

9.88

14

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

И Я Ф 25 - 70

А.М.Фридман

**УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОЙ СФЕРИЧЕСКИ-
СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ВРАЩАЮЩИХСЯ МАСС**

Новосибирск

1970

А.М.Фридман

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОЙ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ВРАЩАЮЩИХСЯ МАСС

АННОТАЦИЯ

Доказана устойчивость модели шарового скопления звезд относительно произвольных возмущений.

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
Физики СО АН СССР
ИНВ. № _____

1. Введение

В работе /1/ было получено уравнение малых колебаний сферически-симметричной системы вращающихся по круговым траекториям гравитирующих масс (рис.1) в случае, когда плотность системы падает к краю $\rho \sim 1/r^2$. Такой закон убывания плотности с радиусом хорошо согласуется с наблюдаемыми данными по шаровым скоплениям звезд ($n \sim 1/r^2 \div 1/r^3$) /2/.

Полученное в /1/ методом интегрирования по траекториям дифференциальное уравнение второго порядка для возмущенного потенциала (1) принадлежит к уравнениям класса Фукса, поскольку не имеет иррегулярных особых точек /3/. Коэффициенты этого уравнения суть дробно-линейные функции, причём степени полиномов числителей и знаменателей этих функций определяются азимутальным собственным числом ℓ . При $\ell = 2$ степени полиномов колеблются от 6 до 10. При возрастании ℓ степени возрастают.

Исследование уравнения (1), проведенное в §§ 2-5 настоящей работы методом Лапласа /3/, показало отсутствие регулярного решения, ограниченного в нуле и на бесконечности. В таком случае решение уравнения (1) с нужными свойствами в нуле и бесконечности может существовать только в особых точках уравнения. В заключении § 5 показано, что уравнение (1) имеет особые точки только при действительных значениях частоты ω , тем самым доказана устойчивость неоднородной системы, вращающейся по кривым траекториям масс.

Исследованию решений уравнения (1) в окрестностях особых точек посвящен § 6. Решения оказываются логарифмически расходящимися в этих точках и потому узлолокализованными в их окрестностях.

Несмотря на то, что решения локализованы вблизи особых точек, соответствующих действительным собственным значениям уравнения, нейтральные колебания, как показано в /1/, отсутствуют (затухают). В этом состоит принципиальное отличие реакции на малые возмущения неоднородной системы звезд в отличие от реакции аналогичной однородной системы /4/. Причины упомянутого различия обсуждаются в заключении работы /1/.

§ 2. Дифференциальное уравнение для лапласовской трансформанты

Запишем полученное в работе /1/ уравнение малых колебаний сферически-симметричной системы вращающихся по круговым траекториям гравитирующих масс, плотность которой падает к краю $\sim \frac{1}{r^2}$

$$\frac{d}{dz} \left(r^2 A \frac{d\chi_e}{dz} \right) - B \chi_e = 0 \quad (1)$$

где

$$A = 1 + \sum_{s=-\ell}^{\ell} |P_{s0}^{\ell}(0)|^2 \frac{\Omega^2}{\omega_s^2 - 2\Omega^2} \quad (2)$$

$$B = \ell(\ell+1) + \sum_{s=-\ell}^{\ell} |P_{s0}^{\ell}(0)|^2 \left\{ \frac{s^2 \Omega^2}{\omega_s^2 - 2\Omega^2} + \frac{s \Omega^3}{\omega_s(\omega_s^2 - 2\Omega^2)} \left[-6 + \frac{\omega_s^2}{\Omega^2} - 4 \frac{2\Omega^2 + s\Omega\omega_s}{\omega_s^2 - 2\Omega^2} \right] \right\} \quad (3)$$

$$|P_{s0}^{\ell}(0)|^2 = \frac{(\ell+s)!(\ell-s)!}{\left[\left(\frac{\ell+s}{2} \right)! \left(\frac{\ell-s}{2} \right)! \right]^2} \cdot 2^{-2\ell} \quad (4)$$

$$\omega_s = \omega - s\Omega$$

В (4) $(\ell-s)$ - чётно, для $(\ell-s)$ нечётных $|P_{s0}^{\ell}(0)|^2 = 0$.

Уравнение (1) исследуем с помощью метода Лапласа /5/. Введем обозначение $z = \omega r$. Поскольку уравнение (1) написано для случая $n(r) \sim \frac{1}{r^2}$, то из системы уравнений в нулевом приближении легко получить, что $\Omega = \Omega_c / r$, где $\Omega_c = \text{const}$. Тогда, перейдя в уравнение (1) от переменной r к комплексной переменной z , получим:

$$z^2 A(z^2) \frac{d^2 \chi}{dz^2} + [2zA(z^2) + z^2 \frac{dA(z^2)}{dz}] \frac{d\chi}{dz} - B(z^2) \chi = 0 \quad (5)$$

Рассмотрим вначале случай $\ell = 2$. В соответствии с (2), (3) получим следующие выражения для A и B^x :

$$A = \frac{z^6 - 13z^4 + 25z^2 - 10}{z^6 - 14z^4 + 28z^2 - 8} \quad (6)$$

$$B = 6 \frac{z^{10} - 27z^8 + 221z^6 - 602z^4 + 460z^2 - 72}{z^{10} - 28z^8 + 248z^6 - 704z^4 + 400z^2 - 64} \quad (7)$$

