

И  
И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р

И Я Ф 44 - 70

Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский

ДИНАМИКА ПОЛЯРИЗАЦИИ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ  
СПИНОВЫХ РЕЗОНАНСОВ

Новосибирск

1970



Ya.S.Derbenev, A.M.Kondratenko, A.N.Skrinsky

THE PARTICLE POLARIZATION DYNAMICS  
NEAR THE SPIN RESONANCES

Abstract

In the work reported here the influence of particle deviations from the equilibrium orbit to spin motion in the storage ring is investigated. The methods and results of works /1-6/ at the case of an arbitrary closed orbit /7/ are generalized here. In addition to resonances of the first approximation the resonances of higher orders are considered. The case of overlapped resonances is also considered.

The main part of the work is devoted to resonance crossing. The general solution of the single-crossing problem is given. On this base the periodical crossing problem has been raised and solved using the general character of the spin motion in periodical field/7/.



## СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
1. В в е д е н и е . . . . .	3
2. Основные уравнения . . . . .	4
3. Резонансы первого приближения . . . . .	8
4. Резонансы высших приближений . . . . .	11
5. Модуляционные резонансы . . . . .	15
6. Однократное прохождение резонанса . . . . .	17
7. Периодические прохождения . . . . .	22
8. Быстрые прохождения с произвольной периодической зависимостью . . . . .	27
9. Прохождение резонансов с частотой обращения $\nu = K$ . . . . .	29
Приложение 1 . . . . .	32
Приложение 2 . . . . .	33

### 1. В в е д е н и е

Настоящая работа посвящена изучению динамики поляризации частиц вблизи спиновых резонансов. Как известно /1-7/, движение спина частицы в накопителе становится неустойчивым в случаях, когда частота прецессии спина на равновесной траектории частицы близка к какой-либо комбинации из частот орбитального движения. При этом, вследствие разброса траекторий частиц, может существенно уменьшиться начальная степень поляризации пучка. Это явление опасно для экспериментов с поляризованными пучками; с другой стороны, его можно использовать для преднамеренной деполаризации.

В работе рассматриваются стационарные резонансы и прохождение резонансов. Существует значительное число работ /1-6/, в которых исследовалась динамика поляризации вблизи резонансов, когда невозмущенное движение спина представляет собой прецессию вокруг аксиальной оси (плоская равновесная орбита).

В данной работе сделано обобщение на случай произвольной замкнутой орбиты, когда направление оси прецессии спина равновесной частицы является периодической функцией азимута /7/. При этом вся методика и качественные результаты работ /1-6/ без существенных изменений переносятся и на общий случай. Кроме резонансов первого приближения, впервые рассмотрены резонансы высших порядков.

В разделе 5 рассмотрен случай перекрывающихся резонансов существенно разной мощности. При этом задача может быть решена модифицированным методом усреднения (модуляционные резонансы).

Основная часть работы посвящена изучению важной задачи о прохождениях резонанса. Однократное прохождение впервые рассматривалось в /1/ для постоянной скорости прохождения и специальном начальном условии поляризации по полю  $\nu$  вдали от резонанса. При произвольном начальном условии известен результат только для быстрого прохождения /1, 4-6/. Методами, примененными нами к задаче об однократном прохождении, получены результаты более общего характера, чем в /1/, и построено решение при произвольном начальном условии. На этой основе, используя общий характер движения спина в периодическом поле /7/ ,



поставлена и решена задача о периодическом прохождении резонанса. Её решение даёт возможность выяснить условия деполяризации пучка при периодических прохождении.

Важным методическим приложением такой задачи является случай сильного перекрывания резонансов в эквидистантном спектре возмущения.

## 2. Основные уравнения

Движение вектора спина описывается уравнением [7-9]:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = [\vec{W}_n, \vec{J}]$$

$$\vec{W}_n = (1 + \gamma \frac{q'}{q}) \frac{[\vec{v}, \vec{v}]}{v^2} - \frac{q}{\gamma} \frac{(\vec{H}\vec{v})\vec{v}}{v^2} + \frac{q}{\gamma^2 v^2} [\vec{v}, \vec{E}] \quad (2.1)$$

где  $q = q_0 + q' = \frac{e}{m} + q'$  - гиромагнитное отношение,  $q'$  - его аномальная часть,  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  ( $c=1$ ),  $\vec{v}$ ,  $\dot{\vec{v}}$  - скорость и ускорение частицы, движущейся в электромагнитном поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ . Специфической особенностью движения частиц в накопителях (ускорителях) является малость отклонений от равновесной траектории. Представим  $\vec{W}_n$  в виде суммы

$$\vec{W}_n = \vec{W}_s(\gamma_s, \theta) + \Delta \vec{W}$$

( $\theta$  - азимут частицы), где  $\vec{W}_s$  - значение  $\vec{W}_n$  на равновесной (замкнутой) орбите.  $\vec{W}_s$  обладает свойством периодичности:

$$\vec{W}_s(\gamma_s, \theta) = \vec{W}_s(\gamma_s, \theta + 2\pi)$$

В предыдущей работе [7] было показано, что решение уравнения на произвольной равновесной траектории

$$\dot{\vec{J}} \equiv \frac{d\vec{J}}{d\theta} = \frac{1}{\omega_s} [\vec{W}_s, \vec{J}] \quad (2.1a)$$

