых начато еще работами Ляпунова [5], цилиндра [6], является нестандартная запись уравнения Пуассона. В общем случае при попытке найти собственные значения системы уравнений это приводит к весьма сложному интегро-дифференциальному уравнению. Возможность сведения исходной системы уравнений к дифференциальному путем сильного ограничения класса возмущенных функций, демонстрируемая в [1-2], не всегда приводит к желаемому результату$^{x)}$.

В случае, когда вращение плазменного диска происходит в магнитном поле, влиянием которого нельзя пренебрегать, решение вопроса об устойчивости такой системы методом нахождения собственных значений, представляется сейчас в известном смысле проблематичным.

Для выяснения вопроса об устойчивости вращающегося плазменного диска в магнитном поле в настоящей работе используется энергетический принцип, впервые установленный Лундквистом [7, 8] для исследования устойчивости гидромагнитных систем в приближении идеальной магнитной гидродинамики и развитый затем в работах [9, 10].

Существенным упрощением в [7-10] является рассмотрение таких равновесных конфигураций, в которых скорость среды и гра-

---

x) Так, в работе [2], в которой задача устойчивости диска решается путем нахождения собственных значений, возмущенные функции выбраны в виде $\sim \exp[i(kr+\omega t+m\varphi)]$, что, вообще говоря, является необоснованным для неоднородной конечной системы (за исключением случая коротких волн - см.ниже, § 3).

витационный потенциал в каждой точке предполагаются пренебрежимо малыми. Поскольку в нашу задачу входит исследование вращающихся гравитирующих систем, то вышеупомянутое упрощение здесь недопустимо. С другой стороны в силу двумерности рассматриваемой системы давление плазмы в ней равно нулю, т.к. в противном случае составляющая градиента давления вдоль оси диска обращалась бы в бесконечность [3].

Энергетический принцип, сформулированный для систем с отличной от нуля невозмущенной скоростью и гравитационным потенциалом назовем обобщенным энергетическим принципом.

§ 2. Обобщенный энергетический принцип

Пусть σ, V, ψ, H представляют собой малые отклонения плотности, скорости, потенциала и магнитного поля от равновесных значений $\sigma^{(0)}$, $V^{(0)}$, $\psi^{(0)}$, $H^{(0)}$. Будем интересоваться устойчивостью диска относительно смещений типа "растяжения-сжатия" произвольного кольца как целого. Это означает, что исследуемый класс возмущений вида $A(r,\varphi,t) = A(r)\exp(-i\omega t + im\varphi)$ ограничен случаем $m = 0$ (ω - частота колебаний x)).

Условие вмороженности, согласно [11], имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{H}^{(0)}+\vec{H}}{\sigma^{(0)}+\sigma}\right) = \left(\frac{\vec{H}^{(0)}+\vec{H}}{\sigma^{(0)}+\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)(\vec{V}^{(0)}+\vec{V})$$

Поскольку $V_z = V_r^{(0)} = 0$, в первом приближении имеем:

$$H = C_1(r)\cdot\sigma \tag{1}$$

x) При высших модах ($m \neq 0$) приводимая ниже система уравнений (2) - (5) оказывается несамосопряженной.

Однако, принимая во внимание предисторию образования плоского диска ($V_r^{(0)} \neq 0$), можно считать $H/\sigma = C_1 = const$. Используя условие вмороженности (1) с учётом последнего замечания, запишем, линеаризованную систему уравнений магнитной гидродинамики в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} - 2\frac{V_\varphi^{(0)}}{r}V_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{c^2}{4\pi}\frac{\partial\sigma}{\partial r} \tag{2}$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r\left(\frac{\partial V_\varphi^{(0)}}{\partial r} + \frac{V_\varphi^{(0)}}{r}\right) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma^{(0)}V_r\right) = 0 \tag{4}$$

$$\psi = -G\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\sigma(r')r'\,dr'\,d\varphi'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi'}} \tag{5}$$

Здесь G - гравитационная постоянная, R - радиус диска, $c^2 = hC_1^2$, h - толщина диска; (2) и (3) - уравнения движения Эйлера, (4) - уравнение непрерывности, (5) - выражает возмущенный гравитационный потенциал диска.

