

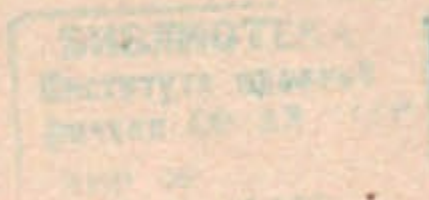
Г. 13

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

И Я Ф 79 - 70

Г.В.Гадияк, Ф.М.Израйлев

**ПЕРЕХОДНАЯ ОБЛАСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО
РЕЗОНАНСА**



Новосибирск

1970

✓

ПЕРЕХОДНАЯ ОБЛАСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе представлены результаты численного исследования структуры переходной области нелинейного резонанса для преобразования:

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= \psi_n - \psi_n^3 \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + \psi_{n+1} \end{aligned}$$

Вычисления проводились на машине БЭСМ-6 с удвоенной точностью.

В в е д е н и е

Настоящая работа явилась продолжением работ: /1/, в которой на примере простейшего преобразования вида:

$$\varphi_{n+1} = \{ \varphi_n + f(\psi_n) \} \quad (1)$$

$$\psi_{n+1} = \{ \psi_n + \varphi_{n+1} \}$$

(где скобки означают взятие дробных частей) изучались условия, необходимые для появления стохастичности в системе, а также влияние неэргодической компоненты на возможность статистического описания во всем фазовом пространстве. Физическое обоснование такого вида преобразования дано в работах /2/; /3/, где к виду (1) сводятся уравнения для нелинейного осциллятора, находящегося под действием периодического возмущения в виде толчков. Для данной системы нелинейность задается функцией $f(\psi)$ (в этой работе $f(\psi) = -\psi^3$; $f(\psi) = -\psi^3 + k/|\psi|$),

внешнее возмущение заложено в дискретности преобразования с периодом $T = 1$. Для подобной системы преобразований Мозе - ром /4/ было доказано существование вечно устойчивых замкнутых траекторий. Между этими замкнутыми траекториями расположены резонансы, соответствующие резонансным соотношениям между собственной частотой и частотой внешнего возмущения. Границей области нелинейного резонанса служит сепаратриса, в окрестности которой находится неустойчивая зона - стохастический слой /2/. Область, ограниченная сепаратрисой резонанса, определяет нелинейную ширину резонанса. Таким образом вся фазовая плоскость (φ, ψ) системы (1) расщепляется на семейство замкнутых устойчивых траекторий между которыми расположены "гирлянды" резонансов различных гармоник /5/. При попадании на сепаратрису какого-либо резонанса движение становится неустойчивым, но эта неустойчивость ограничена областью между двумя замкнутыми траекториями. Тем не менее, даже в нашем одномерном случае, эта, казалось бы, вечная устойчивость, может нарушаться при перекрытии областей нелинейных резонансов. При этом траектория, блуждая по системе различных резонансов может диффундировать сколь угодно далеко в неустойчивую зону. Движение становится стохастическим /2,6,7/.

Сразу же возникает вопрос об определении границы между устойчивой областью и областью стохастичности. Переход от одной области к другой численно уже исследовался для системы (1) /1/. Было обнаружено, что граница не является ярко выраженной, а представляет собой некоторую переходную зону. Аналогичная картина наблюдалась и в работе /8/, где на модельной задаче изучался механизм ускорения Ферми.

Для (1) был установлен интервал значений по ψ внутри которого еще имелись устойчивые траектории, но уже наблюдалась некоторая диффузия траекторий. Было предположено, что наблюдаемая диффузия является следствием действия ошибок округления, которые всегда имеют место при численном счёте.

Чтобы уменьшить ошибки округления и детально исследовать структуру переходной области нами была составлена программа удвоенной точности и предложен некоторый метод определения характера траектории (§ 2).

В результате были уточнены интервалы значений, внутри которых лежит граница вечной колмогоровской устойчивости. Оказалось, что действительно, диффузия на границе, определенной в /1/ зависит от ошибок округления.

Как показали "численные эксперименты" переходная область является достаточно широкой и сложной по своей структуре. В основном она состоит из резонансов, зацепляющихся друг за друга: стохастическими слоями вблизи сепаратрис. Движение в этой области является чрезвычайно сложным. Это либо устойчивое движение внутри резонансов высоких гармоник, либо нерегулярное, запутанное движение по стохастическим слоям сепаратрис в области сильной неустойчивости. Слабая диффузия, возникающая на сепаратрисе резонанса, очень сильно зависит от положения на фазовой плоскости и может резко упасть вблизи узкого резонанса.

Была также предпринята попытка с помощью программы двойной точности выяснить вопрос о причине отсутствия диффузии в случае неаналитической силы $f(\psi)$ (/1/). Окончательного ответа на этот вопрос получить не удалось. Тем не менее можно предположить, что причина этого эффекта заключается в сложной структуре фазовой плоскости, аналогичной структуре переходной области нелинейного резонанса.

§ 1. Выбор программы счёта

Как уже указывалось ранее, для численного счёта было выбрано преобразование:

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= \psi_n - \psi_n^3 \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \psi_{n+1} \end{aligned} \quad (1)$$

где φ и ψ являются импульсом и координатой соответственно. Якобиан преобразования (1)

$$D\left(\frac{\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}}{\varphi_n, \psi_n}\right) = 1$$

В стохастической области траектория очень быстро уходит на бесконечность: $\psi_n \sim \psi_n^3 \sim c^{3n}$ при $c > 1$, поэтому в программе предусматривается останов, если $|\psi| \geq 1$ или $|\varphi_n| \geq 1$, т.е. область изменения (φ, ψ) ограничена фазовым квадратом (2×2) .

Выбор дискретного преобразования позволил свести к минимуму ошибки, неизбежно возникающие при решении дифференциальных уравнений. Здесь они просто сводились к ошибкам округления. Но даже действие ошибок округления, которые на БЭСМ-6 порядка $\sim 10^{-12}$ (для обычной точности), может быть существенно в устойчивой области. Наличие такого негладкого возмущения приводит к "диффузии" траектории, что затрудняет экспериментальное определение границы устойчивой области. Коэффициент диффузии, экспериментально определенный в /1/, был равен

$D_{\text{эксп}} \approx 4 \cdot 10^{-27}$, что примерно в 80 раз меньше коэффициента диффузии, если предположить случайный характер округления (/8/). Это указывает на то, что в данном случае округление не случайно и имеются значительные корреляции ошибок округления. В этой же работе /1/ было замечено, что в некоторых случаях коэффициент диффузии падает со временем. Одним из объяснений этого результата может быть "зацикливание", которое является результатом конечного числа точек фазовой плоскости (φ, ψ) в представлении ЭВМ. Зацикливание характеризуется T_c - периодом, после которого обязательно должно произойти попадание на одну из предыдущих точек. Однако уже при работе с

удвоенной точностью $\Delta_2 = 10^{-24}$ период заикливания значи-
тельно возрастает. Его можно оценить, воспользовавшись фор-
мулой из /3/

$$T_c \approx (3L\sqrt{2D_0})^{2/3} \approx 10^{15}$$

где $L = 2 \cdot 10^{24}$ - периметр траектории в единицах максимальной
ошибки округления $D_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ - экспериментально из-
меренный коэффициент диффузии (в единицах Δ_2).

Следует отметить, что определение границы устойчивой об-
ласти зависит от метода, с помощью которого эта граница оп-
ределяется. Так, например, в /10/ при увеличении счёта от
 $T = 3 \cdot 10^5$ до 10^6 граница по ψ смещалась от $\psi_0 = 0,84$ до
 $\psi_0 = 0,76$, если об устойчивости траектории судить только на
основании общего вида фазовой плоскости.

Влияние ошибок округления хорошо видно на рисунке 1, где
сравниваются две траектории, у которых одинаковые начальные
условия $\psi_0 \approx \psi_0 \approx -0,187$. Точки обрабатывались по методу
наименьших квадратов на прямую, как в /1/. При этом наблю-
дались корреляции $\Delta \varphi(\psi) = \{ \varphi_{жесн} - [K(\psi - \psi_0) + C] \}$. Крес-
тиками помечены $\Delta \varphi(\psi)$ для траектории, посчитанной с обыч-
ной точностью ($\Delta_2 = 10^{12}$) (разброс $\Delta \varphi(\psi)$ здесь слу-
чайный), а кружками - для траектории, посчитанной с удвоен-
ной точностью ($\Delta_2 = 10^{-24}$). В последнем случае появились кор-
реляции $\Delta \varphi(\psi)$ из-за кривизны траектории.

Для того, чтобы увеличить период заикливания, отделить
эффекты, связанные с ошибками округления, от какой-либо сла-
бой неустойчивости, возникающей в системе (1), была написана
специальная программа "удвоенной точности". Программирование
велось на БЭСМ-6 ВЦ СО АН СССР "вручную", т.е. в коде
машины для достижения максимальной скорости счёта. Необхо-
димо отметить, что число операций в цикле существенно возрастает
при увеличении точности счёта. Так при счёте с обычной
точностью имеется два умножения и два сложения и время на
один шаг преобразования составляет $t \sim 10^{-5}$ секунд. В про-
грамме с удвоенной точностью уже восемь умножений, 18 цик-
лических сложений, восемь больших сдвигов мантисс числа,
шесть логических команд, шесть операций извлечения числа из
регистров младших разрядов и время на один шаг преобразо-
вания $t \sim 10^{-4}$ сек.

При работе с удвоенной точностью каждое число записыва-
ется в 2-х ячейках (ψ_1, ψ_2) и (ψ_1, ψ_2). Основная труд-
ность составления программы состояла в правильной стыковке
двух половин числа ψ_1, ψ_2 или ψ_1, ψ_2 при операциях ум-
ножения и сложения. Умножение мантисс происходит в том же
порядке, как при обычном умножении двух чисел. Поскольку ум-
ножение выполняется в двоичной системе, то оно производится
очень просто и состоит из серии сдвигов и сложений.

Округление, которое производится только при умножении,
осуществляется в нашем случае отбрасыванием всех младших
разрядов, начиная с 81. Полная скорость счёта, включая разбра-
сывание по фазовому квадрату и обработку, составляла примерно
 $2,4 \cdot 10^{-4}$ сек на 1 шаг преобразования. Число шагов преобразова-
ний T с (1) в основных экспериментах составляло $10^6 - 10^7$
(соответственно 4-40 минут машинного времени). Позднее на
ВЦ СО АН появилась стандартная программа увеличения точнос-
ти. Была сделана проверка нашей программы со стандартной
программой; при этом совпадение всех 80 разрядов чисел
за 10^3 шагов преобразований было полное. Однако время счёта
по стандартной программе почти в 100 раз было больше. Это
объясняется в основном тем, что для нашего случая числа
являются ненормализованными и по абсолютной величине всегда
меньше единицы.

§ 2. Обработка результатов

Основная обработка результатов состояла в получении и вы-
даче функции распределения траектории, которая представляет
собой число попаданий траектории в каждую ячейку фазового
квадрата (φ, ψ). Фазовая плоскость разбивалась на $2^7 \times 2^7 =$
 $= 16384$ ячейки. Выводились не сами значения (φ, ψ), а
 $(\frac{\varphi+1}{2}; \frac{\psi+1}{2})$, т.е. выводился единичный фазовый квадрат,
сдвинутый от начала координат по φ и ψ на 1 и сжатый в
два раза (рис.2).

По виду фазовой плоскости (φ, ψ) можно грубо оце-
нить, является ли данная траектория устойчивой (сплошной) или
это резонанс какой-либо гармоник. Например, на рис.3 приведен
резонанс 8 гармоник, а на рис.5 показано попадание на сепарат-
рису этого же резонанса. Траектория в этом случае сильно не-
устойчива, т.к. наблюдался выход за единицу у φ, ψ . Одно-

временно на фазовой плоскости фиксировалась плотность попадания траектории в ячейку. Плотность определялась как отношение числа попаданий в данную ячейку к максимальному числу попаданий в какую-либо ячейку фазового квадрата. Величина плотности печаталась в восьмеричном виде (см. рис. 3). По плотности можно наблюдать, как идет заполнение траектории со временем, а также оценивать равномерность заполнения какой-либо области.