( $\omega_s$  - равновесная частота обращения частицы) представля

ется в виде:

$$\vec{J} = J_n \vec{n} + \frac{1}{2} (c \vec{\eta} + c^* \vec{\eta}^*)$$

где  $\vec{n}$ ,  $\vec{\eta}$ ,  $\vec{\eta}^*$  - собственные ортогональные решения (2.1a), обладающие свойствами: ( $\gamma_s = \text{const}$ ):

$$\vec{n}(\theta) = \vec{n}(\theta + 2\pi)$$

$$\vec{\eta}(\theta + 2\pi) = e^{-2\pi i \nu} \vec{\eta}(\theta) \quad (2.2)$$

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_1 + i \vec{\eta}_2 \quad \vec{\eta}_1^2 = \vec{\eta}_2^2 = \vec{n}^2 = 1$$

$$\nu = \text{const}$$

$2\pi\nu$  имеет смысл угла поворота спина за период движения частицы вокруг периодического решения  $\vec{n}$ . В подвижной периодической системе ортов

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$$

$$\vec{e}_1 + i \vec{e}_2 = \vec{\eta} e^{i\nu\theta} \equiv \vec{e} \quad (2.3)$$

спин удовлетворяет уравнению

$$\dot{\vec{J}} = [\vec{W}, \vec{J}] \quad (2.4)$$

$$\vec{W} = \nu \vec{n} + \vec{w} = \nu \vec{n} + \frac{\vec{W}_n}{\theta} - \frac{\vec{W}_s}{\omega_s}$$

(Роль времени играет азимут частицы  $\theta$ ). Уравнение (2.4) эквивалентно (2.1).

Спиновые уравнения в векторной форме, обладая геометрической наглядностью, являются системой дифференциальных уравнений третьего порядка. При их непосредственном решении иногда целесообразно уменьшить порядок уравнения, что возможно благодаря существованию интеграла движения  $\vec{J}^2 = \text{const}$ .



В некоторых случаях используются переменные проекция  $\vec{J}_\pi \equiv \vec{J} \vec{n}$  и фаза вращения  $\psi$  спина вокруг  $\vec{n}$ . Гамильтоновы уравнения для  $(\vec{J}_\pi, \psi)$  являются нелинейными.

Линейную систему второго порядка можно получить для двух комплексных переменных  $\chi_+, \chi_-$ , которые будем записывать в виде:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} \quad \chi^\dagger = (\chi_+^*, \chi_-^*) \quad (2.5)$$

Для спина  $S = \frac{1}{2}$  переменная  $\chi$  есть спиновая волновая функция, удовлетворяющая уравнению Шредингера:

$$i \dot{\chi} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \vec{W} \chi$$

$$\chi^\dagger \chi = 1 \quad (2.6)$$

где  $\vec{\sigma}$  - матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

причём

$$\chi^\dagger \vec{\sigma} \chi = \vec{J} \quad (\vec{J}^2 = 1) \quad (2.7)$$

Поскольку векторные уравнения линейны и не зависят от величины спина  $S$ , то преобразование (2.7) приведёт к уравнению (2.6) и для произвольного спина. Смысл переменных  $\chi$  следующий:  $|\chi_+|^2 - |\chi_-|^2 = J_z$ , а разность фаз  $\chi_-$  и  $\chi_+$  есть фаза  $\psi$  прецессии спина вокруг оси  $\vec{z}$ .

Заметим, что матрица вращения  $O(\theta)$

$$\vec{J}(\theta) = O(\theta) \vec{J}(0) \quad (2.8)$$

даёт знание не только  $\langle \vec{S} \rangle = \vec{J}(\theta)$ , но и всей физической информации. С помощью  $O(\theta)$  волновая функция произвольного спина  $\chi_s(\theta)$  записывается в виде:

$$\chi_s(\theta) = e^{-i \vec{S} \vec{L}(\theta)} \chi_s(0)$$

где  $\vec{L}(\theta)$  - вектор угла поворота (2.8).

Уравнение (2.6) в случае произвольного спина  $S$  можно интерпретировать как уравнение для волновых функций  $\chi_a$  ( $a = 1, 2 \dots 2S$ )  $2S$  независимых частиц, из которых можно формально составить систему со спином  $S$  [16].

Возможность перехода от векторных уравнений к "уравнениям Паули" (2.6) в действительности не имеет отношения к квантовой природе спина. Преобразование (2.7), вообще говоря, осуществляет спинорное представление ранга 1 группы вращений в трёхмерном пространстве и может применяться для описания вращения векторов любой природы.

В комплексных переменных просты формулы периодического решения для спина, при движении в полях с периодической зависимостью  $\vec{W}(\theta)$ , полученные в [7] для уравнений в векторной форме. Пусть известна матрица  $\Lambda$ , переводящая решение при  $\theta = 0$   $\chi_0$  через период  $T$ :

$$\chi_T = \Lambda \chi_0$$

В силу унитарности ( $\Lambda^\dagger \Lambda = I$ ) матрица  $\Lambda$  представляется в виде:

$$\Lambda = e^{-i\pi \vec{\sigma} \vec{n}_0 \nu} = \cos \pi \nu - i \vec{\sigma} \vec{n}_0 \sin \pi \nu \quad (2.9)$$

Смысл  $\vec{n}_0, \nu$  следующий:  $\vec{n}_0$  - направление, вокруг которого нужно повернуть на угол  $2\pi \nu$  вектор спина  $\vec{J}_0$ , чтобы получить решение через период  $T$ . Отсюда с очевидностью  $\vec{n}_0$  совпадает с периодическим решением  $\vec{n}(\theta)$  в моменты  $\theta = 0, T, \dots$ , а  $2\pi \nu$  - и есть угол, на который поворачивается поперечное к  $\vec{n}$  решение через период. Явные выражения для  $\vec{n}_0$  и  $\nu$  получаются из (2.9):

$$\cos \pi \nu = \frac{1}{2} \text{Sp} \Lambda \quad ; \quad \vec{n}_0 = \frac{i}{2 \sin \pi \nu} \text{Sp} \vec{\sigma} \Lambda \quad (2.10)$$

При целом  $\nu$ ,  $\vec{n}_0$  полностью неопределенно, и любое решение периодическое.