Перепишем коэффициенты уравнения (5) в виде:

$$A = \frac{\sum_{k=0}^3 a_k z^{2k}}{\sum_{k=0}^3 \alpha_k z^{2k}}; \quad \frac{\partial A}{\partial z} = 2z \cdot \frac{\sum_{k=0}^3 \beta_k z^{2k}}{\sum_{k=0}^3 \alpha_k z^{2k}}; \quad B = \frac{\sum_{k=0}^5 c_k z^{2k}}{\sum_{k=0}^5 \alpha_k z^{2k}} \quad (8)$$

После подстановки (8) в (5) и приведения к общему знаменателю получим:

$$z^2 \sum_{k=0}^{14} a_k z^{2k} \cdot \frac{d^2 \chi}{dz^2} + z \sum_{k=0}^{14} \beta_k z^{2k} \frac{d\chi}{dz} + \sum_{k=0}^{14} c_k z^{2k} \chi = 0 \quad (9)$$

Здесь были использованы обозначения:

$$\sum_{k=0}^{14} a_k z^{2k} = \sum_{k=0}^3 \alpha_k z^{2k} \cdot \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k z^{2k} \cdot \sum_{k=0}^5 c_k z^{2k}$$

$$\sum_{k=0}^{14} \beta_k z^{2k} = 2 \sum_{k=0}^3 \alpha_k z^{2k} \cdot \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k z^{2k} \cdot \sum_{k=0}^5 c_k z^{2k} + 2z^2 \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k z^{2k} \sum_{k=0}^5 c_k z^{2k} \sum_{k=0}^5 c_k z^{2k}$$

x) Заметим, что при $\ell = 2$ $|P_{s0}^{\ell}(0)|^2$ имеет два различных значения: $1/4$ ($s = 0$) и $3/8$ ($s = \pm 2$) (см. формулу (4)).

$$\sum_{k=0}^{14} C_k Z^{2k} = - \sum_{k=0}^5 C_k' Z^{2k} \cdot \sum_{k=0}^3 a_k'' Z^{2k} \cdot \sum_{k=0}^6 b_k'' Z^{2k} \quad (10)$$

Будем искать решение уравнения (9) в виде:

$$\chi(z) = \int_{\ell} v(z') e^{zz'} dz' \quad (11)$$

где: $v(z')$ — искомая функция z' и ℓ — искомый, не зависящий от Z , путь интегрирования. Умножая χ на Z^2 и интегрируя по частям, получим:

$$Z^2 \chi(z) = Z \int_{\ell} v(z') d e^{zz'} = Z \left[v(z') e^{zz'} \right]_{\ell} - \left[\frac{d v(z')}{d z'} e^{zz'} \right]_{\ell} + \int_{\ell} \frac{d^2 v(z')}{d z'^2} e^{zz'} dz'$$

где символ $[\psi(z')]_{\ell}$ обозначает приращение функции $\psi(z')$, когда z' описывает контур ℓ .

Проделявая аналогичные операции, нетрудно получить для любого K следующее соотношение:

$$Z^{2K} \chi(z) = Z^{2K-1} \left[v(z') e^{zz'} \right]_{\ell} - Z^{2K-2} \left[\frac{d v(z')}{d z'} e^{zz'} \right]_{\ell} + \dots - \left[\frac{d^{2K-1} v(z')}{d z'^{2K-1}} e^{zz'} \right]_{\ell} + \int_{\ell} \frac{d^{2K} v(z')}{d z'^{2K}} e^{zz'} dz' \quad (12)$$

Умножая $\frac{d\chi}{dz}$ на Z^{2K+1} , соответственно, имеем:

$$Z^2 \frac{d\chi(z)}{dz} = Z^{2K} \left[v(z') z' e^{zz'} \right]_{\ell} - Z^{2K-1} \left\{ \frac{d [v(z') z']}{d z'} e^{zz'} \right\}_{\ell} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{d^{2K} [v(z') z']}{d z'^{2K}} e^{zz'} \right\}_{\ell} - \int_{\ell} \frac{d^{2K+1} [v(z') z']}{d z'^{2K+1}} e^{zz'} dz' \quad (13)$$

Аналогично, умножая $\frac{d^2 \chi}{d z^2}$ на Z^{2K+2} , и интегрируя по частям, получим:

$$Z^{2K+2} \frac{d^2 \chi}{d z^2} = Z^{2K+1} \left[v(z') z'^2 e^{zz'} \right]_{\ell} - Z^{2K} \left\{ \frac{d}{d z'} [v(z') z'^2] e^{zz'} \right\}_{\ell} + \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{d^{2K+1} [v(z') z'^2] e^{zz'}}{d z'^{2K+1}} \right\}_{\ell} + \int_{\ell} \frac{d^{2K+2} [v(z') z'^2] e^{zz'}}{d z'^{2K+2}} dz' \quad (14)$$

Поставим прежде всего условие, чтобы

$$\left\{ \frac{d^m [v(z') z'^n] e^{zz'}}{d z'^m} \right\}_{\ell} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 16; n = 0, 1, 2) \quad (15)$$

При подстановке выражений (12) - (14) в левую часть уравнения (9) внеинтегральные члены будут равны нулю в силу (15), и мы приведем уравнение (9) к виду:

$$\sum_{k=0}^{14} \left\{ a_k \int_{\ell} \frac{d^{2k+2} [v(z') z'^2] e^{zz'}}{d z'^{2k+2}} dz' - b_k \int_{\ell} \frac{d^{2k+1} [v(z') z'] e^{zz'}}{d z'^{2k+1}} dz' + c_k \int_{\ell} \frac{d^{2k} v(z') e^{zz'}}{d z'^{2k}} dz' \right\} = 0 \quad (16)$$

Оно будет наверно удовлетворено, если определить функцию из уравнения

$$\sum_{k=0}^{14} \frac{d^{2k}}{d z'^{2k}} \left\{ a_k \frac{d^2 [v(z') z'^2]}{d z'^2} - b_k \frac{d [v(z') z']}{d z'} + c_k v(z') \right\} = 0 \quad (17)$$

которое после незначительных преобразований окончательно выглядит так:

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{d^{2k}}{dz'^{2k}} \left[a_k z'^2 \frac{d^2 v(z')}{dz'^2} + (4a_k - b_k) z' \frac{dv(z')}{dz'} + (2a_k + c_k - b_k) v(z') \right] = 0 \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет регулярную особую точку $z' = 0$. В окрестности этой точки решение уравнения естественно искать в виде обобщенного степенного ряда^{x)}.

$$v(z') = z'^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} z'^{2n} \quad (19)$$

где ρ находится из определяющего уравнения.