С целью более детального изучения фазовой траектории проводилась дополнительная обработка, предложенная Арнольдом. Для этого вырезалась полоса по ψ $[\psi_{\min}, \psi_{\max}]$ шириной $\sim 10^{-6}$ и по $\varphi \in [0, -1]$. Все точки, попавшие в эту полосу, интерполировались степенным полиномом P_n по методу наименьших квадратов. Затем рассматривалось отклонение экспериментальных точек $\varphi(\psi)$ от интерполяционной кривой:

$\Delta \varphi(\psi) = [\varphi_{\text{акс}} - P_n(\psi)]$. Из-за сложности программы интерполяции мы ограничились интерполяцией на параболу. Необходимость интерполяции, по крайней мере, на параболу, видна из рис. 1, где первоначально траектория интерполировалась на прямую. Можно оценить максимальную степень полинома, необходимую для данной точности ($\Delta z = 10^{-24}$). С этой целью мы преобразуем немного систему. Для устойчивой области имеем:

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \ll \varphi_n^3 \quad |\psi_{n+1} - \psi_n| \ll \varphi_n \quad (2)$$

Используя это, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -\varphi^3 \\ \dot{\psi} &= \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

Для системы (3) можно записать сохраняющийся гамильтониан

$$H = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\psi^4}{4} \quad (4)$$

Разрешая (4) для φ относительно ψ и разлагая в ряд Тейлора вблизи ψ_0' получим:

$$\varphi(\psi) = \varphi_0' + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} (\psi - \psi_0') + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} (\psi - \psi_0')^2 + \dots \quad (5)$$

где (φ_0', ψ_0') - точка, лежащая внутри полосы $[\psi_{\min}, \psi_{\max}]$.

Легко показать, что если ψ_0' выбрано вблизи нуля, то производные будут меньше или порядка единицы. Найдем теперь вероятность W попадания внутрь интервала $[\psi_{\min}, \psi_{\max}]$: $W \sim \frac{\Delta \psi}{L}$, где L - длина траектории. Если принять $L \sim 2\pi \varphi_0$, тогда $W \sim \frac{\Delta \psi}{2\pi \varphi_0}$ ($\varphi_0 = 0, \psi_0$ - начальное условие для данной траектории). Оценка исходит из предположения "случайного" пересечения ячейки внутри полосы траекторией. Тогда время, необходимое для заполнения полосы

$$T \sim \frac{1}{W} \sim \frac{2\pi \varphi_0}{\Delta \psi}$$

Если принять теперь во внимание, что мы ограничены во времени счёта, поскольку максимальное время счёта для $T = 10^7$ занимает уже 40 минут машинного времени, и выбрать $\varphi_0 = 0,7$, $\psi_0 = 0$ вблизи границы неустойчивости (см. § 3), то $\Delta \psi \sim \frac{2\pi \varphi_0}{T} \sim 10^{-7}$. Следовательно, мы получаем минимально возможную полосу ($[\psi_{\min}, \psi_{\max}] = \Delta \psi \sim 10^{-7}$), и тогда максимальная степень интерполяционного полинома P_n должна быть равной 3 (следующие члены) ряда (5) должны быть меньше ошибок округления и тогда их можно отбросить). Тем не менее обработка на полином третьей степени не была сделана из-за сложности программы. В работе, как уже упоминалось ранее, использовалась интерполяция на полином второй степени.

Если посмотреть на таблицу 1, то можно проследить эволюцию корреляционной функции $\Delta \varphi(\psi)$. Для устойчивых замкнутых траекторий максимальная амплитуда корреляций убывает с ростом T и уменьшением границ $[\psi_{\min}, \psi_{\max}]$. Такая зависимость и служила критерием устойчивости какой-либо траектории.

Для данного T и определенных начальных условий (φ_0, ψ_0) границы $[\psi_{\min}, \psi_{\max}]$ выбирались автоматически. В начале задавалось максимальное число точек n , попадающих в интервал $[\psi_{\min}, \psi_{\max}]$ за время T . Если за время $T' < T$ число точек, попавших в этот интервал больше n , то границы автоматически (программно) уменьшались до тех пор, пока число точек внутри нового интервала не становилось

меньше n . После этого с новыми границами продолжался счёт. Наперед заданное число n не должно быть велико (при заданном T) иначе возрастут границы $[Y_{min}, Y_{max}]$ и будет велика максимальная амплитуда у корреляционной функции $\Delta \varphi(\psi)$. В то же время, чем меньше n , тем меньше точность определения коэффициентов параболы, т.к. эти коэффициенты представляют собой статистические моменты. Тем не менее неточность в определении коэффициентов параболы несущественна, поскольку нам нужно знать не форму самой траектории, а вид корреляций $\Delta \varphi(\psi)$ на основании которого можно было бы с уверенностью говорить, является траектория устойчивой, резонансом или сепаратрисой резонанса. Эти неточности могут привести только к сдвигу, растяжению или сжатию $\Delta \varphi(\psi)$. Поэтому n задавался небольшим: $n = 18$.

Обработка траектории производилась с обычной точностью, но несколько своеобразным способом. Так как числа (φ, ψ) меньше единицы и ненормализованы, то отбрасывались все одинаковые старшие разряды мантиисы чисел φ_1^i, ψ_1^i из полосы $[Y_{min}, Y_{max}]$. Это эквивалентно изменению начала координат у φ и ψ . Затем производился сдвиг разрядов мантиисы влево, а недостающие разряды заполнялись разрядами из вторых частей чисел φ_2^i, ψ_2^i , что соответствует растяжению осей на величину 2^{n_1} по φ и 2^{n_2} по ψ , где n_1 - число отброшенных разрядов у φ_1^i и n_2 - для ψ_1^i . Полученные числа (φ^i, ψ^i) обрабатывались с обычной точностью.

Следует отметить, что для некоторых траекторий, например $\varphi_0 = 5 \cdot 10^{-8}$, $\psi_0 = 7,6 \cdot 10^{-7}$, первые части чисел φ_1^i были одинаковые и сдвиг осуществлялся на все 40 разрядов. В этом случае для $\Delta \varphi(\psi)$ наблюдался случайный разброс, как и в /1/, этот разброс как раз и обусловлен ошибками округления. Когда же сдвиг n_1 и n_2 был меньше 40 разрядов, функция $\Delta \varphi(\psi)$ для устойчивой траектории имела регулярный вид рис.7, т.е. наблюдались корреляции из-за кривизны траектории. Абсолютное же значение $\Delta \varphi^i = \Delta \varphi_{сгв} \cdot 2^{-n_1}$. На машине программно строились графики $\Delta \varphi(\psi)_{сгв}$, $\varphi(\psi)$, из которых можно было сразу видеть, является ли данная траектория устойчивой - рис.8а, резонансом-8б или сепаратрисой резонанса-рис.8в. В последнем случае наблюдался случайный разброс, причем по абсолютной величине этот разброс был много больше ошибок округления.

§ 3. Колмогоровская устойчивость

Колмогоровская устойчивость, как известно, означает существование нерезонансных инвариантных торов /5/, которые для нашей системы (1) являются замкнутыми устойчивыми траекториями. При наличии малого возмущения (в нашем случае в виде толчков с периодом $T = 1$ и частотой $\Omega = 2\pi$) большинство инвариантных траекторий с несоизмеримыми частотами деформируются. Между этими траекториями, как уже говорилось, образуются резонансные области. Такая картина наблюдалась экспериментально. Между двумя устойчивыми кривыми находились резонансы высоких гармоник (см. таблицу 2). Неустойчивость, возникающая на сепаратрисе ^{такого} резонанса, ограничена областью между двумя устойчивыми траекториями. Это приводит к ограниченной диффузии в этой области. В работе /1/ был поставлен вопрос о нахождении границы вечной Колмогоровской устойчивости для преобразования (1). Существование такой границы следует хотя бы из того, что в области, где $\psi > 1$, система неустойчива, т.к. траектории уходят на бесконечность. В области, где $\psi < 1$, сила $f(\psi)$ - аналитическая, для таких нелинейных аналитических сил Мозером /4/ было доказано существование устойчивых замкнутых траекторий. Эту границу можно приближенно оценить используя критерий локальной неустойчивости. Для этого рассмотрим линеаризованное преобразование:

$$\begin{aligned} \delta \varphi_{n+1} &= \delta \varphi_n - 3\psi_n^2 \delta \varphi_n \\ \delta \psi_{n+1} &= \delta \psi_n + (1 - 3\psi_n^2) \delta \psi_n \end{aligned} \quad (6)$$

его собственные значения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{3\psi^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3\psi^2}{4}\right) - 3\psi^2} \quad (7)$$

Комплексным значениям λ_1 и λ_2 соответствуют устойчивые области /2/, и оценка для границы даёт: $\psi_c \sim (4/3)^{1/2}$

Критерием устойчивости траектории, как уже упоминалось раньше, считалось наличие корреляций у $\Delta \varphi(\psi)$ из-за кривизны траектории (см.рис.7), и такого рода корреляций должны

иметь место до тех пор, пока мы не приблизимся к действию ошибок округления, т.е. вплоть до $\Delta \varphi(\psi) \sim \Delta z$. Из-за ограничения машинного времени с помощью нашего метода (обработка на параболу при двойной точности) лишь одна траектория, лежащая достаточно глубоко в области устойчивости исследована полностью ($\psi_0 = 7.6 \cdot 10^{-7}$, $\varphi_0 = 0.540 \cdot 10^{-4}$). В этой области с данной точностью обработка на параболу оказалась достаточной и стало заметно влияние ошибок округления, которые привели к полному отсутствию каких-либо корреляций (рис.8). Результат аналогичен полученному в /1/ результату с этим же преобразованием (1) для обычной точности.

В дальнейшем мы будем считать траекторию устойчивой если для $T = 5 \cdot 10^6 - 10 \cdot 10^6$ при обработке на параболу с двойной точностью (при выбранном n) наблюдаются четкие корреляции $\Delta \varphi(\psi)$. Основные данные этих экспериментов сведены в таблицу 2.

Граница Колмогоровской устойчивости определялась отдельно по ψ (координате) для $\varphi_0 = 0$ и по φ (импульсу) для $\psi_0 = 0$. Из вышесказанного ясно, что для $\varphi_0 \ll 1$ или $\psi_0 \ll 1$ движение будет устойчивым и только при приближении φ_0, ψ_0 к единице система будет приближаться к границе колмогоровской устойчивости. Сначала были грубо определены начальные значения φ_{01} для $\psi_{0c} = 0$, при которых траектория выходит за единицу, и начальные значения, при которых траектория устойчива $\varphi_{02}, \psi_{02} = 0$. Затем, используя метод деления отрезка пополам (исходным интервалом был $[\varphi_{02}, \varphi_{01}]$), мы получали новые начальные значения для φ_0, ψ_0 . Для этого в случае попадания на устойчивую траекторию к начальному значению φ_0 прибавлялось $\frac{\varphi_{01} - \varphi_0}{2}$, при попадании на неустойчивую траекторию от φ_0 отнималось значение $\frac{\varphi_{01} - \varphi_0}{2}$ и т.д.

Нами был получен следующий интервал значений φ , внутри которого находится граница вечной колмогоровской устойчивости.

По φ_0 для $\psi_0 = 0$ $0.5174 < \varphi_{0c} < 0.5236$

По ψ_0 для $\varphi_0 = 0$ $0.77 < \psi_{0c} < 0.78$.