Предметом данной работы является изучение влияния возмущения  $\vec{w}$ , обязанного отклонению частицы от равновесной траектории, на идеальное движение спина (осуществляемое при  $\vec{w} = 0$ ). Отметим, что при произвольном  $\vec{n}(\theta)$  эта задача принципиально не отличается от обычно исследуемого случая почти постоянного по направлению магнитного поля (1-6/ ( $\vec{n}(\theta) = \text{const}$ )). Как и при  $\vec{n} = \text{const}$ , учёт  $\vec{w}$ , в виду его малости, может привести к существенному изменению движения спина лишь вблизи резонанса (близость  $\nu$  к какой-либо частоте спектра возмущения  $\vec{w}$ ).

### 3. Резонансы первого приближения

Роль спиновых резонансов наиболее наглядно можно выявить следующим образом.

Напишем решение (2.4) в 1-ом приближении обычной теории возмущений,

$$\vec{J}_{\vec{n}} = \vec{J}_{\vec{n}}^0 + \text{Re} i(\vec{J}^0 \vec{e}) \int_0^{\theta} \vec{w} \vec{e} \cdot e^{-i\nu\theta} d\theta \quad (3.1)$$

Подынтегральное выражение представим в виде суммы

$$\vec{w} \vec{e} \cdot e^{-i\nu\theta} = \sum_k \omega_k e^{i(\nu_{\{k\}} - \nu)\theta} \quad (3.2)$$

$$\nu_{\{k\}} = \sum_i K_i \nu_i$$

( $\nu_i \omega_s$  - частоты движения частицы,  $K_i$  - целые числа).  
Выполняя интегрирование в (3.1), получаем

$$\vec{J}_{\vec{n}} = \vec{J}_{\vec{n}}^0 + \text{Re}(\vec{J}^0 \vec{e}) \sum_k \frac{\omega_k}{\nu_{\{k\}} - \nu} e^{i(\nu_{\{k\}} - \nu)\theta} \quad (3.3)$$

$$\vec{J}_{\vec{n}} = \vec{J}_{\vec{n}}^0 - \text{Re}(\vec{J}^0 \vec{e}) \sum_k \frac{\omega_k}{\nu_{\{k\}} - \nu}$$

Из вида решения (3.3) следует, что оно применимо для времен

$$\theta > \frac{1}{|\vec{w} \vec{e}|} \quad \text{при условии}$$

$$|\nu - \nu_{\{k\}}| \gg |\omega_k|$$

при этом  $\vec{J}_{\vec{n}}$  колеблется с малой амплитудой около  $\vec{J}_{\vec{n}}^0$

В резонансной же зоне

$$|\nu - \nu_{\{k\}}| \lesssim |\omega_k| \quad (3.4)$$

обычная теория возмущений применима лишь при

$$\theta \ll \frac{1}{|\omega_k|} \quad (3.5)$$

Таким образом, поведение спина на больших временах будет определяться резонансными гармониками, удовлетворяющими условию (3.4).

Рассмотрим случай уединенного резонанса, когда (3.4) выполнено лишь для одной гармоники  $k = k_0$ , остальные резонансные гармоники настолько малы, что выполнено (3.5). При этом решение, пригодное и на временах  $\theta \gtrsim \frac{1}{|\omega_{k_0}|}$ , можно получить методом усреднения.

Введем медленную фазу

$$\varphi = \psi - \psi_{k_0} \equiv \psi - \nu_{\{k_0\}} \theta \quad (3.6)$$

Это означает переход в "резонансную" систему координат, вращающуюся вокруг  $\vec{n}$  с частотой  $\nu_{\{k_0\}}$  относительно системы (2.3). Новые орты  $\vec{e}' = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2$  связаны с ортами  $\vec{e}$  соотношением

$$\vec{e}' = \vec{e} \cdot e^{-i\psi_{k_0}}$$

В этой системе:

$$\dot{\vec{J}} = [\vec{w}' \vec{J}] \quad \vec{w}' = (\omega_1' \omega_2' \omega_3') \quad (3.7)$$



где

$$w_3' = \nu - \nu_{k_0} + \bar{w} \bar{n} \quad w_1' + i w_2' = \bar{w} \bar{e}' = \bar{w} \bar{e} \cdot e^{-i\psi_{k_0}}$$

Уравнения (3.7) можно решать методом усреднения. В первом приближении усредненные уравнения имеют вид:

$$\dot{\vec{J}} = [\vec{h} \vec{J}]$$

$$\vec{h} = \langle \vec{w}' \rangle = \text{const} \quad (3.8)$$

$$h_1 + i h_2 = \langle \bar{w} \bar{e} \cdot e^{-i\psi_{k_0}} \rangle = \omega_{k_0} \quad h_3 = \langle w_3' \rangle \equiv \varepsilon$$

Таким образом, метод усреднения эквивалентен отбрасыванию всех гармоник, кроме резонансной, при этом задача сводится к движению в постоянном "поле"  $\vec{h}$ . Решение очевидно: спин в "резонансной" системе медленно прецессирует вокруг  $\vec{h}$  с постоянной угловой скоростью

$$h = \sqrt{\varepsilon^2 + |\omega_{k_0}|^2} \ll 1$$

Ось прецессии составляет с  $\vec{n}$  угол  $\alpha$ , равный  $\arctg \frac{|\omega_{k_0}|}{\varepsilon}$

Из системы (2.3) движение спина выглядит так: спин быстро вращается с частотой  $\nu_{k_0}$ , медленно изменяя проекцию на  $\vec{n}$ . Раствор конуса вращения медленно, с частотой  $h$ , колеблется около среднего значения  $2\alpha$  с амплитудой, зависящей от начальных условий. При начальной поляризации по  $\vec{n}$  проекция  $J_n$  колеблется от 1 до  $\frac{\varepsilon^2 - |\omega_{k_0}|^2}{\varepsilon^2 + |\omega_{k_0}|^2}$ . При точном резонансе

( $\varepsilon = 0$ ) через время  $\pi/h$  спин переворачивается. Как и должно быть (ср. 3.3), движение спина существенно отличается от нерезонансного случая лишь при  $\varepsilon \sim |\omega_{k_0}|$ .