Нулевое приближение исходной системы уравнений имеет вид:

$$\frac{{V_\varphi^{(0)}}^2}{r} = -G\frac{\partial}{\partial r}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\sigma^{(0)}(r')r'\,dr'\,d\varphi'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi'}} + \frac{c^2}{4\pi}\frac{\partial\sigma^{(0)}}{\partial r} + G\frac{M}{r^2}, \tag{6}$$

где M - масса ядра галактики. Уравнение (6) описывает равновесие между центробежной силой вращения и силами гравита -

ции и магнитного давления. В случае, когда последнее можно не учитывать при расчёте равновесных конфигураций (в то же время в задаче о развитии малых возмущений учёт магнитного поля может быть существен), уравнение (6) может быть решено в общем виде. Подробно этот вопрос изложен в работе /12/, посвященной исследованию гидродинамической устойчивости вращающегося гравитирующего диска. Здесь мы предположим только, что решения уравнения (6) существуют (явный вид некоторых из этих решений приводится, например, в /12/).

Основная задача настсящей работы заключается в том, чтобы определить, будет ли любое малое возмущение равновесного состояния (6) нарастать во времени. Введем вместо скоростей V_r и V_φ смещения ξ_r и ξ_φ : $V_r = \frac{\partial \xi_r}{\partial t}$; $V_\varphi = \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial t}$.

Тогда можно проинтегрировать уравнения (3) и (4) по времени, явно выразив V_φ и σ через ξ_r :

$$V_\varphi = -\left(\frac{V_\varphi^{(0)}}{r} + \frac{\partial V_\varphi^{(0)}}{\partial r}\right)\cdot \xi_r \,, \tag{7}$$

$$\sigma = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma^{(0)}\xi_r\right). \tag{8}$$

Гравитационный потенциал ψ также можно, используя (8), представить в виде функционала от ξ_r :

$$\psi = G\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\sigma^{(0)}\xi_{r'}\right) r'\,dr'\,d\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'}} \,. \tag{9}$$

Подстановка всех этих выражений в (2) даёт следующее интегро-дифференциальное уравнение для радиального смещения ξ_r :

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{2V_\varphi^{(0)}}{r}\left(\frac{V_\varphi^{(0)}}{r} + \frac{\partial V_\varphi^{(0)}}{\partial r}\right)\xi_r + \frac{c^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma^{(0)}\xi_r\right)\right]$$

$$-G\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\sigma_{r'}^{(0)}\xi_{r'}\right) r'\,dr'\,d\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'}} \,. \tag{10}$$

Это уравнение дополняется еще граничным условием:

$$\sigma^{(0)}(R) = 0 \,, \tag{11}$$

обеспечивающим регулярность силы гравитационного притяжения на краю диска.

Уравнение (10) может быть представлено символически в виде:

$$\sigma^{(0)}\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = \hat{K}\xi_r \,, \tag{12}$$

где $\hat{K}$ - оператор, явное выражение которого даётся правой частью (10). Докажем, что оператор $\hat{K}$ является самосопряженным, т.е. что:

$$\iint \xi_1 \hat{K}\xi_2\, dS = \iint \xi_2 \hat{K}\xi_1\, dS \equiv -2W_{12} \tag{13}$$

Для этого, очевидно, достаточно показать, что форма $\iint \xi_1 \hat{K}\xi_2\, dS$ может быть представлена в виде, симметричном относительно смещений ξ_1 и ξ_2. Это действительно может быть показано (см. приложение).