В работе /1/ для $\varphi_0 = 0$ интервал имел вид:

$0.67 < \psi_{0c} < 0.76$. Граница по ψ оказалась сдвинутой в сторону неустойчивой области. Следует отметить, что одна из последних устойчивых траекторий ($\varphi_0 = 0.516$, $\psi_0 = 0$) просчитывалась на максимальное время $T = 10^7$. В этом случае максимальная амплитуда $\Delta \varphi(\psi)$, как видно из таблицы 2 $\sim 10^{18}$, и если учесть толщину $\Delta \varphi(\psi)$, то с точностью до $10^{-20} - 10^{-19}$ эта траектория устойчива. Больше попаданий на устойчивую траекторию в области $0.517 < \varphi_0 < 0.523$ не было, хотя попытки найти устойчивую траекторию были сделаны. Каждый раз было попадание либо внутрь резонанса высокой гармоники, либо на сепаратрису резонанса.

§ 4. Пример с неаналитической силой

Следующим шагом в исследовании преобразования (1) был выбор силы $f(\psi)$ в виде $f(\psi) = -\psi^3 + K/|\psi|$; тогда преобразование имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= \psi_n - \psi_n^3 + K/|\psi| \\ \psi_{n+1} &= \psi_{n+1} + \psi_n \end{aligned} \quad (8)$$

где K - параметр.

Для преобразования (8) с неаналитической силой (производная терпит разрыв в 0) по оценкам в /1/, система должна быть неустойчива. В этом случае должно иметь место перекрытие резонансов или, по крайней мере, зацепление сепаратрис резонансов (подробнее § 5). Тем не менее при численном исследовании подобной системы было замечено (/1/), что стохастическая компонента оставалась ограниченной по ψ в течение времени

$T = 5 \cdot 10^8$. Было сделано два предположения: остановка диффузии из-за заикливания, или наличие в системе редких устойчивых траекторий. Проверка, сделанная в /1/, с "урезанием" рядов мантиссы дала противоречивый результат. Для выяснения этого вопроса в нашей работе было сделано численное исследование преобразования (8) с обычной и удвоенной точностью.

Были попытки найти области перекрытия резонансов или зацепления сепаратрис резонансов, т.е. неустойчивые области. Ус-

тойчивые замкнутые траектории вообще не попадались, очевидно вследствие того, что они занимают очень узкие щели (если они вообще существуют между резонансами) и вероятность попасть на такую устойчивую траекторию очень мала. Для сравнения: из 6 случайно выбранных начальных значений 4 попали на устойчивые резонансы, а два - в область неустойчивости. Если применить критерий локальной неустойчивости для преобразования (8), то получим следующее выражение для

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{[-3\psi^2 \mp K]}{2} \pm \sqrt{\frac{[-3\psi^2 \mp K]^2}{4} + [-3\psi^2 \mp K]} \quad (9)$$

где \mp перед K означает, что для $\psi > 0$ надо ставить минус, а для $\psi < 0$ знак плюс. Из выражения (8) видно, что из-за разрыва первого рода у функции $f(\psi)$ нельзя выделить область значений ψ , где бы существовали устойчивые замкнутые траектории. (Вообще говоря, применять критерий локальной неустойчивости в таком виде надо осторожно, Макмиланом/14/ был построен пример преобразования, в котором хотя λ_1 и λ_2 действительны, но траектории, лежащие рядом, не разбегаются).

Локальная неустойчивость в системе, как известно, означает экспоненциальное разбегание траекторий, что приводит к быстрому перемешиванию в системе и затуханию корреляций /2/. Скорость разбегания траекторий является важнейшей характеристикой стохастической системы, она связана с энтропией Крылова-Колмогорова /2/ простым соотношением:

$$h = 1/\tau_c$$

(где h - энтропия системы, τ_c - время разбегания). Экспериментальное измерение времени разбегания траекторий в неустойчивой области для $\psi_0 = 0,32$, $\psi_0 = 0$, $K = 10^{-3}$ дало

$\tau_c = 10^4$ (см. рис. 13), что соответствует $h = 10^{-4}$, коэффициент диффузии при этом - $D \sim h^3 = 10^{-12}$. Тогда за время

$T = 10^6$ траектория должна была продиффундировать на расстояние $\Delta\psi \sim \sqrt{DT} = 10^{-3}$

Экспериментальное значение $\Delta\psi = 5 \cdot 10^{-7}$, что много меньше оценочной величины. Объяснений может быть по крайней мере два. Первое - на плоскости остались устойчивые траектории, из-за

чего диффузия ограничена. Второе - система при движении по стохастическим слоям попадает на сепаратрисы очень узких резонансов и диффузия практически останавливается на тех временах, на которых мы ведем счёт (подробнее § 5,6).

§ 5. Переходная область

Детальное исследование переходной области от устойчивого движения к стохастическому представляет собой основное содержание работы. Естественно предположить, что не существует резкой границы при переходе между качественно различными областями, а имеется некоторая переходная зона. Выяснилось, что ширина этой переходной области $\sim 0,1$ и лежит по ψ в следующих пределах:

$$0,517 < \psi < 0,618$$

что составляет $\sim 10\%$ от единичного интервала. Как и предполагалось, эта область имеет очень сложный вид. Она вся заполнена резонансами высоких гармоник и сепаратрисами; последние образуются за счёт перекрытия резонансов высших порядков и представляют собой узкие стохастические слои.

Задавая начальные значения (ψ_0 , $\psi_0 = 0$) последней устойчивой траектории и двигаясь по оси ψ в сторону возрастания ψ_0 , был построен график (рис. 8) $\lg N(\psi_0)$, где N - число шагов преобразований, после которого траектория выходила за единицу. Счёт производился для $T = 10^6$, что на рис. 8 обозначено пунктирной линией. Крестиками помечены резонансы, кружками - последние устойчивые замкнутые траектории.

Из рис. 8 видно, что зависимость $\lg N(\psi_0)$ имеет нерегулярный вид, в среднем спадая при движении в стохастическую область. Это говорит о том, что диффузионный путь, вообще говоря, уменьшается при движении в неустойчивую область, и что коэффициент диффузии не является постоянной величиной, а зависит от положения на фазовой плоскости. Можно оценить время, необходимое для того, чтобы траектория вышла в стохастическую область:

$$T \sim \frac{(\Delta\psi)^2}{D}$$

где $\Delta\psi = 5 \cdot 10^{-2}$ - диффузионный путь для траектории с $\psi_0 = 0.56$, D - коэффициент диффузии, который оценим, как в [2]: $D \sim (\Delta\omega)^2$; $\Delta\omega$ - ширина резонанса, измеренная экспериментально (см. табл. 3). Тогда $D \sim 8 \cdot 10^{-9}$ и получим $T = 10^5$, что по порядку величины совпадает с экспериментальным значением.

При приближении к резонансу видно, что $\lg N(\psi_0)$ возрастает, стремясь к бесконечности, что вполне естественно, т.к. внутри резонансов траектории устойчивы (на рис. 9 это отмечено стрелками).

Подобная картина наблюдалась в [12], где рассматривалось поведение магнитных поверхностей тороидального винтового поля вблизи сепаратрисы. В работе [12] приведена зависимость числа периодов поля от радиуса Z , из которой видно, что при выходе из резонанса, т.е. попадании на сепаратрису, силовая линия быстро выходит за радиус обмотки.

Из рис. 9 видно, что существует три ярко выраженные области:

$$I - 0.518 < \psi_0 < 0.523$$

$$II - 0.523 < \psi_0 < 0.525$$

$$III - 0.182 < \psi_0 < 0.619$$

Область, где $\psi_0 < 0.518$ является устойчивой, а для $\psi_0 > 0.619$ наблюдается выход за единицу на первом же шаге, что соответствует очень сильной неустойчивости.

В области I была сделана дополнительная попытка найти устойчивую траекторию. При этом, исходя из того, что возможная устойчивая траектория должна быть расположена где-то между резонансами, мы пытались либо просто обойти резонанс, либо, случайно задавая начальные данные в этой области, попасть на устойчивую траекторию. Такая траектория не была обнаружена, что видно из рис. 9. Область I вся заполнена резонансами или сепаратрисами этих резонансов. В этой области, как видно из рис. 9, неустойчивость за время $T = 10^6$ не успевает развиваться. В то же время три точки, посчитанные на $T = 2 \cdot 10^6$ показывают, что при увеличении времени счёта область II сдвигается влево и заходит в область I. Если увеличить время счёта

для T , возможно, что и в I траектории станут неустойчивыми. Такая слабая неустойчивость обусловлена тем, что в этой области (I) траектория блуждает по сепаратрисам очень узких резонансов, и коэффициент диффузии мал: $D \sim (\Delta\omega)^2$, где $\Delta\omega$ - ширина резонанса и за время $T = 10^6$ неустойчивость не успевает заметно развиваться. Механизмом, ответственным за появление неустойчивости, является зацепление сепаратрис соседних резонансов. Траектория в местах зацепления может случайным образом перейти на сепаратрису другого резонанса. Блуждая по этим разрушенным слоям (сепаратрисам), траектория рано или поздно выходит в стохастическую область. На случайный характер перехода с сепаратрисы одного резонанса на другой, указывает и нерегулярный вид $\lg N(\psi_0)$ на рис. 9. В то же время из рис. 9 следует, что полного перекрытия резонансов в переходной области нет.

Если в области I за время $T = 10^6$ неустойчивость не успевает развиваться, то в области (II) наблюдается резкий спад на интервале $\Delta\psi \sim 10^{-3}$. Для более детального рассмотрения области (II) она была растянута и изображена в логарифмическом масштабе на рис. 10.

На рис. 10 видно, что область II имеет вид, аналогичный средней части общего рис. 9. Особенностью этого графика является то, что в этой области обнаружен очень узкий резонанс $\Delta\psi \sim \Delta\omega \sim 10^{-10}$, который при счёте с обычной точностью мы не смогли бы обнаружить из-за влияния ошибок округления. Траектория просто бы перескочила через такой узкий резонанс.

Область III была так же растянута для более детального рассмотрения - рис. 11. В этой области имеется резкий спад функции $\lg N(\psi_0)$ до нуля, что соответствует переходу в область сильной неустойчивости, где уже наблюдается полное перекрытие резонансов. В области III не было обнаружено ни одного устойчивого резонанса.

Следует отметить, что в переходной области наблюдались резонансы только чётных гармоник ($q = 8, 22, 40, \dots$), это происходит из-за симметрии задачи, в которой $H \sim \frac{1}{2} \psi^2$. Можно оценить величину минимальной гармоники q , при которой возможен резонанс системы с внешней частотой $\Omega = 2\pi$. Для этого рассмотрим гамильтониан системы (4). Ввиду сильной зави-

симости потенциальной энергии от координаты можно считать, что движение происходит в прямоугольной яме с частотой

$$\omega \approx \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \psi_0$$

Запишем обычное резонансное соотношение

$$2\pi m = q \omega$$

для $m = 1$

$$q_{\min} = \left[\frac{4\sqrt{2}}{\psi_0} \right]$$

(скобки означают целую часть от этого выражения). Подставив $\psi_0 \approx 0,8$, получим $q = 8$, что соответствует экспериментально полученной величине минимальной гармоники.

§ 6. Диффузия

Как уже было выяснено ранее, у нас реализуется три случая: устойчивая траектория с точностью до диффузии из-за ошибок округления, резонансы, внутри которых существуют устойчивые траектории, и сепаратрисы резонансов, вблизи которых согласно работе Мельникова [13] неустойчивость имеет место практически всегда.

Поэтому, если имеет смысл говорить о диффузии, то единственное место, где она может идти — это область сепаратрисы.