В этом смысле мощность резонанса  $|\omega_{k_0}|$  одновременно характеризует и ширину резонанса.

#### 4. Резонансы высших приближений

Как мы убедились, в первом приближении движение спина может сильно возмущаться лишь вблизи резонансов

$$\nu \approx \nu_{\{k\}}$$

где  $\nu_{\{k\}}$  - какая-либо частота из спектра  $\bar{w} \bar{e}$ . Если резонансы первого приближения отсутствуют, то по смыслу метода усреднения, можно утверждать, что проекция спина будет сохраняться до времен

$$\theta \ll \frac{1}{|\bar{w}'|^2 \theta_{\text{хар}}} = \theta_{\text{max}}$$

где  $\theta_{\text{хар}}$  - характерное "быстрое" время изменения  $\bar{w}$ . Для ответа на вопрос о поведении спина на временах  $\theta \geq \theta_{\text{max}}$

необходимо построить усредненные уравнения с учётом высших порядков. При этом будут учтены и комбинационные резонансы:

$$\nu = \pm \nu_k \pm \nu_{k'} \pm \dots \pm \varepsilon \equiv \nu_p + \varepsilon \quad (4.1)$$

Для изучения поведения спина вблизи резонанса  $\nu_p$ , как и раньше, переходим в резонансную систему, вращающуюся с частотой  $\nu_p$  вокруг  $\vec{n}$  (см. 3.6) и строим усредненные уравнения с нужной точностью.

Удобной при этом оказывается матричная запись спиновых уравнений

$$\dot{\vec{J}} = \mathcal{W}' \vec{J}$$

где  $\vec{J}$  - столбец из компонент вектора  $\vec{J}$ , а  $\mathcal{W}'$ -матрица

$$w'_{ik} = \varepsilon_{i\alpha k} w'_\alpha$$

Для малых времен ( $T/|\bar{w}'| \ll 1$ ) решение для  $\vec{J}$  в момент времени  $\theta$  записывается в виде ряда:

$$\vec{J}_\theta = (I + \lambda) \vec{J}_0$$

$$\lambda = \bar{w}' + \bar{w}' \bar{w}' + \dots \quad (4.2)$$



где  $\tilde{w}' = \int_0^\theta w' d\theta$

Метод усреднения в нашем случае означает нахождение такого постоянного эффективного "поля"  $\vec{h}$ , чтобы решение:

$$\dot{J}_T = e^{hT} J_0$$

усредненного уравнения

$$\dot{j} = h j \quad (4.3)$$

через время  $T$  совпадало бы с (4.2)

$$e^{hT} = I + \lambda$$

отсюда

$$h = \frac{1}{T} \ln(I + \lambda) = \frac{1}{T} \left( \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \dots \right) \quad (4.4)$$

Здесь мы ограничимся построением  $\vec{h}$  с точностью до 4-го порядка. Из (4.3) с помощью (4.2) получаем

$$h = \left\langle w' - \frac{1}{2} [\tilde{w}' w'] - \frac{T}{4} \langle w' \rangle [\tilde{w}' w'] + \frac{1}{3} [\tilde{w}' [\tilde{w}' w']] \right\rangle$$

[A, B] означает коммутатор матриц A и B. В векторной форме коммутатор матриц заменяется на векторное произведение:

$$\vec{h} = \left\langle \vec{w}' - \frac{1}{2} [\tilde{\vec{w}}' \vec{w}'] - \frac{T}{4} \langle \vec{w}' \rangle [\tilde{\vec{w}}' \vec{w}'] + \frac{1}{3} [\tilde{\vec{w}}' [\tilde{\vec{w}}' \vec{w}']] \right\rangle \quad (4.5)$$

Время  $T$  должно быть выбрано с учётом соотношений:

$$\theta_{\text{хар}} \ll T \ll \frac{1}{|\vec{w}'|} \quad (4.6)$$

При этом условии  $\vec{h}$  не зависит от  $T$  и скобки  $\langle \dots \rangle$  совпадают с определением среднего значения.

Решение (4.3) будет, очевидно, мало отличаться от точного до времён

$$\theta \ll \frac{1}{|\vec{w}'|} \frac{1}{|\vec{w}' \theta_{\text{хар}}|^3} = \theta_{\text{max}} \quad (4.7)$$

Если  $\vec{w}'(\theta)$  - периодическая, то  $\vec{h}$  для времён

$\theta \ll \theta_{\text{max}}$  совпадает по направлению с соответствующим периодическим решением  $\vec{m}$  в моменты времени  $0, T, 2T, \dots$  ( $T$  в этом случае может быть отождествлено с периодом изменения  $\vec{w}'$ ). Между этими моментами решение (4.3) отличается от точного на величину первого порядка (откуда зависимость направления  $\vec{h}$  от выбора  $\theta=0$ :  $|\Delta \vec{m}| \sim hT$ ). Аналогично, в общем случае  $T$  при условии (4.6) является приближенным периодом изменения  $\vec{w}'$ . Величина  $h$  задаёт частоту вращения спина вокруг периодического решения (и поэтому не зависит от выбора начала отсчёта).