§ 3. Контур интегрирования.

Контур интегрирования ℓ выбирается таким образом, чтобы он удовлетворял следующим трём условиям:

1) условию (15); 2) должен обходить особую точку уравнения (18), 3) при $z' \rightarrow \infty$ подынтегральная функция (16) должна обращаться в нуль.

Перечисленным выше трем условиям удовлетворяет контур, имеющий концы в точке $\operatorname{Re} z' = -\infty$ и обходящий точку $z' = 0$ в положительном направлении (см. рис. 2а). При этом $\arg z$ должен находиться в секторе

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \quad (20)$$

Если же $\arg z$ находится в другом секторе,

x) Поскольку коэффициенты дифференциального уравнения (18) зависят только от чётных степеней z , коэффициенты при нечётных степенях z в (19) d_{2n+1} тождественно обращаются в нуль.

то означенный контур должен быть повернут на угол $\psi = -\pi$ (рис. 2б).

Прежде всего покажем, что на выбранном контуре функция $v(z') \exp(zz')$ обращается в нуль при $\operatorname{Re} z' \rightarrow -\infty$ (и соответствующем $\arg z'$). Для этого в исходном уравнении (9) сделаем замену

$$z = \frac{1}{t} \quad (21)$$

Получим

$$t^2 \chi'' - \frac{A'(1/t)}{A(1/t)} \chi' - \frac{B(1/t)}{A(1/t)} \chi = 0 \quad (22)$$

Здесь "штрих" - производная по t .

$$\frac{dA}{dt} = 2t \frac{80t^8 - 72t^6 + 8t^4 + 6t^2 - 1}{64t^{12} - 448t^{10} + 1008t^8 - 800t^6 + 252t^4 - 28t^2 + 1}$$

$$\frac{B}{A} = 6(576t^{16} - 5696t^{14} + 12704t^{12} - 25136t^{10} + 15292t^8 - 4460t^6 + 627t^4 - 41t^2 + 1) \times (640t^{16} - 5600t^{14} + 17872t^{12} - 25344t^{10} + 16032t^8 - 4638t^6 + 637t^4 - 41t^2 + 1)^{-1} \quad (23)$$

Перепишем уравнение (22) в соответствии с явным видом его коэффициентов

$$t^2 \chi'' - 2t \frac{\sum_{k=0}^4 b_k' t^{2k}}{\sum_{k=0}^6 b_k'' t^{2k}} \chi' - 6 \frac{\sum_{k=0}^8 c_k' t^{2k}}{\sum_{k=0}^8 c_k'' t^{2k}} \chi = 0$$

Приведя к общему знаменателю, окончательно получим:

$$t^2 \sum_{k=0}^{14} a_k t^{2k} \cdot \chi'' + t \sum_{k=0}^{12} b_k t^{2k} \chi' + \sum_{k=0}^{14} c_k t^{2k} \cdot \chi = 0 \quad (24)$$

где

$$\sum_{k=0}^{14} a_k t^{2k} = \sum_{k=0}^6 b_k'' t^{2k} \cdot \sum_{k=0}^8 c_k'' t^{2k}$$

$$\sum_{k=0}^{12} b_k t^{2k} = -2 \cdot \sum_{k=0}^4 b_k' t^{2k} \cdot \sum_{k=0}^8 c_k'' t^{2k} \quad (25)$$

$$\sum_{k=0}^{14} c_k t^{2k} = -6 \cdot \sum_{k=0}^8 c_k' t^{2k} \cdot \sum_{k=0}^6 b_k'' t^{2k}$$

Выбирая решение уравнения (24) в окрестности регулярной особой точки $t = 0$ в виде обобщенного ряда

$$\chi(t) = t^p \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} t^{2n} \quad (26)$$

находим, что одно из двух частных решений при $t \rightarrow 0$ обращается в нуль, как t^2 х).

Нахождение двух асимптотик $\chi(z)$ при $z \rightarrow \infty$ (одна оказывается расходящейся, другая — конечная) было сделано нами "попутно" и, вообще говоря, не имеет никакого отношения к доказательству зануления функции $v(z') \exp(zz')$ на контуре при $\text{Re} z' \rightarrow -\infty$. Однако форма уравнения в виде (24) позволяет найти решения для $v(z')$ непосредственно в окрестности бесконечно удаленной точки.

