И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 17 - 70

В.Ф.Дмитриев, Ю.Б.Румер

АЛГЕБРА 0(2,1) И АТОМ ВОДОРОДА

Новосибирск

1970

АЛГЕБРА 0(2,1) И АТОМ ВОДОРОДА

В.Ф.Дмитриев, Ю.Б.Румер

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что проблема атома водорода, как нерелятивистского, так и релятивистского может быть сформулирована в генераторах некомпактной алгебры 0(2,1). Надлежащим выбором базиса для генераторов в алгебре 0(2,1) (тильт) определяются возможные значения энергии (формулы Бальмера и Зоммерфельда соответственно).

В В Е Д Е Н И Е

Цель настоящей работы, показать, что собственные значения оператора энергии атома водорода, как в нерелятивистском, так и в релятивистском случае, могут быть получены методами групповой механики, с привлечением некомпактной алгебры 0(2,1).

Работа состоит из трех параграфов. В первом даются необходимые сведения из теории некомпактной алгебры 0(2,1). Во втором - рассматривается нерелятивистский атом и получается формула Бальмера, а в третьем - релятивистский атом и формула Зоммерфельда.

1.

АЛГЕБРА 0(2,1) /1/.

Некомпактная алгебра 0(2,1) есть линейное векторное пространство, натянутое на три генератора N_1, N_2, N_3, образующих базис и удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$[N_1, N_2] = -iN_3 \quad [N_2, N_3] = iN_1 \quad [N_3, N_1] = iN_2 \qquad (1)$$

Оператор Казимира этой алгебры имеет вид:

$$Q = N_3^2 - N_2^2 - N_1^2 = (N_3 - N_1)(N_3 + N_1) - N_2^2 - iN_2 \quad (2)$$

Нас будут интересовать представления, в которых диагональны в одном случае генераторы N_1 или N_2, в другом N_3. Можно показать, что в представлениях, в которых диагонален генератор N_1 или N_2, спектр их собственных значений непрерывен, а в представлении, в котором диагонален генератор N_3, спектр его собственных значений дискретен и имеет вид,

$$(N_3] = -\phi + n \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots) \quad (3)$$

где число ϕ связано с оператором Казимира формулой:

$$Q = \phi(\phi + 1) \quad (4)$$

и $\phi < 0$ для унитарных представлений.

Можно указать следующую реализацию генераторов N_α через операторы координаты и импульса

$$\begin{array}{lll} N_3 - N_1 = r & N_1 = \frac{1}{2}(rp^2 - r) & p_r = \frac{1}{r}(\vec{r}\cdot\vec{p}) - \frac{i}{r} \\ N_2 = rp_r & N_2 = rp_r & p^2 = -\Delta \\ N_3 + N_1 = rp^2 & N_3 = \frac{1}{2}(rp^2 + r) & \end{array} \quad (5)$$

Операторы r, rp^2, rp_r действуют на функции в пространстве со скалярным произведением

$$\langle \Psi_1 / \Psi_2 \rangle = \int \Psi_1^+(\vec{r}) \frac{1}{r} \Psi_2(\vec{r})\, d\vec{r} \quad (6)$$

Определенное таким образом скалярное произведение обеспечивает эрмитовость генераторов N_α. Имеем:

$$r(rp_r - p_r r)p_r = irp_r = r^2p_r^2 - (rp_r)^2$$

откуда по формулам (2) и (15)

$$r^2p_r^2 = N_2^2 + iN_2 = (N_3 - N_1)(N_3 + N_1) - Q \qquad (7)$$

Линейное преобразование базиса алгебры Ли, сохраняющее перестановочные соотношения и, следовательно, оператор Казимира называется тильтом. Из формулы (2) следует, что тильт есть гиперболическое вращение в плоскостях 13 и 23, и обычное вращение в плоскости 12. Нас будет интересовать тильт в плоскости 13:

$$\begin{aligned} N_1 &= \bar{N}_1 \operatorname{ch}\theta + \bar{N}_3 \operatorname{sh}\theta \\ N_3 &= \bar{N}_1 \operatorname{sh}\theta + \bar{N}_3 \operatorname{ch}\theta \end{aligned} \qquad (8)$$

Рассмотрим линейную форму

$$aN_1 + bN_3 + c - \qquad (9)$$

Надлежащим тильтом форма (9) приводится к виду:

$$\bar{b}\bar{N}_3 + c \qquad (9а)$$

либо к виду

$$\bar{a}\bar{N}_1 + c \qquad (9б)$$

В первом случае $\operatorname{th}\theta_1 = -\frac{a}{b}$ $\quad \bar{b} = \sqrt{b^2 - a^2}$ (9б)

Во втором случае $\operatorname{th}\theta_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad \bar{a} = \sqrt{a^2 - b^2}$