Для устойчивой траектории ошибки округления приводят к следующему значению коэффициента диффузии:

$$D_{\text{экс}} \approx (2 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}) 10^{-51} \approx (2 \pm \sqrt{\frac{2}{11}}) 10^{-51}$$

для траекторий $\psi_0 \approx 0,76 \cdot 10^{-6}$ $\psi_0 = 0,547 \cdot 10^{-4}$, т.е. с увеличением точности до ($\Delta_2 = 10^{-24}$) диффузия резко падает.

$D_{\text{экс}}$ для обычной точности $D = 4 \cdot 10^{-27}$. Если бы округление происходило случайным образом, то коэффициент диффузии был бы равен $D = \frac{1}{3} \cdot 10^{-48}$ (/1/), что примерно в 140 раз выше, чем было получено экспериментально.

Это еще раз подтверждает, что округление происходит не случайным образом. В переходной области, точнее в (1), был построен график (рис.12) зависимости коэффициента диффузии от

начальных условий ($\psi_0, \psi_0 = 0$), коэффициент диффузии определялся как

$$D_{\text{экс}} = \frac{\langle (\Delta \varphi)^2 \rangle}{2T}$$

где $\langle (\Delta \varphi)^2 \rangle$ — средне-квадратичное отклонение от интерполированной кривой. Из рис.12 видно, что при приближении к области II, т.е. к месту, где траектория выходит в стохастическую область, коэффициент диффузии растёт, хотя возможны и резкие спады. Один такой резкий спад обусловлен тем, что мы попали на сепаратрису узкого резонанса. Воспользовавшись формулой

$D \sim (\Delta \omega)^3$ сравним экспериментально измеренную ширину резонанса с теоретической

$$D_{\text{экс}} \approx 10^{-21}; \quad \Delta \omega \sim \sqrt[3]{D} \sim 10^{-7}$$

экспериментальное значение $(\Delta \omega)_{\text{экс}} \sim (\Delta \varphi) \sim 0,2 \cdot 10^{-7}$, т.е. по порядку величины они совпадают. Следует отметить, что на сепаратрисе резонанса $\Delta \varphi \sim \Delta \omega \sim 10^{-10}$ коэффициент диффузии будет $D \sim 10^{-30}$, т.е. очень малым. На сепаратрисах таких узких резонансов траектория может надолго "застревать".

Приведенный рис.12 еще раз показывает сложность структуры переходной области. Диффузия здесь имеет очень своеобразный характер, так как траектория идет по узким стохастическим слоям, обходя резонансы, отражаясь от ближайшей устойчивой траектории, застревая на сепаратрисах очень узких резонансов, прежде, чем успеет выйти в область сильной стохастичности.

В заключение приносим нашу искреннюю благодарность Б.В.Чирикову за внимание к работе и ценные советы, а также В.П.Минаеву за помощь в проведении вычислений.

Л и т е р а т у р а

1. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. Стохастичность простейшей динамической модели с раздельным фазовым пространством, препринт ИЯФ, Новосибирск, 1968 г.
2. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Диссертация, 1969 г. ИЯФ СО АН СССР.
3. Г.М.Заславский. Статистическая необратимость в нелинейных системах, "Наука", 1970.
4. Moser, *A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations, II, Annaly della Scuola Norma Superiore di Pise, Serie III, VXX, Fase, III 1966.*
5. В.И.Арнольд. УМН, ХУШ, в.6 (114), 91 (1963).
6. Б.В.Чириков. Когда динамическая система становится статистической? Сообщение на Международном съезде математиков, Москва, 1966, Атомная энергия, 6, 630 (1959).
7. Б.В.Чириков. ДАН, 174, 1313 (1967).
8. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков. О механизме одномерного ускорения Ферми. ДАН СССР, 159, 306 (1964).
9. М.В.Антипов, Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. Статистическая проверка датчика псевдослучайных чисел, препринт ИЯФ, Новосибирск, 1967г.
10. *B Chirikov, E Keil, A Sesler, Stochasticity in Many-Dimensional Systems, CERN Report*
11. *E. Courant, Nuclear Science, 12, 550(1965)*
12. А.В.Комин, В.П.Красицкая, В.П.Минаев. Магнитные поверхности тороидального винтового поля вблизи сепаратрисы, препринт ИЯФ, Новосибирск, 1968.

13. В.К.Мельников, ДАН, 148, 1257 (1966).

14. *Edwin H. McMillan, Some thoughts on stability in nonlinear periodic focusing systems, September 5, 1967, Berkeley*

Таблица 1.

Эволюция корреляций $\Delta\psi(\psi)$

ψ_0	ψ_0	Максимальная амплитуда $\Delta\psi(\psi)$	Время T	$[\psi_{мин}, \psi_{макс}]$
$0,546 \cdot 10^{-4}$	$7,6 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-18}$	10^6	$1,7 \cdot 10^{-6}$
-	-	$3 \cdot 10^{-18}$	10^6	10^{-6}
-	-	10^{-21}	$4 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{-7}$
-	-	$2 \cdot 10^{-22}$	$5 \cdot 10^6$	10^{-8}

Таблица 2.

Устойчивые траектории

ψ_0	ψ_0	Максимальная амплитуда $\Delta\psi(\psi)$	Время счёта T
0,62	0	10^{-15}	$5 \cdot 10^6$
0,76	0	$1,5 \cdot 10^{-21}$	$2,8 \cdot 10^7$
0,77	0	10^{-15}	$5 \cdot 10^6$
0,78	0	Резонанс	10^6
$7,6 \cdot 10^{-7}$	$0,546 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-22}$	$5 \cdot 10^6$
$0,76 \cdot 10^{-6}$	$0,546 \cdot 10^{-2}$	10^{-14}	$5 \cdot 10^6$
-0,118	-0,118	$3 \cdot 10^{-21}$	$1,6 \cdot 10^7$

ψ_0	ψ_0	Максимальная амплитуда $\Delta\psi(\psi)$	Время счёта T
0	0,505	$4 \cdot 10^{-16}$	10^6
0	0,512	$9,6 \cdot 10^{-16}$	10^6
0	0,514	$6,4 \cdot 10^{-14}$	10^6
0	0,516	$0,8 \cdot 10^{-18}$	10^7
0	0,5172	Резонанс	10^6
0	0,5173	$2 \cdot 10^{-14}$	10^6
0	0,5174	$2 \cdot 10^{-15}$	10^6
0	0,5175	$4 \cdot 10^{-14}$	10^6

Таблица 3.

ψ_0	ψ_0	Величина гармоники q	Ширина резонанса $\Delta\omega \sim \Delta\psi$
0,526	0	8	$5 \cdot 10^{-2}$
0,601	0	22	$6 \cdot 10^{-3}$
0,61	0	40	10^{-3}

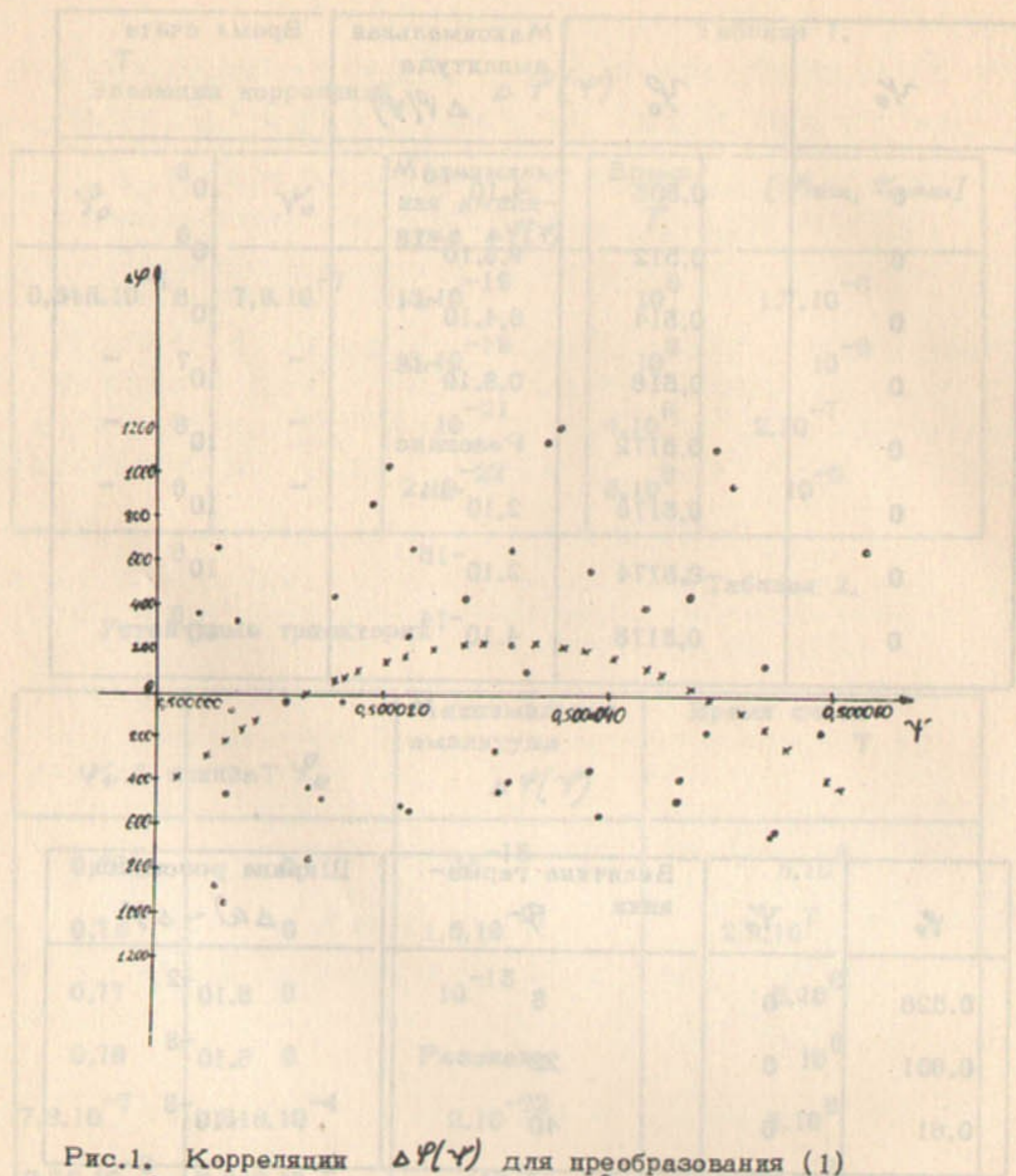


Рис.1. Корреляции $\Delta\psi(\gamma)$ для преобразования (1) с $\psi_0 = -0.118$, $\psi_0 = -0.118$, $T=10^6$; обработка с помощью прямой. Крестиками помечены отклонения, посчитанные с двойной точностью. Кружками - отклонения, посчитанные с обычной точностью. Масштаб по $\Delta\psi$ в единицах $\Delta_2 = 10^{-12}$.