Ищем решение уравнения (24) методом Лапласа:

х) Определяющее уравнение в этом случае даёт два значения корня $p_1 = 2, p_2 = -3$.

$$\chi(t) = \int_{\tilde{L}} v(t') e^{zt'} dt' \quad (27)$$

где \tilde{L} — прежний контур. В результате подстановки (27) в (24) при условии (25) получим вновь уравнение (18), в котором заменили $z' = 1/t'$. В окрестности точки $t' = 0$ ищем решение в виде (26), заменив предварительно t на t' . Корни определяющего уравнения в этом случае будут следующие:

$$p_1 = -\frac{3}{2} + \nu, p_2 = -\frac{3}{2} - \nu, p_3 = 0, p_4 = 1, p_5 = 2, \dots, p_{30} = 27; \nu = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{5}} \quad (28)$$

Тогда в соответствии с /3/, /5/ частные решения в окрестности $t' = 0$ имеют вид (см. Приложение):

$$\begin{aligned} v_1(t') &= t'^{\nu - 3/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}^{(1)} t'^{2n} \\ v_2(t') &= t'^{-\nu - 3/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}^{(2)} t'^{2n} \\ v_3(t') &= t'^{27} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}^{(3)} t'^{2n} \\ v_4(t') &= t'^{26} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}^{(4)} t'^{2n} \\ &\dots \\ v_{30}(t') &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}^{(30)} t'^{2n} \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, в окрестности точки $z' = \infty$ все решения для лапласовской трансформации $v(z')$, кроме двух, оказываются ре-

гулярными. Как известно при любом n и $\operatorname{Re} z > 0$

$$\lim_{\operatorname{Re} z' \rightarrow -\infty} z^n e^{zz'} = 0$$

что и доказывает обращение в нуль на выбранном контуре функции $v(z') \exp(zz')$ при $\operatorname{Re} z' \rightarrow -\infty$.

Проведем разрезы в плоскости z' : 1) по оси $\operatorname{Re} z' < 0$ при условии, если $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$; 2) по оси $\operatorname{Re} z' > 0$ в случае, когда $\arg z$ находится в другом секторе. Теперь функции $v(z')$ на плоскости z' будут однозначными и равенство (15) таким образом выполняется.

Следовательно, выбранный нами контур ℓ удовлетворяет всем необходимым признакам.

§ 4. Исследование решения.

Как следует из (29), все частные решения $v(t')$, кроме первых двух, оказываются в нуле регулярными. Тогда по теореме Коши /3/ $\chi_i(t) = \int_{\ell} v_i(t') e^{tt'} dt' = 0$ для всех i , кроме $i = 1, 2$.

Вычислением отличных от нуля решений мы сейчас и займемся.

Итак, для конечных z , включая $z = 0$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(t) &= \int_{\ell} t'^{\nu-3/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}^{(1)} t'^{2n} \cdot e^{tt'} dt' \\ \chi_2(t) &= \int_{\ell} t'^{-\nu-3/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}^{(2)} t'^{2n} \cdot e^{tt'} dt' \end{aligned} \right\} (30)$$

Нам предстоит исследовать эти решения и показать, что оба они не остаются конечными во всей комплексной плоскости z . Прежде заметим, что контур ℓ удовлетворяет всем требованиям, сформулированным выше, для всех t , кроме точки $t = 0$. В даль-

нейшем эту точку из рассмотрения мы исключаем.

Рассмотрим второе решение. Поскольку бесконечно удаленная точка является регулярной особой точкой уравнения для лапласовской трансформанты $v(t')$, при $tt' \rightarrow -\infty$ подынтегральная функция будет обращаться в нуль экспоненциально. Вследствие этого основной вклад в интеграл будет вносить область в окрестности точки $t' = 0$. Как легко видеть, в окрестности этой точки второе решение расходится^{x)}.

Итак, второе решение оказалось расходящимся степенным образом в окрестности $z = 0$. Поскольку решение в нулевом приближении $\chi_0(z)$ расходится в нуле логарифмически (см. /7/), второе решение в окрестности точки $z = 0$ перестает удовлетворять необходимому условию линейного приближения $\chi_1 \ll \chi_0$ и потому должно быть отброшено.

Покажем, что первое решение (30) расходится при $z \rightarrow \infty$. Разность $\nu - 3/2 \approx 0,9 > 0$ и потому нам следует оценить ряд $\sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}^{(1)} t'^{2n}$ во всей области t' .

Обратимся вновь к исходному уравнению (18). Будем искать решение этого уравнения в виде:

$$v(t') = t'^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} d_n t'^{2n} \quad (32)$$

Последовательность процедуры оценки ряда (32) во всей плоскости t' будет состоять в следующем. Внутри радиуса сходимости ряда вычислим коэффициенты d_n с той необходимой точностью, которая требуется для нахождения аналитической функции, асимптотическое разложение которой представляется рядом (32). Найденную таким способом функцию аналитически продолжим за область сходимости ряда (32), устремив аргумент $t' \rightarrow \infty$.

^{x)} Поскольку в окрестности $t' = 0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}^{(1)} t'^{2n}$ сходится равномерно, второе решение можно непосредственно вычислить, воспользовавшись известной связью написанного контурного интеграла с Γ -функцией /3/.

$$\int_{\ell} t'^{-\nu-3/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}^{(1)} t'^{2n} \cdot e^{tt'} dt' = t^{\nu} (e^{-2\pi\nu i} - 1) e^{\pi\nu i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n d_{2n}^{(1)} \Gamma(-\nu+2n) \cdot t^{-2n} \quad (31)$$

Отсюда видно, что при $t \rightarrow \infty$ (т.е. при $z \rightarrow 0$) правая часть равенства (31) расходится.