Доказанная самосопряженность уравнения (10) означает /10/, что оно может быть получено из вариационного принципа наименьшего действия

$$\delta\left\{\int L\,dt\right\}=0 \qquad (14)$$

Функция Лагранжа L равна разности кинетической T и потенциальной W энергии малых радиальных возмущений:

$$L=T-W \qquad (15)$$

$$T=\frac{1}{2}\iint dS\,\sigma^{(0)}\left(\frac{\partial\xi_r}{\partial t}\right)^2, \qquad (16)$$

$$W=-\frac{1}{2}\iint dS\,\xi_r\hat{K}\xi_r=W_V+W_H+W_G\ , \qquad (17)$$

где

$$W_V=2\pi\int_0^R dr\,\sigma^{(0)}\frac{V_\varphi^{(0)}}{r}\left(V_\varphi^{(0)}+r\frac{\partial V_\varphi^{(0)}}{\partial r}\right)\xi_r^2=$$

$$=2\pi\int_0^R dr\,\sigma^{(0)}\frac{V_\varphi^{(0)}}{r^2}\frac{d(rV_\varphi^{(0)})}{dr}\cdot\xi_r^2, \qquad (18)$$

$$W_H=\frac{c^2}{4\pi}\int_0^R dr\,\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma^{(0)}\xi_r\right)\right]^2+\frac{c^2}{4\pi}\left[\sigma^{(0)}(0)\xi_r(0)\right]^2 \qquad (19)$$

$$W_G=\pi G\int_0^R dr\,\xi_r\,r\sigma^{(0)}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\sigma^{(0)}\xi_{r'}\right)r'\,dr'\cos\varphi'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi'}} \qquad (20)$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что из (11-19) действительно получается уравнение (10).

Для анализа устойчивости системы мы воспользуемся энергетическим принципом. Он гласит, что для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы для любого смещения ξ_r было $W>0$. В противном случае система неустойчива.

Знак каждого слагаемого выражения (17) характеризует его вклад в устойчивость системы. Из формулы (19) видно, что приращение потенциальной энергии за счёт возмущения магнитного поля всегда положительно, т.е. любое смещение элемента поверхности вызывает ответное возмущение магнитного поля такое, что сила магнитного давления стремится устранить первоначальное смещение. Движение, при котором сила направлена в сторону, противоположную смещению, в частности, может быть и колебательным. Ниже мы убедимся, что в данном случае движение под действием возмущенного магнитного давления оказывается чисто колебательным, причём фазовая скорость распространения этих колебаний равна магнитогидродинамической скорости.

Из (20) видно, что знак приращения гравитационной энергии может быть отрицательным, т.е. гравитационное притяжение,в противоположность магнитному давлению, оказывает на систему дестабилизирующее действие.

Знак первого слагаемого в (17) определяется характером зависимости скорости вращения $V_\varphi^{(0)}$ от радиуса: если производная $\frac{d(rV_\varphi^{(0)})}{dr}$ всюду положительна:

$$\frac{d(rV_\varphi^{(0)})}{dr}>0, \qquad (21)$$

то $W_V>0$, и в этом случае вращение является стабилизирую -

щим фактором; если же в каком-то месте $\dfrac{d(rV_\varphi^{(0)})}{dr} < 0$, то для соответствующим образом локализованных возмущений будет иметь место неустойчивость. Неравенство (21) означает, что для устойчивости необходимо, чтобы $V_\varphi^{(0)}(r)$ в каждой точке убывало с радиусом не быстрее, чем по закону обратной пропорциональности. Например, часто принимаемый для скоростей звезд в галактиках закон, по которому:

$$V_\varphi^{(0)} = cr, \quad r < r_0 \qquad (22)$$
$$V_\varphi^{(0)} = c_1, \quad r > r_0$$

удовлетворяет условию устойчивости (21).

В случае однородной жидкости $\sigma^{(0)} = const$ полученное условие соответствует известному из гидродинамики критерию устойчивости Рэлея, который утверждает, что необходимым условием устойчивости вращательного движения жидкости является следующее /13/:

$$\frac{d(\sigma^{(0)} r V_\varphi^{(0)})}{dr} = \frac{d\mu^{(0)}}{dr} > 0, \qquad (23)$$

где $\mu^{(0)}$ – момент количества движения единицы массы.