Обсудим какого типа резонансы возможны в следующих приближениях. Под резонансом мы понимаем ситуацию, когда направление средней оси прецессии  $\vec{m}$  существенно отличается от  $\vec{h}$ , т.е. при

$$|h_x + i h_y| \approx |\vec{h} \vec{n}|$$

Как мы видели, в первом приближении возможны только резонансы:

$$\nu \approx \nu_{\{k\}}$$

где  $\nu_{\{k\}}$  - частота из спектра поперечной части  $\vec{w}$ . Как следует из (4.5), во втором приближении возможны резонансы

$$\nu \approx \nu_e + \nu_k$$

(Здесь индексами "e" и "k" обозначаются частоты из спектра  $\vec{h} \vec{w}$   $\vec{w} \vec{e}$  соответственно). Таким образом, резонансы во втором приближении возникают лишь вследствие корреляции между поперечным возмущением и колебаниями частоты прецессии.



При постоянном  $\vec{w}\vec{n}$  ( $\nu_e = 0$ ) второе приближение не даёт нового резонанса, а является поправкой к первому.

В третьем приближении возможны комбинационные резонансы:

$$\begin{aligned} \nu &\approx \nu_e + \nu_{e'} + \nu_k \\ \nu &\approx \nu_k + \nu_{k'} - \nu_{k''} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Обычно оказывается достаточно рассмотренных приближений. Для полноты картины укажем простое правило отбора комбинаций частот для резонанса произвольного порядка. Общее условие резонанса  $n$ -ого порядка: некая комбинация из  $n$  частот спектра  $\vec{w}\vec{n}$  и  $\vec{w}\vec{e}$  (среди них могут быть одинаковые) должна быть близка к  $\nu$ . Это же условие в резонансной системе можно записать в виде:

$$\nu_{e_1} + \nu_{e_2} + \dots + \nu_{e_{n_1}} + S_1(\nu_{k_1} - \nu) + \dots + S_{n_2}(\nu_{k_{n_2}} - \nu) \approx 0$$

$$S_i = \pm 1 \quad n_1 + n_2 = n$$

(Выбор знака перед  $\nu_e$  можно включить в индекс  $e$ , т.к. частоты  $\nu_e$  образуют спектр действительной величины  $\vec{w}\vec{n}$ ). Так как для спиновой системы возможны только линейные резонансы, то должно быть:

$$S_1 + \dots + S_{n_2} = 1 \quad (4.8)$$

Отсюда, в частности, следует нечетность  $n_2$ .

Таким образом в  $n$ -ом порядке возможны резонансы:

$$\nu \approx \nu_{e_1} + \dots + \nu_{e_{n_1}} + S_1 \nu_{k_1} + \dots + S_{n_2} \nu_{k_{n_2}} \quad (4.9)$$

с соблюдением условия (4.8). Иногда резонансы  $n$ -го порядка сводятся к поправке низших резонансов. Для этого необходимо,

чтобы из полной комбинации (4.9) выделялась малая по величине часть, причём число частот  $\nu_k$ , входящих в эту подкомбинацию с положительными ( $S_i > 0$ ) и с отрицательными знаками ( $S_i < 0$ ), должно совпадать.

Например, резонансы третьего порядка (4.7) сводятся к поправкам первого и второго, если  $\nu_e \approx 0$ ,  $\nu_e + \nu_{e'} \approx 0$  либо  $\nu_{k'} - \nu_{k''} \approx 0$ .

### 5. Модуляционные резонансы

Описанный метод усреднения применим непосредственно для уединенного резонанса, т.е. когда условие

$$|\nu - \nu_p| \lesssim |\vec{w}| \quad (5.1)$$

выполнено только для одной комбинации  $\nu_p$ . После усреднения по остальным быстрым частотам мы получаем движение в эффективном постоянном поле, правильно описывающем движение спина на больших временах. Если условию (5.1) удовлетворяют несколько комбинаций  $\nu_p$ , то после усреднения по быстрым частотам эффективное поле  $\vec{h}$ , будет функцией времени частоты изменения которой сравнимы с величиной  $h$ :

$$\vec{h} = \vec{h}_0 + \vec{\Delta}(\theta)$$

$$\vec{\Delta}(\theta) = \sum_{m \neq 0} \Delta_m e^{i\Omega_m \theta} \quad (\Omega_m \lesssim h) \quad (5.2)$$

$$\vec{h}_0 = (h_1, 0, \varepsilon)$$

где  $h_1$ ,  $\varepsilon$  - ширина и расстройка выбранного (основного) резонанса,  $\Delta_m$  - характеризуют мощность остальных резонансов,  $\Omega_m$  - расстояние между основным и остальными резонансами. Решение такой задачи удаётся получить в некоторых практически важных случаях.

В этом параграфе мы рассмотрим случай перекрывающихся



резонансов существенно разной мощности. Пусть  $\Delta_m \ll \Omega_m$ . Для решения такой задачи опять оказывается возможным воспользоваться методом усреднения. В нулевом приближении ( $\vec{\Delta} = 0$ ) имеет место уединенный (основной) резонанс и спин прецессирует вокруг  $\vec{h}_0$ . Учет  $\vec{\Delta}$  приводит к существенному искажению движения лишь вблизи (в первом приближении) модуляционных резонансов:

$$\Omega_m \approx h_0 = \Omega_m + \varepsilon_m$$

В следующих приближениях становятся возможными и комбинационные резонансы.

В качестве примера рассмотрим случай периодической модуляции (например, синхротронные колебания энергии вблизи спинового резонанса на быстрых частотах). В этом случае

$$\vec{\Delta}(\theta) = \vec{\Delta}_y \sin \Omega_y \theta$$

$$\vec{\Delta}_y = \text{const}$$

$\Omega_y$  - частота синхротронных колебаний. В первом приближении возможны резонансы

$$h_0 \approx \Omega_y \quad h_0 = \Omega_y + \varepsilon_y$$

Мощность этого резонанса

$$\omega_y = \frac{1}{2h_0} |[\vec{\Delta}_y \vec{h}_0]| \quad (5.3)$$

определяется поперечной к  $\vec{h}_0$  частью  $\vec{\Delta}_y$ . Движение спина происходит следующим образом. В системе, вращающейся вокруг

$\vec{h}_0$  с частотой  $\Omega_y$ , спин медленно прецессирует с частотой  $\sqrt{\varepsilon_y^2 + \omega_y^2}$  вокруг направления, составляющего с  $\vec{h}_0$  угол

$$\alpha = \arctg \frac{\omega_y}{\varepsilon_y}$$

Резонансы  $h_0 \approx K \Omega_y$  возникают в  $K$ -ом приближении метода усреднения.