После проведения дифференцирования в уравнении (18) его можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \left[\prod_{m=0}^{14} (p+2n-2m) t^{p+2n-28} \cdot d_{14}^n + \prod_{m=0}^{13} (p+2n-2m) t^{p+2n-26} \cdot d_{13}^n + \prod_{m=0}^{12} (p+2n-2m) t^{p+2n-24} \cdot d_{12}^n + \dots + t^{p+2n} \cdot d_0^n \right] = 0 \quad (33)$$

где

$$d_k^n = (p+2n) [(p+2n)a_k + 3a_k - b_k] + 2a_k + c_k - b_k$$

Приравнявая нулю коэффициент при младшей степени t' , находим определяющее уравнение с корнями $p_1 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\quad}$;

$$p_2 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\quad}$$

Зануляя коэффициенты при последующих степенях t' , находим d_1, d_2, d_3, \dots , как функции d_0 , играющую роль начального условия, и коэффициентов уравнения.

$$d_1 = -\frac{1}{p+2} \cdot \frac{d_{13}^0}{d_{14}^1} d_0$$

$$d_2 = \frac{d_0}{(p+2)(p+4)} \cdot \left(\frac{d_{13}^0}{d_{14}^1} d_{13}^1 - d_{14}^2 \right) \cdot \frac{1}{d_{14}^2} \quad (35)$$

$$d_3 = -\frac{d_0}{(p+2)(p+4)(p+6)} \cdot \frac{1}{d_{14}^3} \left[d_{11}^0 - \frac{d_{13}^0}{d_{14}^1} d_{12}^1 + \frac{d_{13}^2}{d_{14}^2} \left(\frac{d_{13}^0}{d_{14}^1} d_{13}^1 - d_{14}^2 \right) \right]$$

Легко видеть, что при больших n величина в квадратных скобках, умноженная на $1/d^n$, стремится к A_n где A_n — конечное число.

$$d_n = \frac{(-1)^n d_0 |A_n|}{(p+2)(p+4) \dots (p+2n)} \quad (36)$$

Положим $d_0 = 1$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n t'^{2n} = |A|_{\min} \cdot \cos t' + F(t') \quad (37)$$

где $F(t')$ — некоторая функция t' , которая, вообще говоря, расходится вне области сходимости ряда в левой части (37).

Из (37) имеем:

$$\int_e^{t'^{-3/2+\nu}} \sum_k d_k t'^{2k} \cdot e^{t't'} dt' = |A|_{\min} \int_e^{t'^{-3/2+\nu}} \cos t' \cdot e^{t't'} dt' + \int_e^{t'^{-3/2+\nu}} F(t') e^{t't'} dt' \quad (38)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (38) расходится при $t' \rightarrow 0$ (т.е. при $z \rightarrow \infty$) как $t'^{-3/2+\nu} = z^{\nu-3/2} \approx z^{1,5}$.

Таким образом, первое решение (30) при $z \rightarrow \infty$ расходится сильнее чем $z^{1,5}$. Напомним, что одна из асимптотик решения исходного дифференциального уравнения при $z \rightarrow \infty$ приводит к z^3 .

§ 5. Случай произвольных ν .

В § 4 было показано, что единственное ограниченное в точке $t' = 0$ решение при аналитическом продолжении $t' \rightarrow \infty$ "сшивается" с расходящимся решением на бесконечности. При этом мы аналитически продолжали решение с иррациональным значением ρ . Значительно проще иметь дело с целыми значениями ρ . Покажем, что с увеличением числа ν степень расходимости решений на границах возрастает.

Прежде всего заметим, что структура определяющего уравнения остается неизменной при любом ν . Меняются лишь значения коэффициентов a, b, c . Множитель $\prod(\rho-n)$ всегда оп-

ределяет целые p , поэтому основной интерес представляет уравнение

$$p^2 + (3 - b/a)p + 2 - b/a + c/a = 0 \quad (39)$$

Согласно (10)

$$b/a = 2; \quad c/a = -\frac{a''}{a'} \cdot \frac{c'}{c''}, \quad (40)$$

где коэффициенты, стоящие в правых частях равенств (40), суть коэффициенты при старших членах в (8). Для удобства их определения перепишем A из (2) в следующем виде:

$$A = 1 + |P_0^e|^2 \frac{1}{z^2 - 2} + 2 \sum_{s=2}^{\ell} |P_s^e|^2 \frac{z^2 + s^2 - 2}{z^4 - 2(s^2 + 2)z^2 - (s^2 - 2)^2}; \quad (41)$$

($\ell = 2m, m = 1, 2, 3, \dots$)

$$A = 1 + 2 \sum_{s=1}^{\ell} |P_s^e|^2 \frac{z^2 + s^2 - 2}{z^4 - 2(s^2 + 2)z^2 - (s^2 - 2)^2}; \quad (42)$$

($\ell = 2m + 1, m = 1, 2, 3, \dots$)

Аналогично следует поступить с B - переписать его отдельно для чётных и нечётных ℓ . Из (41), (42) уже видно следующее. Поскольку A имеет свободный член, равный 1, а отношение a'/a'' есть отношение коэффициента при старшей степени числителя A к соответствующему коэффициенту в знаменателе, то это отношение равно 1. Аналогично для B (см. (3)) отношение $c'/c'' = \ell(\ell + 1)$. С учётом этого из (39) найдем:

$$p_1 = \ell; \quad p_2 = -\ell - 1. \quad (43)$$

Все дальнейшие рассуждения, приведенные в § 4, естествоно, остаются прежними.

Наконец, можно показать, что корни уравнения $A = 0$ суть

действительные при произвольном ℓ . Предположим противное.

а) $z^2 < 0$ (z - чисто мнимое). В этом случае, как легко видеть, числитель A оказывается знакопостоянным^{х)}, поэтому равенство нулю A невозможно.

б) $z^2 = x + iy$ (z - комплексное, $z = z_0 + iy$). Приравняв порознь нулю действительную и мнимую части A и воспользовавшись тем, что по доказанному в а) $z_0 \neq 0$, получим $y = 0$.