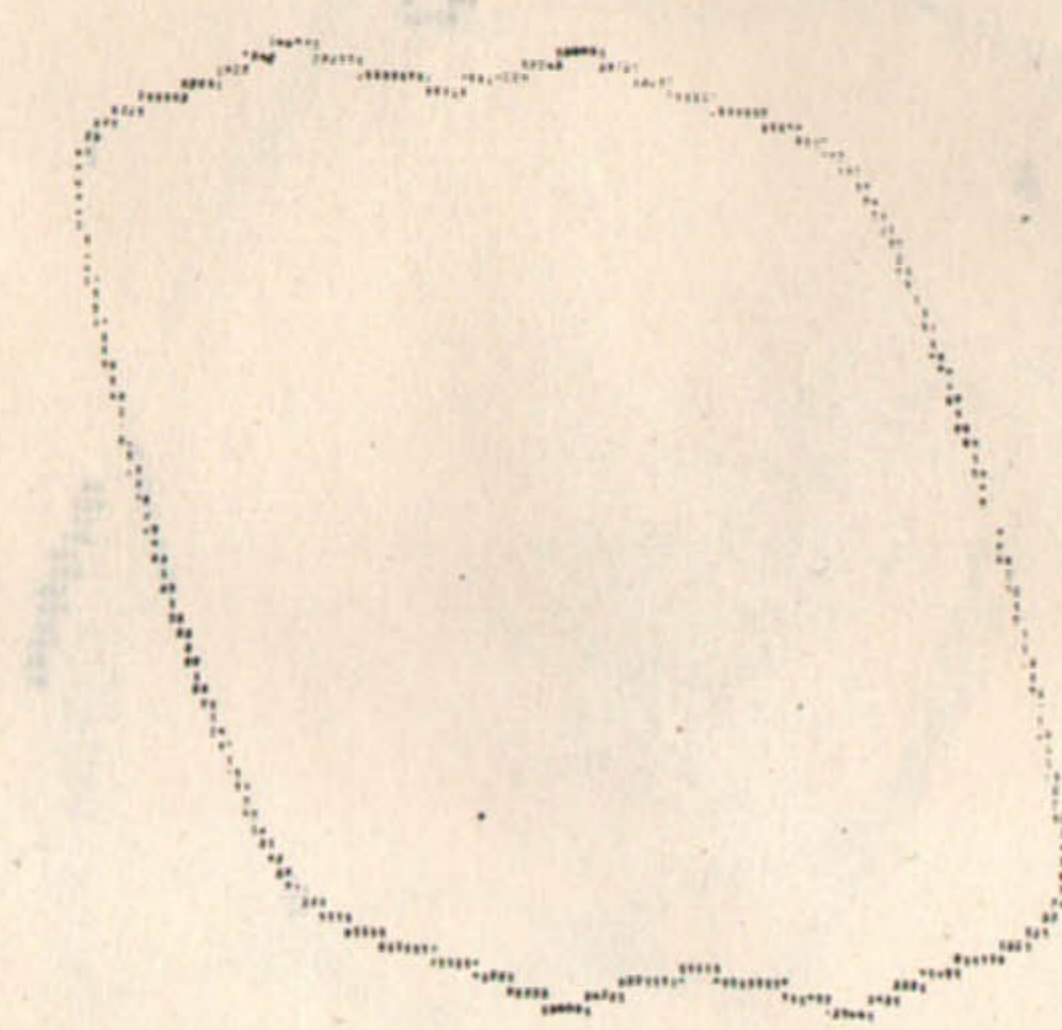


Рис.2. Фазовая плоскость (Ψ, ψ) . Устойчивая замкнутая траектория $\psi_0 = 0.51$, $\psi_0 = 0$; $T=10^6$.

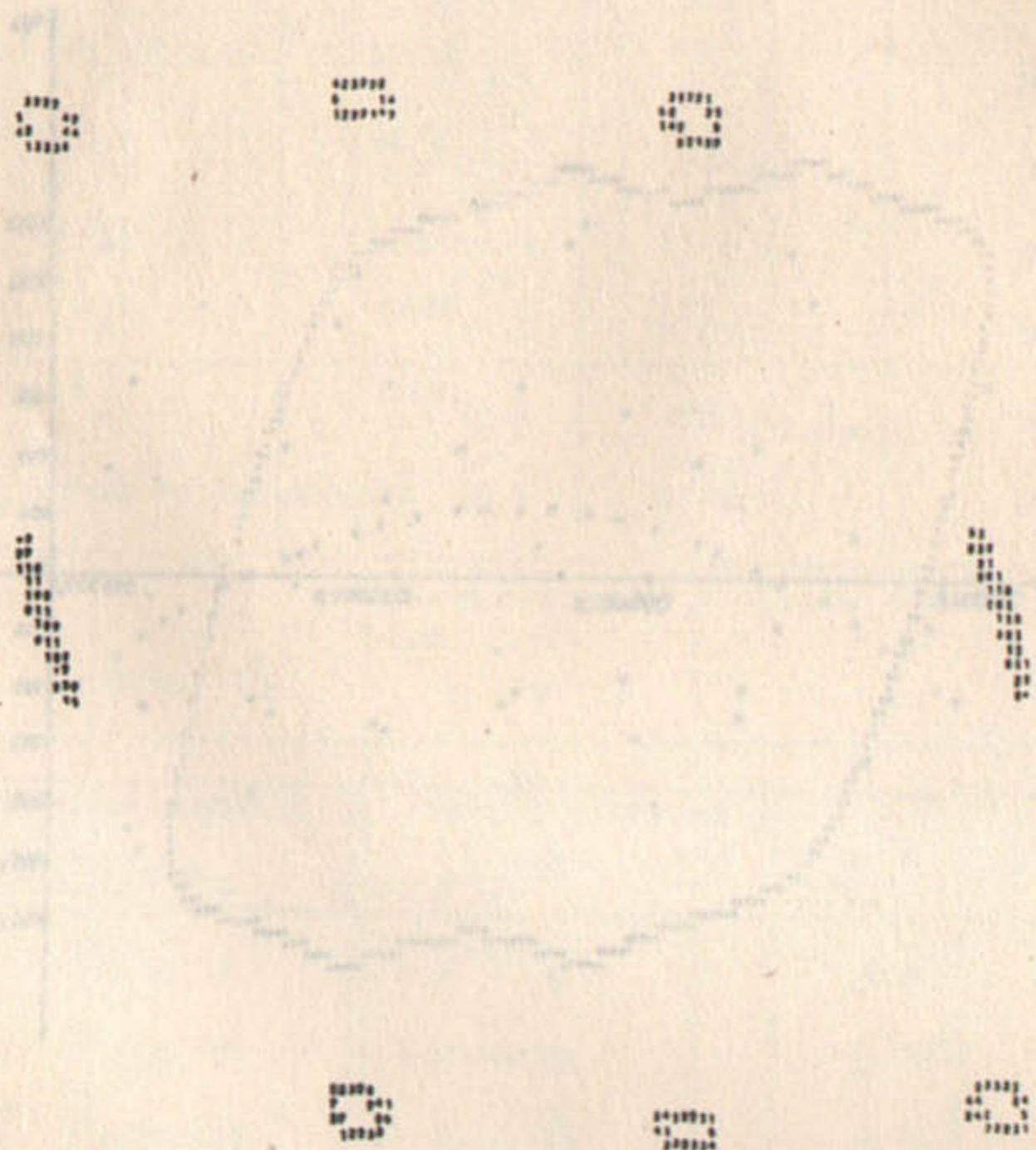


Рис.3. Фазовая плоскость (ψ, Ψ) . Резонанс 8-ой гармоники
 $\varphi_0 = 0$, $\gamma_0 = 0,78$, $T = 10^6$.

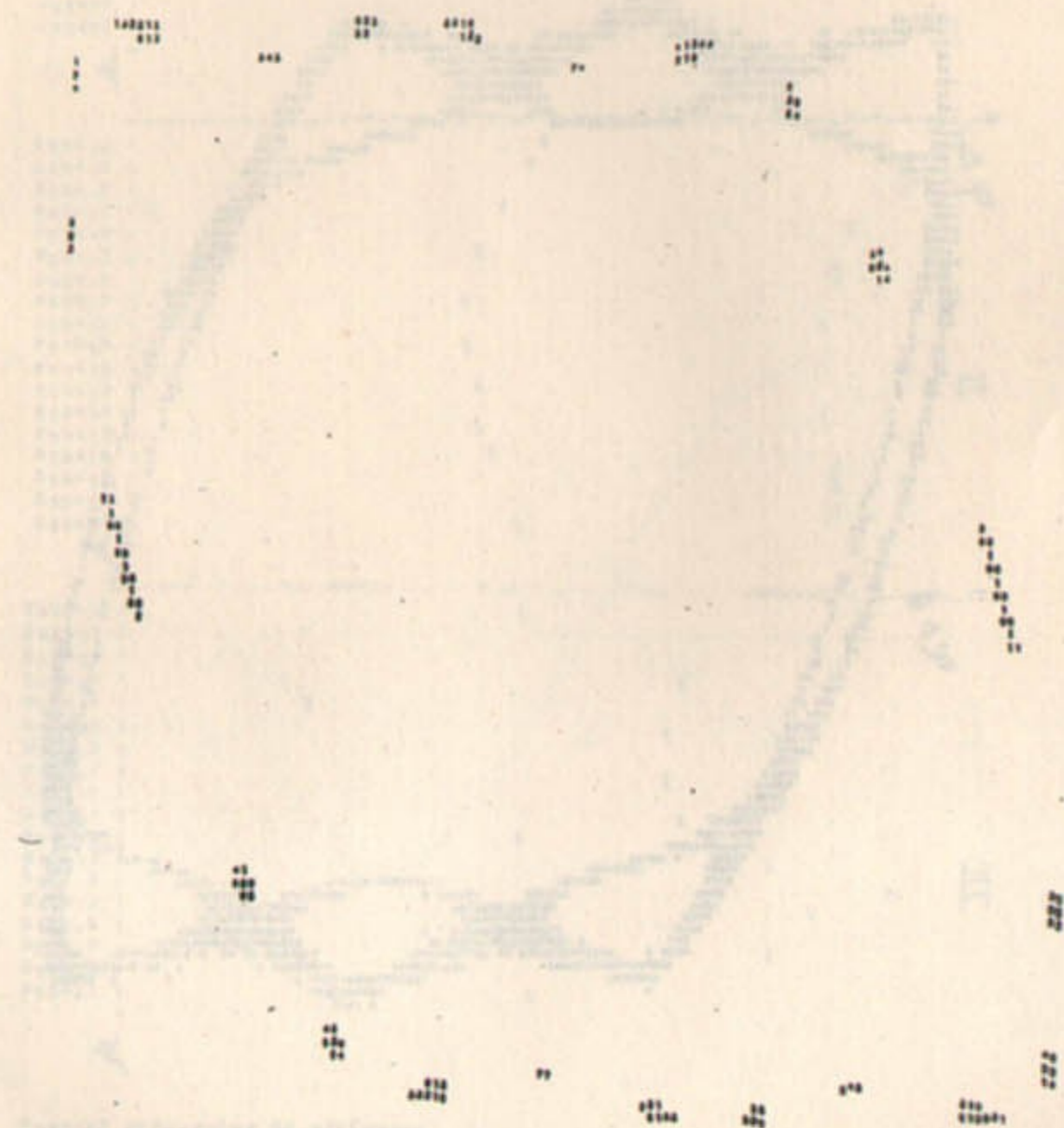


Рис.4. Фазовая плоскость (ψ, Ψ) . Резонанс 22-ой гармоники
 $\varphi_0 = 0,602$, $\gamma_0 = 0$, $T = 10^6$.