Рассмотренный метод даёт результаты, существенно отличающиеся от теории уединенного резонанса лишь при  $|\varepsilon| \leq h_{\perp}$ . В противном случае ( $|\varepsilon| \gg h_{\perp}$ ) боковые резонансы фактически отделены от основного и могут рассматриваться как независимые уединенные.

Случай периодической модуляции при  $\Delta \gg \Omega$ , когда перекрываются много резонансов одинаковой мощности, требует другого подхода. При этом более полезным оказывается подход к задаче не как к наложению отдельных резонансов, а как к повторяющимся прохождением "основного" резонанса.

## 6. Однократное прохождение резонанса

Далее мы рассмотрим задачи однократного и многократного (периодического) прохождения спиновых резонансов. Обе эти задачи представляют практический интерес для накопителя. (Например, прохождение резонанса при ускорении частиц, модуляция частот движения частиц и т.п.).

Однократное прохождение впервые рассматривалось в [1] для постоянной скорости прохождения ( $\dot{\varepsilon} = \text{const}$ ,  $h_{\perp} = \text{const}$ ) и специальном начальном условии поляризации по полю ( $\int_{-\infty}^{\varepsilon} = 1$ ).

Был получен следующий результат:

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon} = 2e^{-\frac{\pi}{4} \frac{h_{\perp}^2}{|\varepsilon|}} - 1 \quad (6.1)$$

При произвольном начальном условии известен результат только для быстрого прохождения ( $|\dot{\varepsilon}| \gg h_{\perp}^2$ ) [1, 4-6].

Полный ответ в задаче об однократном прохождении представляет не только самостоятельный интерес, но и необходим для построения решения в случае периодического прохождения. Оказывается возможным решить такую задачу в несколько более широкой постановке.

Пусть спин в резонансной системе движется в поле

$$\vec{h} = (h_1, 0, h_2) \quad (6.2)$$



(Вращение  $\vec{h}_1$  всегда можно исключить переходом в систему, вращающуюся относительно резонансной вместе с  $\vec{h}_1$ ).

Заданы некоторые начальные условия для спина при  $h_2 \rightarrow -\infty$ . Необходимо найти решение  $\vec{J}$  при  $h_2 \rightarrow \infty$ .

Заметим, что в области адиабатического изменения направления  $\vec{h}$  уравнение в поле (6.2) решается

$$\vec{J} = J_h \frac{\vec{h}}{h} + \sqrt{1 - J_h^2} \operatorname{Re} \vec{e}^* e^{i(\int_0^\theta h d\theta + \psi_0)} \quad (6.3)$$

где  $\vec{e}$  — неподвижный относительно  $\vec{h}$  комплексный орт, причем  $\vec{h} \vec{e} = 0$ , т.е. спин прецессирует вокруг  $\vec{h}$  с частотой  $h$ . Условие адиабатичности естественно получается в системе координат, где ось  $z$  направлена по  $\vec{h}$ . В этой системе поле имеет следующие компоненты:

$$(0, d, h)$$

где  $d = \frac{d}{d\theta} \arctg \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{h^2} (h_2 \dot{h}_1 - h_1 \dot{h}_2)$  — угловая скорость вращения  $\vec{h}$ . Для выполнения адиабатичности (ось прецессии спина направлена по полю) необходимы как малость  $d$  в сравнении с частотой прецессии спина  $h$ , так и малость изменения самой частоты прецессии  $h$  за время оборота  $2\pi/h$  спина вокруг поля:

$$|d| \ll h$$

$$|h| \ll h^2$$

откуда следует, что

$$h \gg \sqrt{h_2^2 + h_1^2} \quad (6.4)$$

Условие (6.4) обеспечивает экспоненциальную точность решения в адиабатической зоне при монотонном изменении  $\vec{h}$ . Если  $\vec{h}$  при прохождении испытывает колебания, то необходимо дополнительное условие малости частоты колебаний  $\Omega$ :

$$\Omega \ll h \quad (6.4a)$$

Заметим, что если адиабатичность (6.4) выполнена для всех значений  $h_2$ , ( $h_1 \gg (h_2^2 + h_1^2)^{1/4}$ ), то решение (6.3) справедливо всюду с экспоненциальной точностью по параметру адиабатичности. При этом экспоненциально-малое отличие от точного набирается в области, где (6.4) выполняется наименее сильно, т.е. в области  $h_2 \sim h_1$ . Поэтому под границей эффективной резонансной области (зоны) мы будем понимать

$$h_2^{\text{эф}} \sim \max(h_1, (h_2^2 + h_1^2)^{1/4}) \quad (6.5)$$

Итак, вне эффективной области (6.5) решение имеет вид (6.3) с неизменяющимися параметрами  $J_h$  и  $\psi_0$ .