Сформулированный нами обобщенный энергетический принцип позволяет в принципе исследовать устойчивость рассматриваемой системы для любых радиальных возмущений (и вычислить соответствующие инкременты или декременты). Для определения стабилизирующего гравитационную неустойчивость магнитного поля нужно найти, при заданном H, минимальное значение функционала $W(\xi_r)$ (соответствующее некоторой определенной функции ξ_r). Оно является функцией H; из условия обращения этого минимального значения в нуль определяется тогда величина магнитного поля, стабилизирующая неустойчивость диска. К сожалению, аналитический расчёт гравитационного вклада в возмущенную потенциальную энергию в общем случае оказывается затруднительным. Сравнительно просто вычисления проводятся только для узколокализованных возмущений типа

$$\sigma = \sigma(r) e^{ikr}, \qquad (24)$$

где $\sigma(r) \neq 0$ лишь в узкой области размером Δr. Вычисление возмущенного гравитационного потенциала в этом случае даёт:

$$\psi \approx \frac{4G\sigma}{k}\left[\sin(k\Delta r)\cdot \ln\frac{\Delta r}{8r} - \int_0^{k\Delta r}\frac{\sin y}{y}dy\right] \qquad (25)$$

Первый член в этом выражении обращается в нуль в силу сохранения массы:

$$\int \sigma(r)\, r\, dr = 0, \qquad (26)$$

поэтому получаем:

$$\psi \approx -\frac{4G\sigma}{k}\int_0^{k\Delta r}\frac{\sin y}{y}dy = -\frac{4G\sigma}{k}Si(k\Delta r) \qquad (27)$$

В случае, когда $k\Delta r \to \infty$, что соответствует коротковолновому (ВКБ) приближению, формула (27) переходит в известное выражение /2/, связывающее ψ и σ в этом пределе:

$$\psi = -\frac{2\pi G}{k}\sigma, \qquad (28)$$

Нужно отметить, что отличие (27) и (28) максимально равно:

$$\frac{Si(\pi)}{Si(\infty)} \approx \frac{1{,}85}{1{,}57} \approx 1{,}2, \qquad (29)$$

и, следовательно, не очень существенно для оценок. С другой стороны, метод ВКБ, приводящий к (28), позволяет исследовать на устойчивость не только радиальные, но также и азимутальные (но обязательно коротковолновые) возмущения.

Мы ограничимся в настоящей работе, в основном, лишь формулировкой вариационного принципа, а в следующем параграфе получим (методом ВКБ) условие магнитной стабилизации коротковолновых возмущений плазменного диска. Полное исследование устойчивости относительно радиальных возмущений на основе сформулированного выше вариационного принципа будет предметом отдельной работы.

§ 3. Стабилизация коротковолновых возмущений

Рассматривается устойчивость тонкого плазменного диска в магнитном поле $H = H_z$ относительно произвольных коротковолновых возмущений. Система уравнений магнитной гидродинамики, линеаризованная с учётом условия вмороженности (1), имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma^{(0)} V_r\right) + \frac{\sigma^{(0)}}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \qquad (30)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \Omega \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - 2\Omega V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{c^2}{4\pi}\frac{\partial \sigma}{\partial r} \qquad (31)$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\varkappa^2}{2\Omega} V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{c^2}{4\pi}\frac{\partial \sigma}{r\,\partial \varphi}. \qquad (32)$$

Здесь σ, ψ возмущенные поверхностная плотность и гравитационный потенциал; V_r, V_φ - радиальная и азимутальная скорости; $\Omega = V^{(0)}/r$ - локальная угловая скорость, $\varkappa^2 = 2\Omega\left(\Omega + dV^{(0)}/dr\right)$ - квадрат эпициклической частоты. Система уравнений (30) - (32) и уравнение (28) приводят в этом случае, как легко показать, используя стандартную процедуру /2, 12/, к следующему дисперсионному уравнению:

$$(\omega + m\Omega)^2 = \varkappa^2 + k^2 V_A^2 - 2\pi G \sigma_0 k, \qquad (33)$$

где $V_A^2 = H^2/4\pi G \rho_g$ - альфвеновская скорость. Переходя к пределу $h \to 0$, $kh \to 2\pi$ (максимально короткие длины волн в рассматриваемой нами модели), получаем из (33) следующее условие стабилизации:

(34)

Для типичных значений $\rho_g \sim 10^{-24}$ г/см^3, $h \sim 10^{+21}$ см, $\sigma_0 = \rho_0 \cdot h \sim 10^{-3}$ г/см^2, получаем из (37):

$$H > 2\rho_0 h\sqrt{\pi G} \approx 10^{-6} \text{ гс} \qquad (35)$$

Отсюда видно, например, что имеющееся в настоящее время в галактике поле $H \approx 5.10^{-6}$ э могло бы стабилизировать самые коротковолновые возмущения галактического диска.