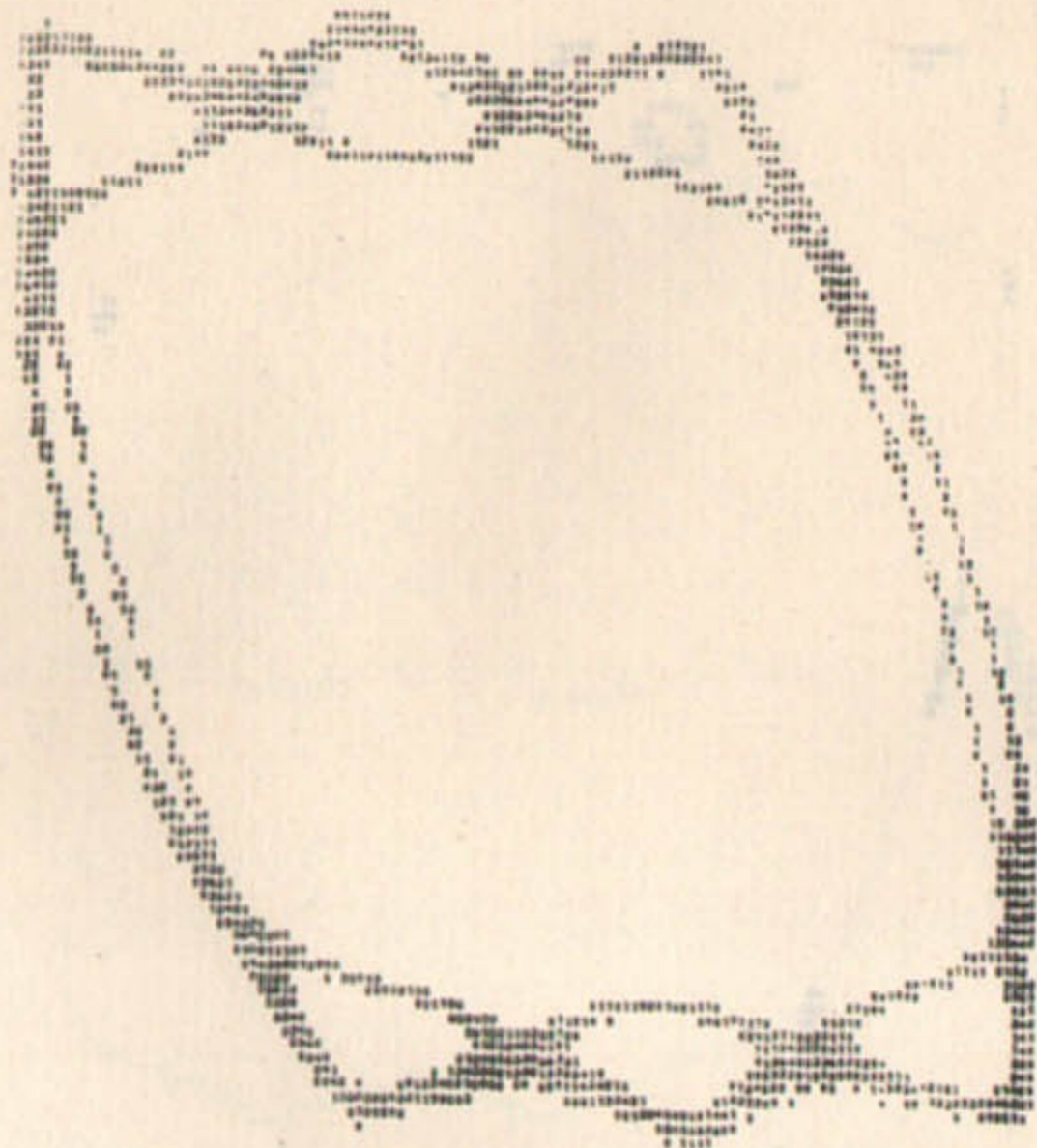


Рис.5. Фазовая плоскость (Ψ, Ψ). Попадание на сепаратрису резонанса 8-ой гармоники. Траектория неустойчива.

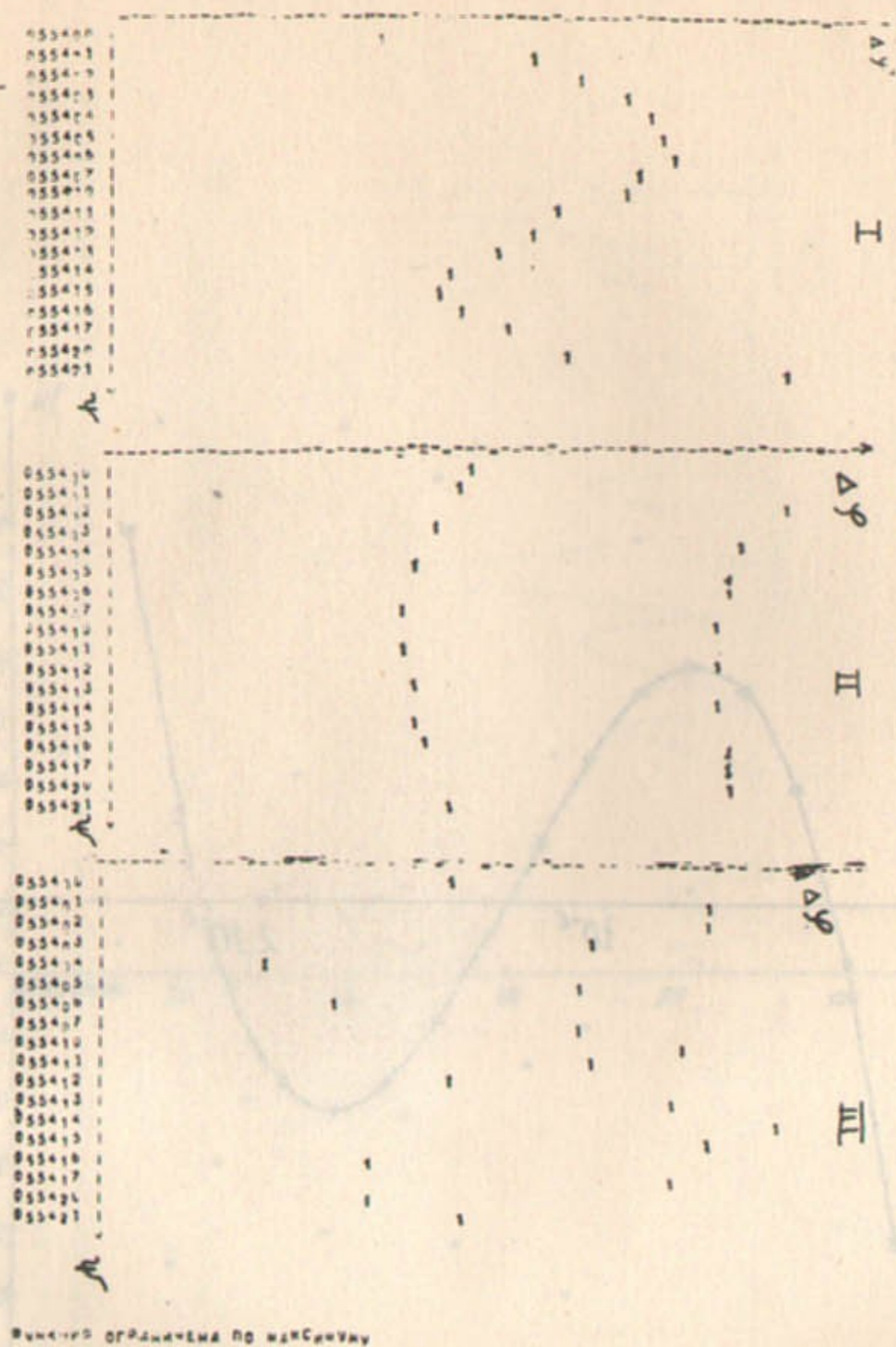


Рис.6. Корреляционные функции $\Delta \varphi(\psi)$ для 3х разных случаев.
 I-попадание на замкнутую устойчивую траекторию.
 II-попадание на резонанс q -гармоники.
 III-попадание на сепаратрису резонанса.

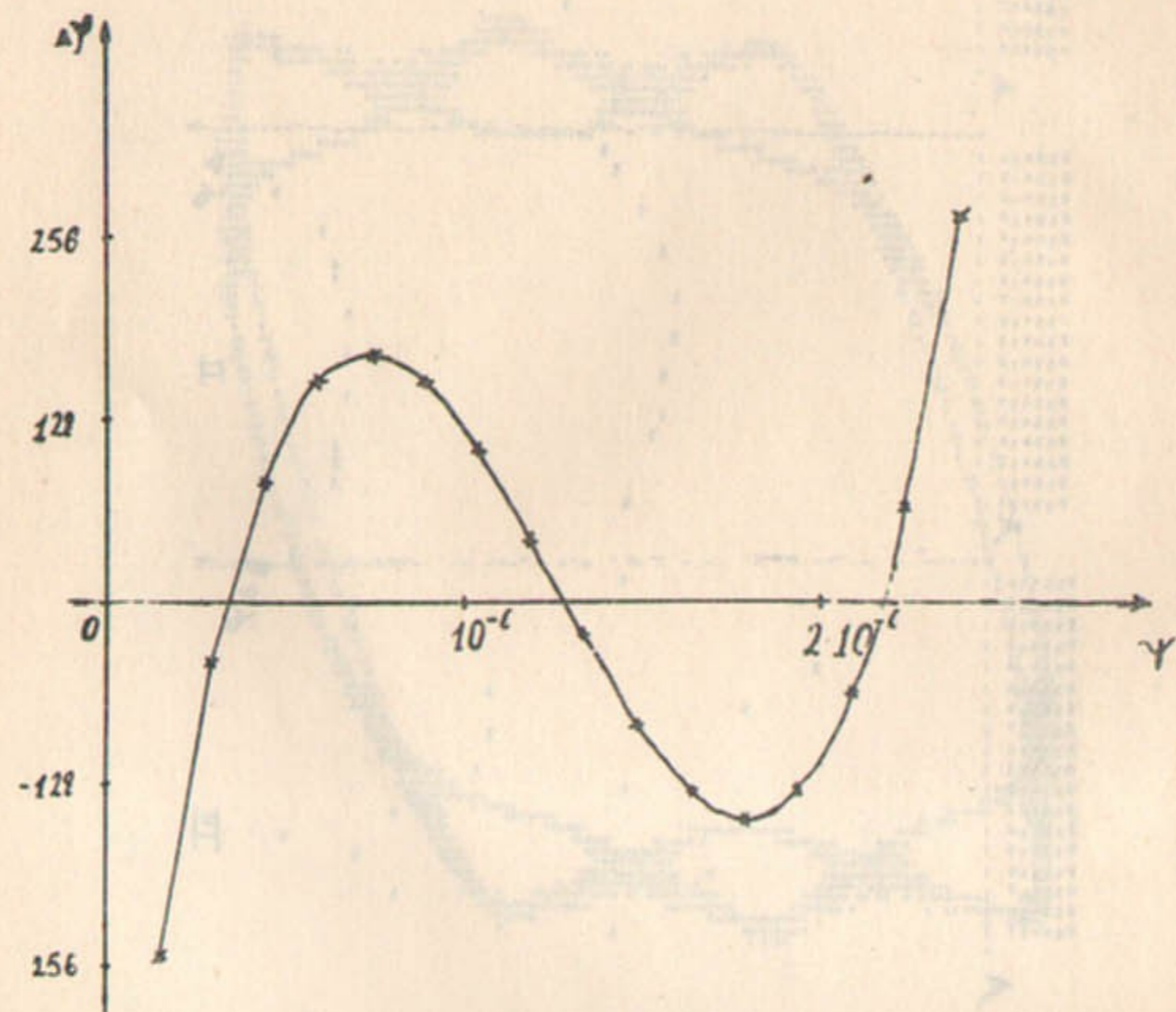


Рис.7. Корреляционная функция $\Delta\psi/\psi$ для $\psi_0 = 0,516 \psi_0 = 0$
 $T=10^7$ (в единицах $\Delta_2 = 3,5 \cdot 10^{-21}$).