Наша цель состоит в том, чтобы связать проекции  $J_h$  и фазы  $\psi_0$  до прохождения ( $\theta < 0$ ) и после прохождения ( $\theta > 0$ ). Данная задача может быть полностью решена для произвольной скорости прохождения  $h_2$  при условии малости относительного изменения  $h_2$  и  $h_1$  в эффективной зоне

$$\left| \frac{\delta h_2}{h_2} \right| \ll 1 \quad \left| \frac{\delta h_1}{h_1} \right| \ll 1 \quad |h_2| \lesssim h_2^{\text{эф}} \quad (6.6)$$

Для этого удобнее использовать уравнение (2.6) для переменной

$$i\dot{x} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \vec{h} x \quad (6.7)$$

Решение (6.7) в адиабатической зоне, эквивалентное (6.3), в системе, где ось  $z$  направлена по полю  $\vec{h}$ , имеет вид:

$$x = S_{00} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad S_{00} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2} \int_0^\theta h d\theta} & 0 \\ 0 & e^{+\frac{i}{2} \int_0^\theta h d\theta} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Соотношения между  $J_h$ ,  $\psi_0$  и  $A$ ,  $B$  очевидны:



$$J_h = |A|^2 - |B|^2 \quad \psi_0 = \arg BA^*$$

Для нахождения связи  $A, B$  при  $\theta < 0$  и  $\theta > 0$  воспользуемся методом сшивки решений путем выхода в комплексную плоскость времени /10-12/.  
Особые точки, определяемые из

$$h = \sqrt{h_2^2 + h_1^2} = 0$$

в нашем случае лежат в комплексной плоскости  $\theta$  и данная задача эквивалентна задаче о надбарьерном отражении в квантовой механике. Если  $h_2, h_1$  постоянны, то есть только две особые точки - точки "поворота"

$$\theta_n = \pm i \frac{h_1}{h_2}$$

Отклонения  $h_2$  и  $h_1$  приводят к смещению этих точек и появлению новых, которыми при условии (6.6) можно пренебречь. Следуя работам /10-12/, обойдем две точки поворота  $\theta_n, \theta_n^*$  в комплексной плоскости  $\theta$  (т.е. эффективную зону, где решение неизвестно, обходим по окружности большого радиуса, на которой решение имеет вид (6.8)). Получаем искомую связь  $A, B^x$ :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\theta > 0} = R \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\theta < 0}$$

$$R(h_2 > 0) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-e^{-2\delta}} e^{-i\varphi} & -e^{-\delta} \\ e^{-\delta} & \sqrt{1-e^{-2\delta}} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = R^T(h_2 < 0) \quad (6.9)$$

<sup>x)</sup> В работах /10-12/ разрез в комплексной плоскости  $\theta$  проведен между точками поворота. В нашем определении  $h$  положительна всюду на действительной оси.

где

$$2\delta = \left| \int_{\theta_n^*}^{\theta_n} h d\theta \right| \quad (6.10)$$

величина интеграла между точками поворота  $\theta_n^*, \theta_n$

$\varphi$  - постоянная фаза, которая в /10-12/ остается неопределенной. Момент  $\theta = 0$  выбран так, чтобы

$$\operatorname{Re} \theta_n = 0 \quad (6.11)$$

Из (6.8, 9) можно получить связь:

$$\chi_{\theta_2} = S_{\theta_2 0} R S_{0 \theta_1} \chi_{\theta_1} \quad (6.12)$$

$$\theta_2 > 0 \quad \theta_1 < 0$$

Фазу  $\varphi$  можно найти из сравнения с точным решением при постоянных  $h_2$  и  $h_1$ , которое построено в приложении 2. В этом случае:

$$\delta = \frac{\pi}{4} \frac{h_1^2}{|h_2|} \equiv \frac{\pi}{4} a^2$$

в согласии с (6.10), а

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} + \frac{a^2}{4} \ln \frac{a^2}{4e} - \arg \Gamma\left(i \frac{a^2}{4}\right) \quad (6.13)$$

График зависимости  $\varphi\left(\frac{a^2}{4}\right)$  приведен на рис.1. При малых отклонениях (усл.6.6)  $h_2$  и  $h_1$  от постоянных в эффективной зоне, отличием  $\varphi$  от (6.13) всегда можно пренебречь. (Заметим, что для медленного прохождения ( $a^2 \gg 1$ ) абсолютное изменение  $\delta$  и сдвиг  $\theta = 0$  при этом могут быть не малыми).

Таким образом, при условии (6.6) матрица  $R$  в общем



случае даётся выражением (6.9) с  $\varphi$  из (6.13).

Из (6.12) можно получить связь проекций на поле  $J_h$  и фаз  $\varphi$ . Приведем выражение для  $J_h$ :

$$J_h(\theta_2) = (1 - 2e^{-2\delta}) J_h(\theta_1) - 2e^{-\delta} \sqrt{1 - e^{-2\delta}} J_1(\theta_1) \cos(\psi(\theta_1) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} h d\theta + \varphi) \quad (6.14)$$

$\theta_2 > 0 \quad \theta_1 < 0$

При медленном прохождении  $|h_2| \ll h_1^2$  спин сохраняет свою проекцию на  $\vec{h}$  с экспоненциальной точностью, переворачиваясь вместе с  $\vec{h}$ . В быстром случае ( $|h_2| \gg h_1^2$ ) изменение проекции на  $\vec{h}$  мало ( $\sim \sqrt{\delta}$ ). Формула (6.14) обобщает результат /1/ (см. 6.1).

В приложении 1 указано одно практическое применение задачи о прохождении резонанса.

### 7. Периодические прохождения

При условиях длительного существования пучка в накопителях может представить интерес задача о периодическом прохождении резонансов. С общей точки зрения задача о периодическом прохождении резонанса является задачей о движении спина в периодическом поле

$$\vec{h}(\theta) = \vec{h}(\theta + \frac{2\pi}{\Omega}) = (h_1(\theta), 0, h_2(\theta)) \quad (7.1)$$

$\Omega$  - частота прохождений.