На этом мы заканчиваем доказательство отсутствия решений уравнения (1) на комплексной плоскости z .

§ 6. Спектр затухающих колебаний

Итак, исследуемое уравнение (9) не имеет в комплексной плоскости z аналитических решений, конечных при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$, кроме тривиального. Заметим, однако, что кроме регулярных особых точек $z = 0$ и $z = \infty$, уравнение (9) имеет регулярные особые точки - корни уравнения $A = 0$ (и полюса B). Как показано выше, нули A и полюса B лежат на действительной оси, что соответствует вещественным ω .

Исследуем поведение решений уравнения (1) на действительной оси в окрестности особых точек его коэффициентов, т.е. полюсов B и точек, где $A = 0$. Дискриминант кубического (относительно z^2) уравнения $A = 0$ отрицателен, поэтому уравнение $A = 0$ имеет три различных действительных корня (при $\ell = 2$).

Обозначим их через d_1, d_2, d_3 . Тогда числитель A можно представить в виде: $f(z) \prod_{i=1}^3 (z - d_i)$, или после простых преобразований:

$$[(z - d_1)^3 + (\beta_n + \beta_m)(z - d_1)^2 + \beta_n \beta_m (z - d_1)] \cdot f(z)$$

х) При произвольном ℓ сохраняется свойство знакопеременности полиномов, стоящих в числителе и знаменателе A , как это видно при $\ell = 2$ в выражении (6). В результате перед чётными степенями z^2 сохраняется знак "-", а перед нечётными "+".

где $\beta_n = d_i - d_n$; $\beta_m = d_i - d_m$; ($m \neq n \neq i$); $f(z)$ - регулярная в окрестности $z = d_i$ функция.

Соответственно, произведение z^2 на числитель A можно представить в виде:

$$[(z-d_i)^5 + a_4(z-d_i)^4 + a_3(z-d_i)^3 + a_2(z-d_i)^2 + a_1(z-d_i)] f(z) \quad (44)$$

где

$$a_4 = 2d_i + \beta_n + \beta_m; \quad a_3 = d_i^2 + \beta_n\beta_m + 2d_i(\beta_n + \beta_m);$$

$$a_2 = d_i^2(\beta_n + \beta_m) + 2d_i\beta_n\beta_m; \quad a_1 = d_i^2\beta_n\beta_m.$$

В окрестности особой точки $z = d_i$ как знаменатель B , так и произведение числителя B на знаменатель A можно представить в виде следующего ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} (z-d_i)^{2k} \quad (45)$$

Решение уравнения (1) в окрестности особой точки $z = d_i$ пишем в виде обобщенного степенного ряда

$$\chi = (z-d_i)^p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (z-d_i)^{2k} \quad (46)$$

Подставляя в (1) выражение для χ (46) и его производные, а также используя представления для коэффициентов уравнения (44) и (45) получим определяющее уравнение: $p^2 = 0$. Следовательно, два линейно независимых решения уравнения (1) в окрестности нулей A $z = d_i$ имеют вид /3/, /5/:

$$\chi_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}^{(1)} (z-d_i)^{2k} \quad (47)$$

$$\chi_2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}^{(2)} (z-d_i)^{2k} + \chi_1 \ln(z-d_i)$$

Второе решение $\chi_2(z)$ (47) логарифмически расходится в точках $z = d_i$, являющихся нулями A . Покажем, что в окрестности полюсов B оба решения являются регулярными.

Аналогичные вычисления в окрестности полюсов B ($z = \gamma_i$) приводят к следующему определяющему уравнению:

$$p(p-1) = 0 \quad (48)$$

т.е. $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ и решения в окрестностях этих точек являются регулярными:

$$\chi_1 = (z-\gamma_i) \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (z-\gamma_i)^k \quad (49)$$

$$\chi_2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (z-\gamma_i)^k + C \chi_1 \ln(z-\gamma_i)$$

Итак, проведенное выше исследование решений уравнения (1) при $\ell = 2$ показало, что они существуют (и расходятся) только в трех точках $z = d_i$ (для $\ell = 2$).

Как показано в работе /1/, в этих точках собственные функции исходного уравнения имеют затухающий множитель.

§ 7. Заключение

Итак, доказана устойчивость шарового скопления звезд в случае, когда дисперсия радиальной скорости звезд скопления пренебрежимо мала. Учет последней содержится в работе /7/, где получены коллективные нейтральные колебания для однородной системы. Как указано в /4/, функция распределения $f_0(r, \vec{v}) \sim n_0(r) \delta(v_r) \delta(v_\perp - V_0)$ аналогична функции распределения холодной неоднородной плазмы, колебания в которой, как известно, затухают степенным образом. Нетрудно убедиться в том, что подобный характер затухания имеет место в данной гравитирующей системе. Однако существует естественный способ регуляризации логарифмической расходимости решения и определения декремента затухания. Он состоит в введении эффективной частоты парных столкновений звезд, что определяется величиной меньшей обратного времени существования шаровых скоплений. Тогда, как показано в /8/, в резонансных точках имеет место всегда затухание колебаний как в

случае однородной плотности /4/, так в системах с неоднородной плотностью (см. также /9/). Поскольку декремент затухания мал, колебания можно практически считать незатухающими.

Не исключено, что подобный характер колебаний объясняет "странности" в спектрах квазар

Автор благодарит А.З.Паташинского, В.Р.Смилянского, А.И.Янушаускаса за обсуждения.