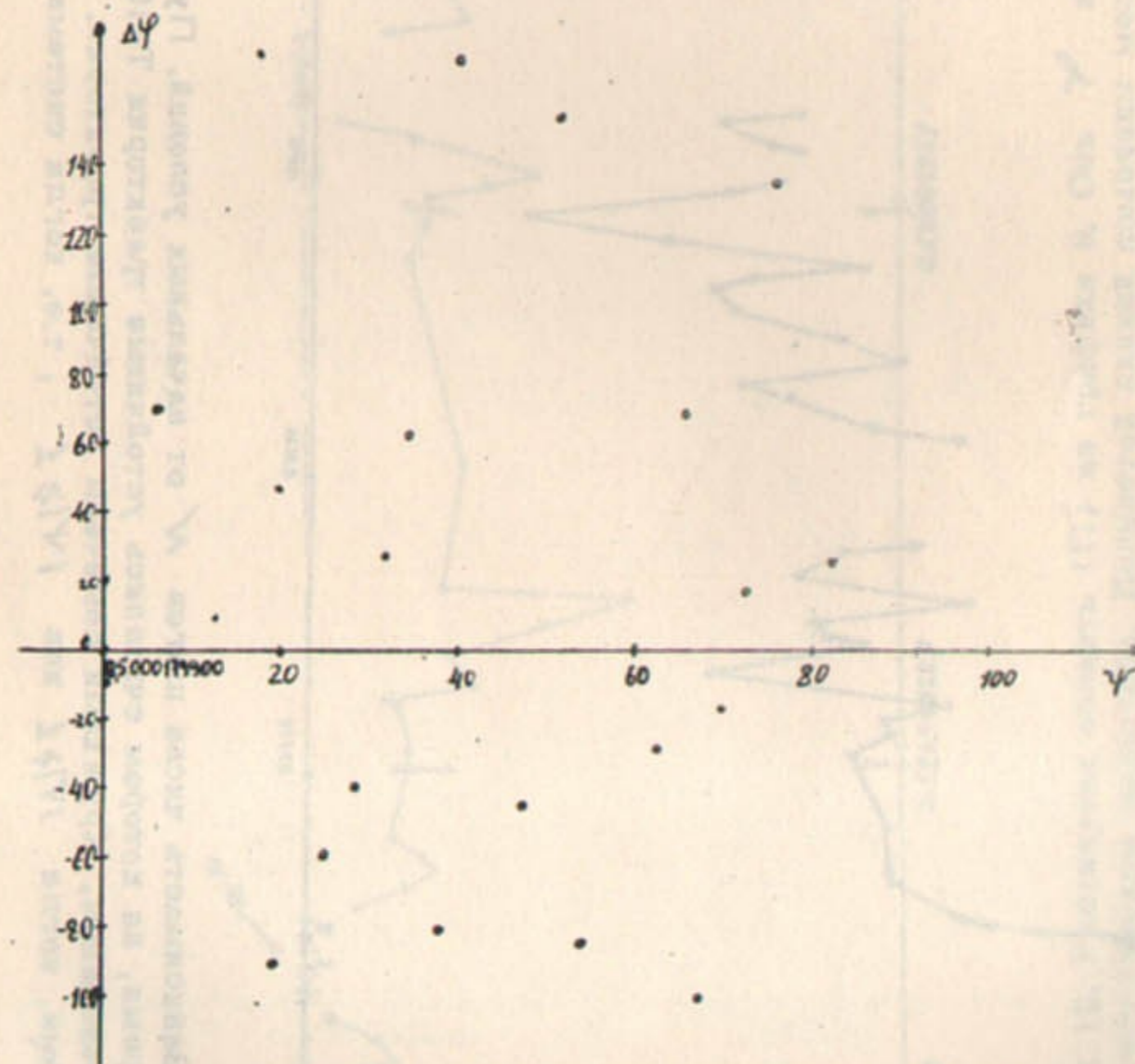


Рис.8. Корреляционная функция $\Delta\psi/\psi$ для $\psi_0 = 7,6 \cdot 10^{-6}$
 $\psi_0 = 0,546 \cdot 10^{-4}$ $T=5 \cdot 10^6$ (в единицах $\Delta_2 = 210^{-23}$).

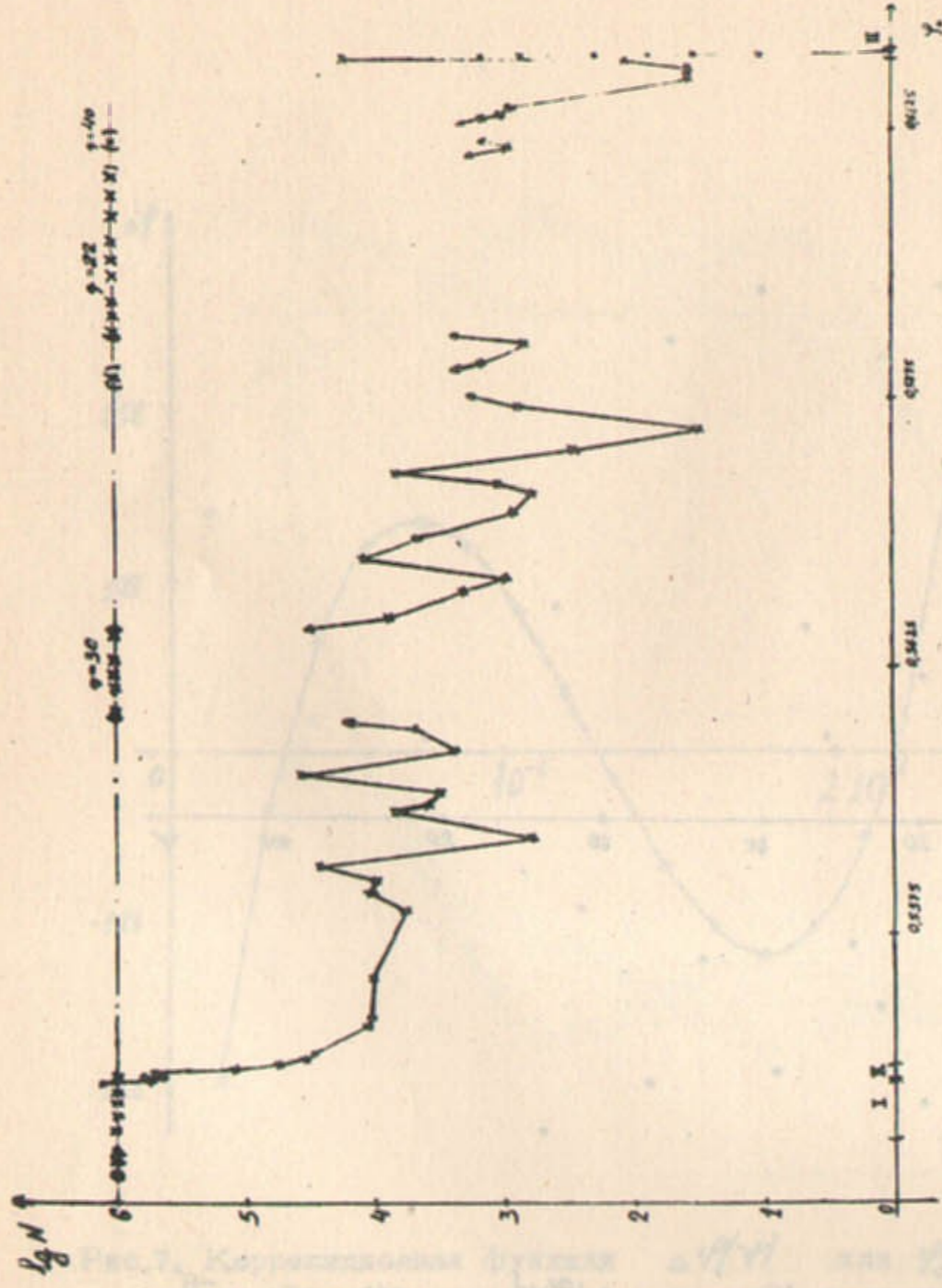


График 9. Зависимость числа шагов N от начальных условий. Пунктирной линией помечено время, на котором считались устойчивые траектории $T=10^{-6}$. Крестиками помечены резонансы. Кругами помечены устойчивые траектории. N — число шагов или время, когда $|V| > 1$ или $|V| > 1$, т.е. когда система выходит за единицу.

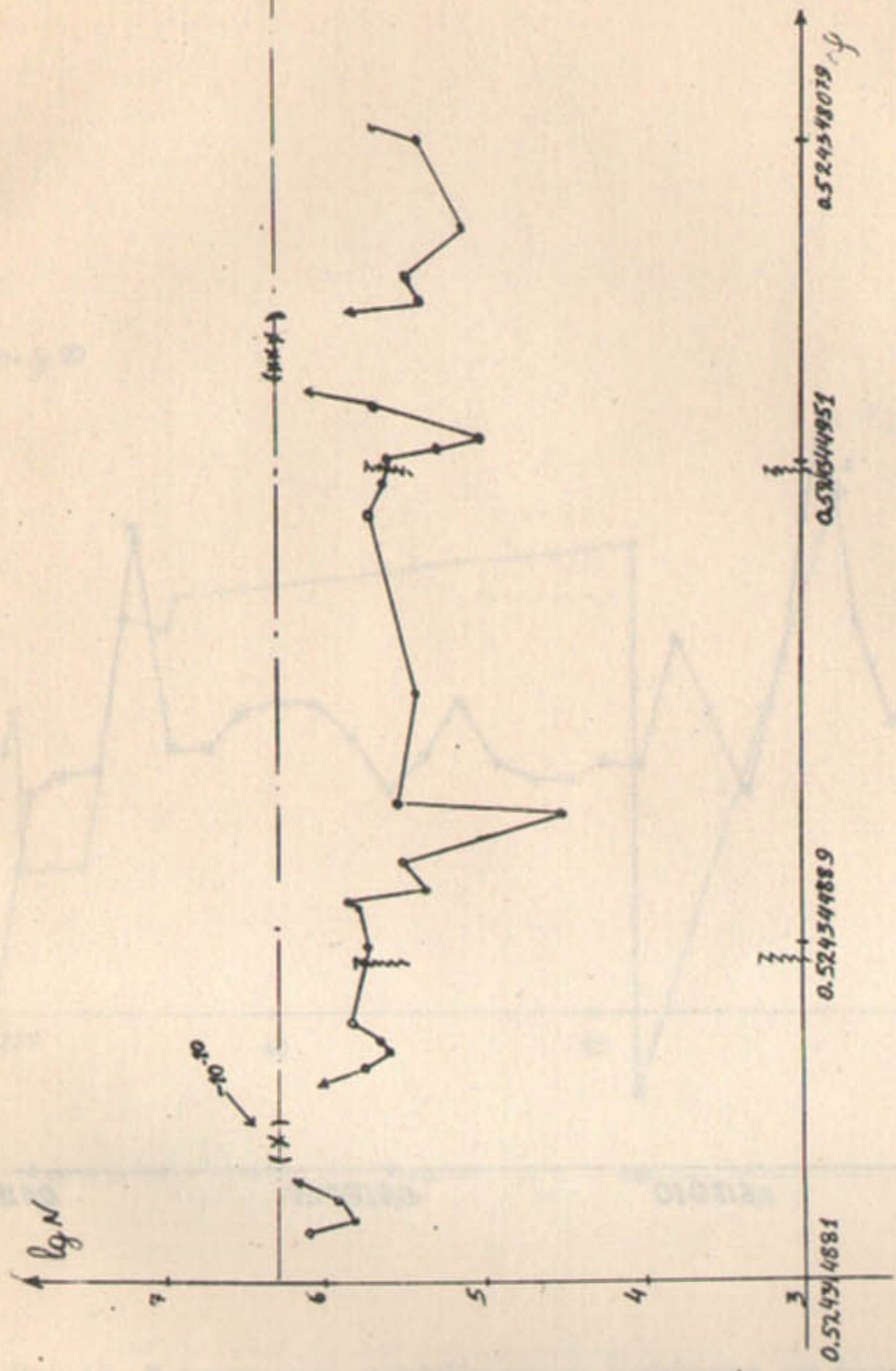


График 10. Растянутая область (П) из графика 9. Ось t изображена в логарифмическом масштабе. Волнистой линией помечены места в разрыве масштаба.