П.
НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ АТОМ ВОДОРОДА

Уравнение Шредингера для нерелятивистского атома водорода имеет вид:

$$\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{2me^2}{r}+2mE\right\}\Psi=0 \qquad (10)$$

или, умножая слева на r^2 и вводя безразмерные переменные $\eta=\frac{E}{m}$, α -постоянная тонкой структуры.

$$\left\{-r^2p_r^2-\ell(\ell+1)+2\alpha r+2\eta r^2\right\}\Psi=0 \qquad (11)$$

Подставляя генераторы алгебры 0(2,1) по формулам (5) и (7) получим

$$Q-(N_3-N_1)(N_3+N_1)-\ell(\ell+1)+2\alpha(N_3-N_1)+2\eta(N_3-N_1)^2=0 \qquad (12)$$

Выберем теперь то представление алгебры 0(2,1), для которого

$$Q=\Phi(\Phi+1)=\ell(\ell+1) \qquad (13)$$

откуда в силу $\Phi<0$

$$\Phi=-\ell-1$$

Из (12) и (13) получаем

$$-(N_3+N_1)+2\eta(N_3-N_1)+2\alpha=0 \qquad (14)$$

Или окончательно

$$N_3(\eta-\tfrac{1}{2})-N_1(\eta+\tfrac{1}{2})+\alpha=0 \qquad (15)$$

Далее следуем методу Намбу /2/.

Уравнение (15) имеет вид (9) с коэффициентами $a=-\eta-\frac{1}{2}$, $b=\eta-\frac{1}{2}$, $c=\alpha$, откуда для дискретного спектра следует

$$\sqrt{-2\eta}\,\bar{N}_3+\alpha=0 \qquad \text{или} \qquad \eta=-\frac{\alpha^2}{2\bar{N}_3^2}$$

и для непрерывного спектра

$$\sqrt{2\eta}\,N_1+\alpha=0 \qquad \text{или} \qquad \eta=\frac{\alpha^2}{2\bar{N}_1^2}$$

Выбирая представление, в котором диагонален генератор N_3 (дискретный спектр) и принимая во внимание (3), получаем формулу Бальмера

$$\eta=-\frac{\alpha^2}{2(-\phi+n)^2} \qquad \phi=-l-1 \tag{16а}$$

Выбирая представление, в котором диагонален генератор N_1, получаем непрерывный спектр

$$\eta=\frac{\alpha^2}{2\nu^2} \tag{16б}$$

Ш.
РЕЛЯТИВИСТСКИЙ АТОМ ВОДОРОДА

Уравнение Дирака для атома водорода имеет вид:

$$\left(\rho_1(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})+\rho_3 m-\frac{e^2}{r}\right)\psi=E\psi \tag{17}$$

Умножая на r слева, и записывая в двухкомпонентном виде, получим:

$$\begin{aligned}&[e^2+r(E-m)]\varphi+r(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi=0\\&r(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi+[e^2\cdot r(E+m)]\chi=0\end{aligned} \tag{18}$$

Для исключения матриц Паули произведем замену:

$$f = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}}{r}\varphi \qquad g = -i\chi$$

Для f и g получим:

$$\begin{aligned} &[e^2 + r(E-m)]f + (K - irp_r)g = 0 \\ &(K + irp_r)f + [e^2 + r(E+m)]g = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

где $\pm K$ -собственные значения оператора $1 + (\vec{\sigma}\cdot\vec{L})$
Умножая эти уравнения слева на $K + irp_r$ и $K - irp_r$ соответственно, и используя перестановочное соотношение $[r, rp_r] = ir$, получим, после несложных расчетов, систему, которая в безразмерных единицах $\xi = \frac{E}{m}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &[\alpha^2 + 2\alpha\xi r + r^2(\xi^2-1) - (rp_r)^2 - i(rp_r) - K^2 + K]f + \alpha g = 0 \\ &[\alpha^2 + 2\alpha\xi r + r^2(\xi^2-1) - (rp_r)^2 - i(rp_r) - K^2 - K]g - \alpha f = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Исключая из этой в системы g, получим:

$$[2\alpha\xi r + r^2(\xi^2-1) - (rp_r)^2 - i(rp_r) - s^2]^2 f - s^2 f = 0 \tag{21}$$

где введено обозначение $s^2 = K^2 - \alpha^2$
Извлекая квадратный корень из (21), и переходя к генераторам алгебры O( ) согласно (5), получаем:

$$2\alpha\xi(N_3 - N_1) + (N_3 - N_1)^2(\xi^2-1) - N_2^2 - iN_2 = s(s\pm1) \tag{22а}$$

или учитывая (2)

$$(N_3 - N_1)[2\alpha\xi + (N_3 - N_1)(\xi^2-1) - (N_3 + N_1)] = s(s\pm1) - Q \tag{22б}$$