Приложение

Напомним причину, вследствие которой частные решения дифференциального уравнения содержат логарифмы, если разности корней соответствующего определяющего уравнения суть целые числа. Для этого воспроизведем процедуру нахождения неопределенных коэффициентов ряда (26). После подстановки решения (26) в уравнение (18) приравняем нулю почленно коэффициенты перед различными степенями t^i . Для степени t^{p-23} получим определяющее уравнение, для следующей степени t^{p-25} имеем:

$$\prod_{n=0}^{25} (p-n) \left\{ d_2 (p+2)(p+1) [(p+2)(p+1) + (4 - \frac{b_{24}}{a_{24}})(p+1) + (2 - \frac{b_{24}}{a_{24}} + \frac{c_{14}}{a_{24}})] + \frac{d_0}{a_{24}} [p(p-1) + (4 - \frac{b_{13}}{a_{13}})p + (2 - \frac{b_{13}}{a_{13}} + \frac{c_{13}}{a_{13}})] \right\} = 0 \quad (II.1)$$

Для степени t^{p-23+m} получаем:

$$\prod_{n=0}^{27-m} (p-n) [d_m (p+m)(p+m-1) F(p+m) + Q_m(d_0, d_1, \dots, d_{m-1})] = 0 \quad (II.2)$$

$$m = 2, 4, \dots, 2k, \dots$$

Через $Q_m(d_0, d_1, \dots, d_{m-1})$ обозначен однородный полином первой степени от аргументов d_0, d_1, \dots, d_{m-1} ;

$$F(p+m) = (p+m)(p+m-1) + (4 - \frac{b_{24}}{a_{24}})(p+m-1) + 2 - \frac{b_{24}}{a_{24}} + \frac{c_{14}}{a_{24}} \quad (II.3)$$

Корни полинома $F(\rho+m)$ при $m=0$ определили два значения $\rho : -\frac{3}{2} + \nu$; $-\frac{3}{2} - \nu$. В случае, если при каком-либо значении m $F(\rho+m) = 0$, то в одном из двух частных решений, соответствующих значениям ρ и $\rho' = \rho+m$ появляется логарифм. Однако, если одновременно обращается в нуль полином Q_m (или, что аналогично, весь коэффициент перед степенью $z^{\rho-28+m}$), то логарифм отсутствует. Именно по этой причине отсутствует логарифм в частных решениях уравнения Бесселя с полуцелым индексом /5, 6/. Множитель $\prod_{n=0}^{m-1} (\rho-n)$ обращает тождественно в нуль выражение (П.2) при целых значениях корней определяющего уравнения $\rho \leq 27-m$. Коэффициент d_m для $\rho > 27$ уже определяется. Заметим при этом, что ни при каких целых значениях корней определяющего уравнения условие $F(\rho+m) = 0$ не выполняется в силу того, что корни полинома $F(\rho+m)$ суть иррациональные числа. Поскольку условие $F(\rho+m) = 0$ является необходимым и достаточным условием появления в решениях логарифма /6/, отсутствие последнего в решениях (29) доказано.