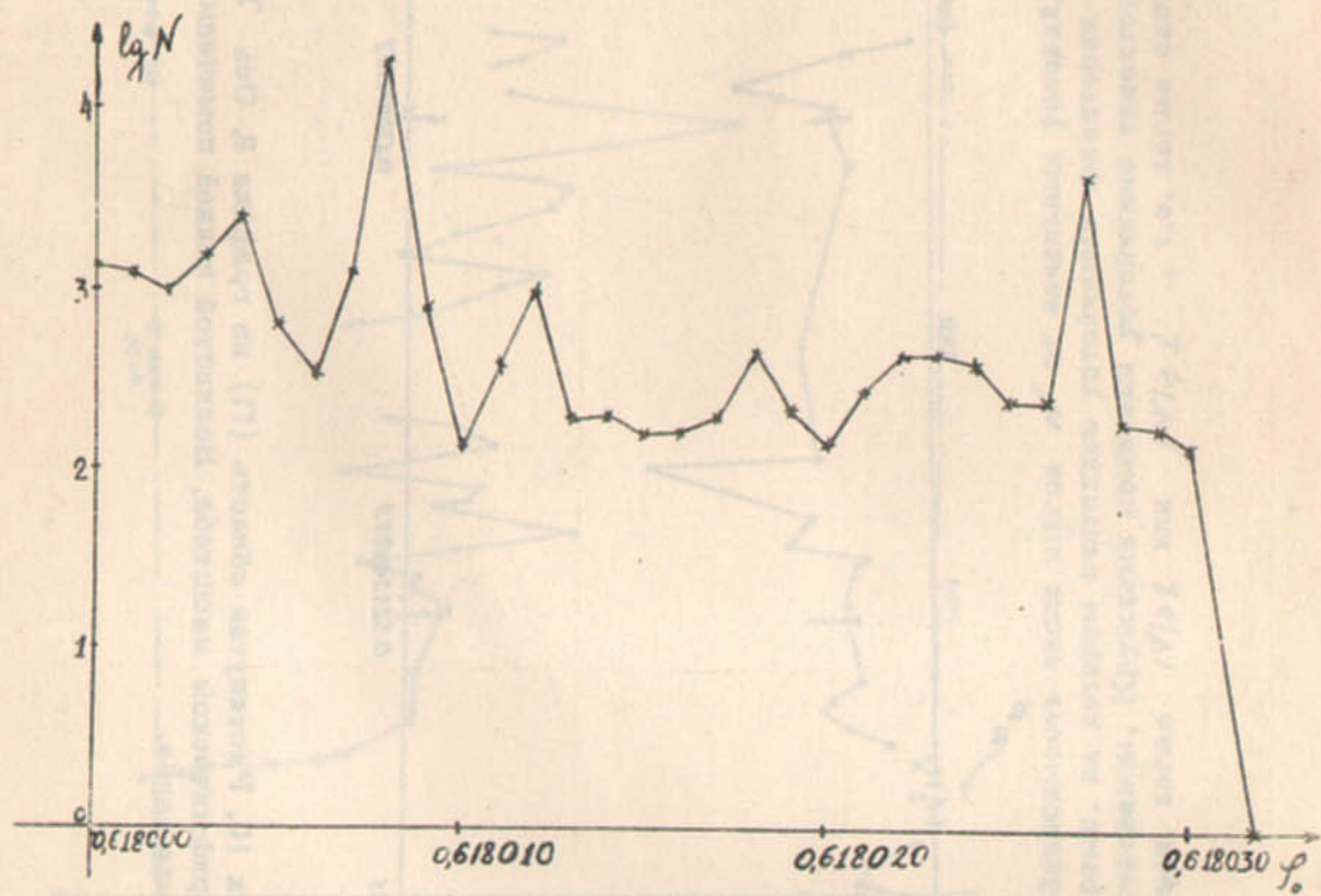


График 11. Растянутая область Ш из графика 9. (Обозначения те же, что в 9).

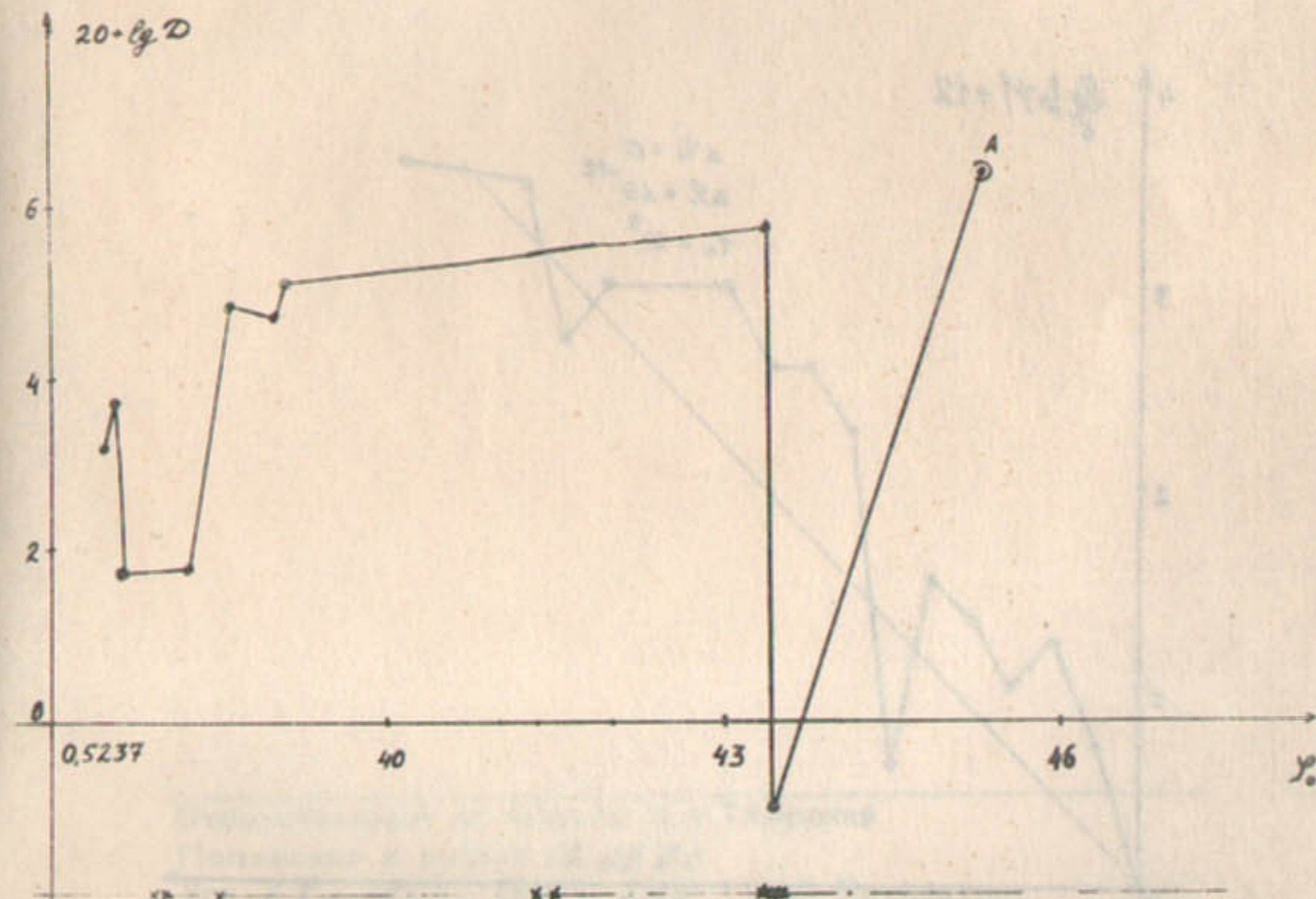


Рис. 12. Зависимость коэффициента диффузии от начальных условий φ_0 . Внизу крестиками помечены рядом лежащие резонансы.

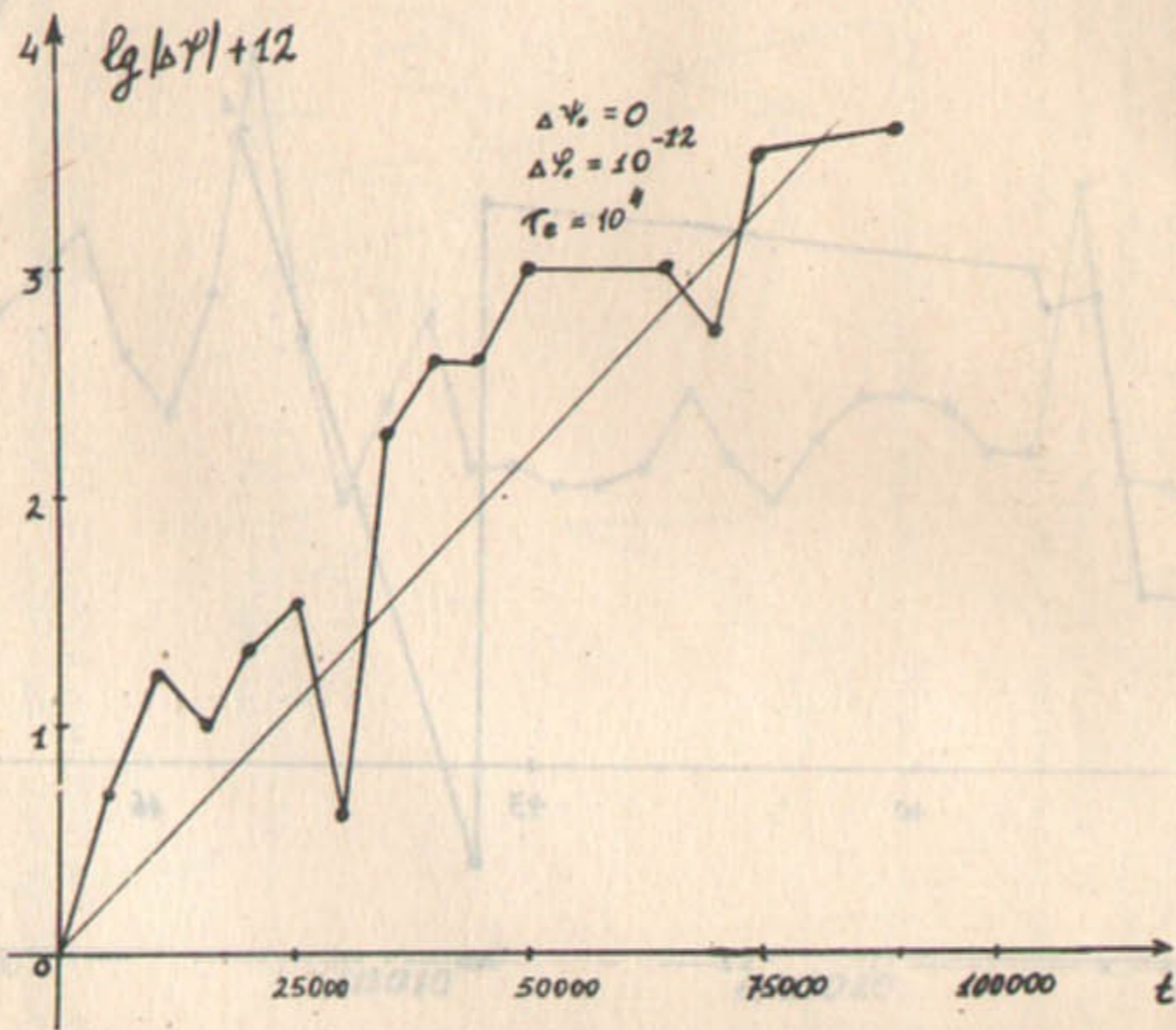


Рис.13. Локальная неустойчивость движения для случая $\psi_0 = 0,32$, $\psi_0 = 0$, $T=10^5$, τ_e — среднее время разбега.

Ответственный за выпуск В.А.Таюрский
 Подписано к печати 16.09.70
 Усл. 1,7 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
 Заказ № 79 . ПРЕПРИНТ
 Отпечатано на ротапринтере в ИЯФ СО АН СССР, нв.