Приложение

Квадратичная форма (16) имеет следующий вид:

$$W_{12} = -\pi\int_0^R r\,dr\left\{-\frac{2V_\varphi^{(0)}}{r}\left(\frac{V_\varphi^{(0)}}{r}+\frac{\partial V_\varphi^{(0)}}{\partial r}\right)\xi_1\xi_2\sigma^{(0)} + \right.$$

$$+\frac{c^2}{4\pi}\sigma^{(0)}\xi_1\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma^{(0)}\xi_2)\right] -$$

$$\left.-G\sigma^{(0)}(r)\xi_1\frac{\partial}{\partial r}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}(r'\sigma^{(0)}_{r'}\xi_{2r'})\,r'dr'd\varphi'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi'}}\right\}\equiv W_{12}^{(V)}+W_{12}^{(H)}+W_{12}^{(G)} \qquad (1)$$

Форма $W_{12}^{(V)}$ уже симметрична по ξ_1, ξ_2.

Две другие приводятся к симметричной форме интегрированием по частям:

$$W_{12}^{(H)} = -\frac{c^2}{4\pi}\int_0^R dr\,(r\sigma^{(0)}\xi_1)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma^{(0)}\xi_2)\right] =$$

$$= -\frac{c^2}{4\pi}\left\{(r\sigma^{(0)}\xi_1)\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma^{(0)}\xi_2)\Big|_0^R - \right.$$

$$\left.-\int_0^R dr\,\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma^{(0)}\xi_1)\right]\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma^{(0)}\xi_2)\right]\right\} =$$

$$= \frac{c^2}{4\pi}\sigma^{(0)2}(0)\,\xi_1(0)\,\xi_2(0) + \frac{c^2}{4\pi}\int_0^R dr\,\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma^{(0)}\xi_1)\right]\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma^{(0)}\xi_2)\right]; \qquad (2)$$

$$W_{12}^{(G)} = -\pi G\int_0^R\int_0^R dr\,dr'\,\Phi(r,r')\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r^{(0)}\xi_1)\frac{\partial}{\partial r'}(r'\sigma_{r'}^{(0)}\xi_2'), \qquad (3)$$

где

$$\Phi(r,r') = \Phi(r',r) = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi'}} =$$

$$= \frac{4}{r+r'}\cdot K\left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'}\right),$$

$K(x)$ – полный эллиптический интеграл.

Литература

1. G.C. Lin, F.H Shu, Astrophys. Journ. 140, 647, (1964).
2. Alar Toomre, Astrophys. Journ., 139, 1217 (1964)
3. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., Успехи физ.наук, 86, № 3, (1965).
4. Фридман А.М., Астрон.ж., 43, 327 (1966).
5. Ляпунов А.М., Собрание сочинений, Изд.АН СССР, 1954 - 1965.
6. Озерной Л.М., Астрон.ж., 41, 494 (1964).
7. Lundquist C., Phys. Rev., 83, 307 (1951)
8. Lundquist C., Ark. Nat. Ast. Phys., 5, 297 (1952)
9. Bernstein A.B., Frieman E.A., Kauskal H.D., Kulsrud R.M., Proc. Roy. Soc. 17, 244 (1958). (Перев. в кн. "Управляемые термоядерные реакции", Атомиздат, Москва, 1960).
10. Кадомцев Б.Б., Вопросы теории плазмы, т.2, Госатомиздат, 1963.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, ГИФМЛ, М., 1959.
12. Поляченко В.Л., Фридман А.М., Астрономич.журнал, 1970, в печати.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика сплошных сред, ГНТТЛ, М., 1954.

Ответственный за выпуск В.Л.Поляченко
Подписано к печати 3.07.70г.
Усл. 0,8 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 49 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.