Если выбрать то представление, в котором оператор Казимира принимает значение:

$$Q = \Phi(\Phi+1) = j(j+1) \qquad \Phi = -j-1 \tag{23}$$

уравнение (22б) сводится к линейному

$$2\alpha\xi + N_3(\xi^2-2) - N_1\xi^2 = 0 \tag{24}$$

которое является релятивистским аналогом уравнения (15). Это уравнение также имеет вид (9) с коэффициентами

$$a = -\xi^2, \quad b = \xi^2 - 2, \quad c = 2\alpha\xi$$

Следуя опять методу Намбу, получаем:

$$\bar{b} = 2\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\sqrt{1-\xi^2}\,\bar{N}_3 + \xi\alpha = 0$$

и

$$\bar{a} = 2\sqrt{\xi^2-1}$$

$$\sqrt{\xi^2-1}\,\bar{N}_1 + \alpha\xi = 0$$

Выбирая представление, в котором диагонален генератор N_3 (дискретный спектр), получим, принимая во внимание (23), формулу Зоммерфельда

$$n + j + 1 + \frac{\alpha\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0 \qquad (n = 0,1,2\ldots)$$

или

$$\xi^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha^2}{(n+j)^2}} \qquad (n = 1,2,3\ldots) \tag{25}$$

Литература

1. A. O. Barut and C. Fronsdal. Proc. Roy. Soc. 287, 532, (1965). См. также, К.Фронсдал в сб. Теория групп и элементарные частицы.
2. Y. Nambu in Proc of the 1967 Intern. Conf. on Particles and Fields.

NON-COMPACT ALGEBRA O(2.I) and THE RELATIVISTIC H-ATOM.

W.Dmitrieff, G.Rumer

The Dirac equations for the H-atom (in dimensionless units) after multiplication by r becomes

$$[\alpha + r(\zeta-1)]\varphi + (K - irp_r)\chi = 0$$

$$(K + irp_r)\varphi + [\alpha + r(\zeta+1)]\chi = 0 \qquad (I)$$

where $\zeta = \frac{E}{m}$ is the energy parameter, K is the eigen value of the operator $I+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})$ and α is the fine structure constant.

Applying the operators $K + irp_r$ and $K - irp_r$ to these two equations respectively, we get by straightforward calculation and elimination of χ

$$\{2\alpha\zeta r + (\zeta^2-1)r^2 - (rp_r)^2 - i(rp_r) - S(S\pm1)\}\varphi = 0 \qquad (2)$$

where

$$S = \sqrt{K^2-\alpha^2}$$

To introduce the group mechanical technique we notice that three operators r, rp_r, rp^2 generate the algebra O(2,I) /I/

$$[N_1, N_2] = -iN_3, \quad [N_2, N_3] = iN_1 \quad [N_3, N_1] = iN_2$$

where

$$r = N_3 - N_1 \ , \quad rp_r = N_2 \ , \ rp^2 = N_3 + N_1 \tag{3}$$

The Casimir operator is

$$Q = (N_3 - N_1)(N_3 + N_1) - N_2^2 - iN_2 = \phi(\phi + 1) \tag{4}$$

The eigenvalues of the operator N_3 are

$$\{N_3\} = -\phi + n \ , \qquad n = 0, 1, 2 \cdots \tag{5}$$

Substituting (3) and (4) in (2) we get:

$$2\alpha\zeta(N_3 - N_1) + (\zeta^2 - 1)(N_3 - N_1)^2 + Q - (N_3 - N_1)(N_3 + N_1) = S(S \pm 1) \tag{6}$$

Choosing the representation with $\phi = -S - 1$ we get

$$\begin{gathered} Q = S(S+1) \\ 2\alpha\zeta + N_3(\zeta^2 - 2) - N_1\zeta^2 = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

A tilt-transformation $(N_1, N_3) \rightarrow (\tilde{N}_1, \tilde{N}_3)$ by Nambu's /2/ method leads to

$$\tilde{N}_3\sqrt{1 - \zeta^2} + \alpha\zeta = 0 \tag{8}$$

Putting the eigenvalues (5) of $\tilde{N}_3$ into (8) we get

$$(S + 1 + n)\sqrt{1 - \zeta^2} + \alpha\zeta = 0 \quad ; \ n = 0, 1, 2, \cdots \tag{9a}$$

or in the usual form the Zommerfeld formula:

$$\zeta = \left(1 + \frac{\alpha^2}{(n + S)^2}\right)^{-1/2} \qquad n = 1, 2, 3 \cdots \tag{9b}$$

L i t e r a t u r e.

/I/. A.O.Barut and C.Fronsdal. Proc. Roy. Soc. 287, 532 (1965).

/2/. J.Nambu. Proc. of the 1967 Intern. Conf. on Particles and Fields.

Ответственный за выпуск В.Ф.ДМИТРИЕВ
П· дписано к печати 3.Ш.1970 г.
Усл. 0,5 п.л. , тираж 200 экз.
Заказ № 17 .Бесплатно, ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР. вг