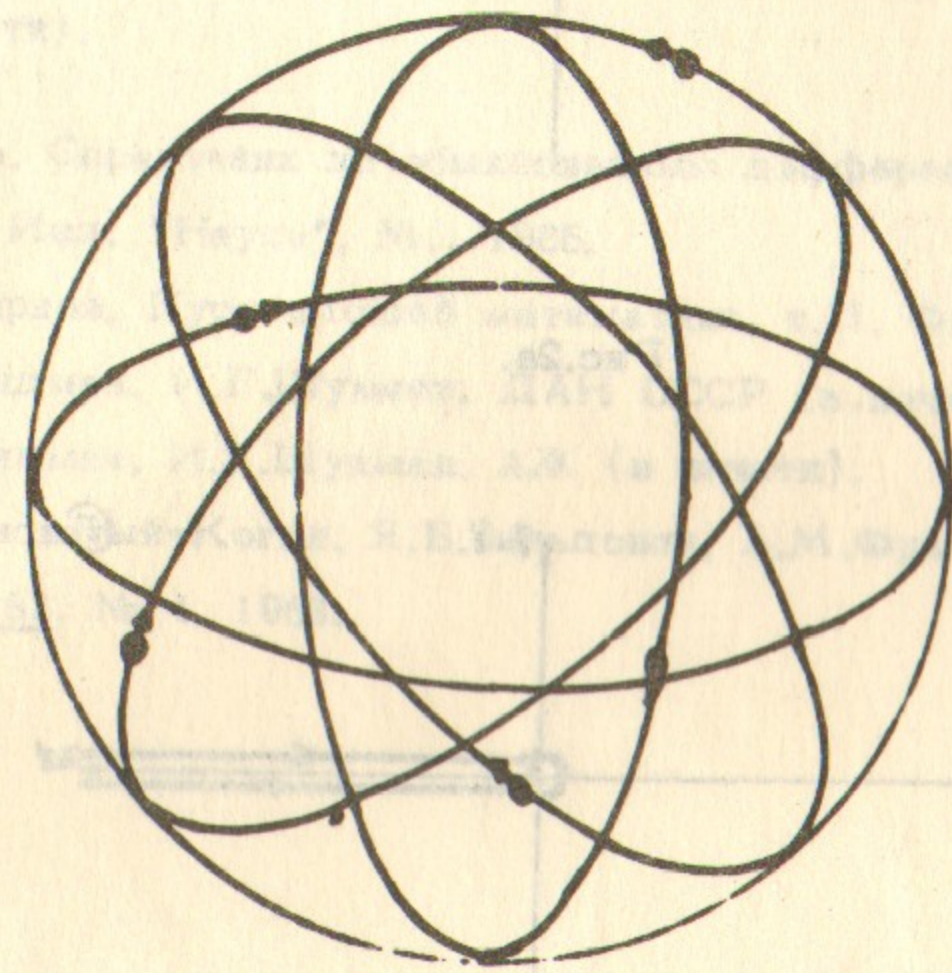


Рис.1

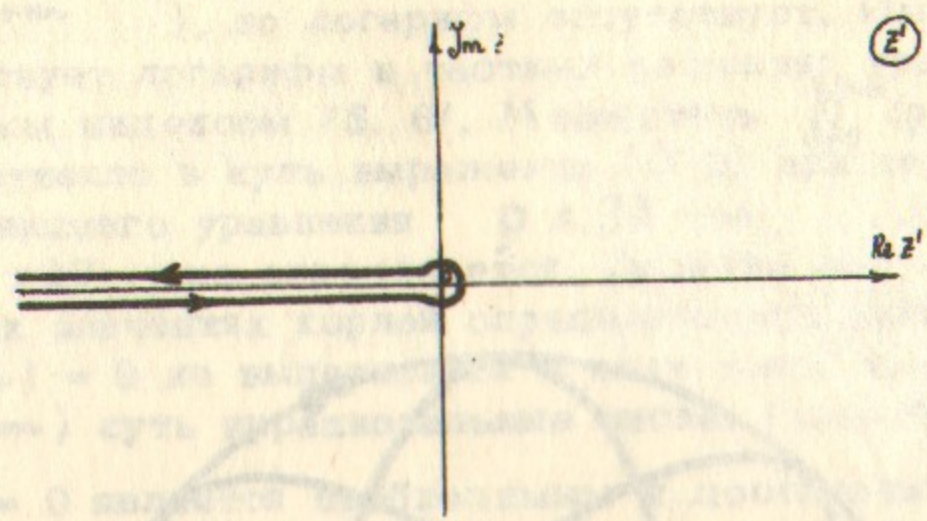


Рис.2а.

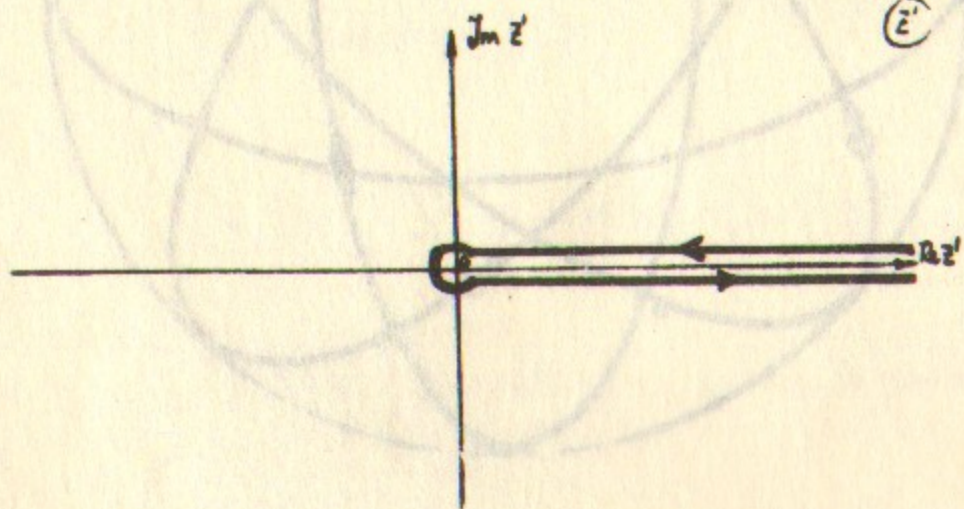


Рис.2б.

Л и т е р а т у р а

1. В.С.Сынах, А.М.Фридман, И.Г.Шухман. Астрофизика (в печати).
2. Н.В.Саузер. *Handbuch der Physik, Band LIII, Astrophysik IV: Sternsysteme, Berlin, 1959.*
3. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, т.Ш, ч.2, Физматгиз, 1956.
4. А.Б.Михайловский, А.М.Фридман, Я.Г.Эпельбаум, ЖЭТФ (в печати).
5. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд. "Наука", М., 1965.
6. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, т.П, Физматгиз, 1956.
7. А.М.Фридман, И.Г.Шухман. ДАН СССР (в печати).
8. А.М.Фридман, И.Г.Шухман. АЖ (в печати).
9. Г.С.Бисноватый-Коган, Я.Б.Зельдович, А.М.Фридман, ДАН СССР, 182, № 4, 1968.

1. В.С. Гуров, А.М. Фридман, Н.Т. Шухман, Астрономия (в печати).

2. Н.А. Гуров, Н.Т. Шухман, Астрономия, М., 1988.

3. В.С. Гуров, А.М. Фридман, Н.Т. Шухман, Астрономия, М., 1988.

4. В.С. Гуров, А.М. Фридман, Н.Т. Шухман, Астрономия, М., 1988.

5. В.С. Гуров, А.М. Фридман, Н.Т. Шухман, Астрономия, М., 1988.

6. В.С. Гуров, А.М. Фридман, Н.Т. Шухман, Астрономия, М., 1988.

7. В.С. Гуров, А.М. Фридман, Н.Т. Шухман, Астрономия, М., 1988.

8. В.С. Гуров, А.М. Фридман, Н.Т. Шухман, Астрономия, М., 1988.

9. В.С. Гуров, А.М. Фридман, Н.Т. Шухман, Астрономия, М., 1988.

Ответственный за выпуск А.М. ФРИДМАН
 Подписано к печати 6. V. 70г.
 Усл. 1 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно. ПРЕПРИНТ
 Заказ № 25

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, н.в.