Из результатов /7/ вытекает общий характер движения спина при периодическом прохождении. Существует некоторое периодическое решение  $\vec{m}(\theta)$  для спина, повторяющееся через  $2\pi/\Omega$ . Все остальные решения прецессируют с одинаковой частотой  $\mu$  вокруг  $\vec{m}$  ( $J_m = \text{const}$ ). Таким образом, наша задача сводится к отысканию периодического решения  $\vec{m}$

и частоты прецессии  $\mu$ .

В разделе 2 получены формулы для  $\vec{m}$  и  $\mu$  в представлении "волновой функции"  $\chi$ . Пусть известна матрица  $\Lambda$  ( $\Lambda^* \Lambda = 1$ ). Тогда

$$\cos \pi \mu = \frac{1}{2} \text{Sp} \Lambda \quad \vec{m}(\theta) = \frac{i}{2 \sin \pi \mu} \text{Sp} \vec{\sigma} \Lambda \quad (7.2)$$

Будем рассматривать случай, когда при каждом отдельном прохождении резонанса в эффективной зоне выполнено условие (6.6). (Предполагается при этом, что амплитуда колебаний  $\vec{h}_2(\theta)$  достаточно велика). В этом случае матрица  $\Lambda$  может быть построена из (6.12). Используя результаты предыдущего раздела, получаем:

$$\Lambda = S_{T\theta_2} R_2 S_{\theta_2\theta_1} R_1 S_{\theta_1 0} \quad (T = \frac{2\pi}{\Omega}) \quad (7.3)$$

Здесь  $\theta_2$  и  $\theta_1$  - моменты прохождения резонансов, удовлетворяющие условию (6.11).

Вводя обозначения:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{\alpha}{2} & \alpha &= \alpha_+ + \alpha_- = \int_0^T h d\theta \\ y &= \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2} & \alpha_- &= \int_0^{\theta_1} h d\theta + \int_{\theta_2}^T h d\theta \equiv \alpha_-^{(1)} + \alpha_-^{(2)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\varphi_{1,2} = \varphi\left(\frac{a_{1,2}^2}{4}\right) \quad (\text{см. 6.13})$$

из (7.3) получаем матричные элементы  $\Lambda$ :

$$\Lambda_{11} = \Lambda_{22}^* = \sqrt{(1 - e^{-2\delta_1})(1 - e^{-2\delta_2})} e^{ix} + e^{-\delta_1 - \delta_2 + iy} \quad (7.5)$$



$$\Lambda_{12} = -\Lambda_{21}^* = e^{\frac{i}{2}(\varphi_1 + \alpha_-^{(1)} - \varphi_2 - \alpha_-^{(2)})}$$

$$\cdot \left\{ e^{-\delta_2} \sqrt{1-e^{-2\delta_1}} e^{\frac{i}{2}(x+y)} - e^{-\delta_1} \sqrt{1-e^{-2\delta_2}} e^{-\frac{i}{2}(x+y)} \right\}$$

Таким образом, из (7.2):

$$\cos \pi \mu = \sqrt{(1-e^{-2\delta_1})(1-e^{-2\delta_2})} \cos x + e^{-\delta_1 - \delta_2} \cos y \quad (7.6)$$

$$m_z(0) = \frac{\text{Im } \Lambda_{11}}{\sin \pi \mu}, \quad m_x + i m_y = -i \frac{\Lambda_{12}}{\sin \pi \mu} \quad (7.7)$$

(Напомним, что  $\vec{m}$  определено в системе, связанной с полем  $\vec{h}$ ).

Полученные формулы дают всю необходимую информацию о поведении спина при периодических прохождениях, удовлетворяющих условию (6.6). Вектор  $\vec{m}(0)$  задает направление периодического решения в моменты  $0, 2\pi/\Omega, \dots$  (Момент  $\theta=0$  выбран в адиабатической зоне, где спиновое движение известно). Формула (7.6) определяет угол  $2\pi\mu$ , на который спин поворачивается вокруг  $\vec{m}(0)$  через период  $2\pi/\Omega$ .

Практически интересно проследить, как при периодическом прохождении изменяется проекция на ось  $\vec{h}$  в зоне адиабатичности. Очевидно её изменение существенно зависит от ориентации  $\vec{m}$  относительно  $\vec{h}$ . Например, при начальном условии

$J_h = 1$ , проекция  $J_h$  меняется в интервале:

$$1 \div (2m_z^2 - 1); \quad m_z = \frac{\vec{m} \cdot \vec{h}}{h}$$

Посмотрим, как зависит ориентация  $\vec{m}$  от параметров задачи.

а) Быстрое прохождение ( $\delta_1 \ll 1, \delta_2 \ll 1$ ). При этом как нетрудно убедиться

$$\sin \pi \mu \approx \sqrt{\sin^2 y + 2(\delta_1 + \delta_2) - 4\sqrt{\delta_1 \delta_2} \cos x \cos y} \quad (7.8)$$

$$m_z(0) = \frac{\sin y}{\sin \pi \mu}$$

Как видно, почти всегда  $m_z \approx 1$  за исключением узких полос по  $y$ :

$$|y - k\pi| \lesssim \sqrt{\delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1 \delta_2} (-1)^k \cos x} \quad (7.9)$$

(7.9) определяет "резонансную" область, в которой периодическое решение сильно зависит от параметров. Поляризация  $J_h$  может существенно измениться лишь в этой области. При этом спин медленно поворачивается вокруг  $\vec{m}$  с частотой  $\sim \sqrt{\delta}$ .

Например, для симметричного прохождения ( $\alpha_+ = \alpha_-$ )

$$m_z = 0$$

$$\mu = \frac{2}{\pi} \sqrt{2\delta} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h_1}{\sqrt{|h_2|}} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} h d\theta \right)$$

$$(\delta_1 = \delta_2 = \delta)$$

А любое нарушение симметричности прохождения (отодвигает резонанс (7.9), и тогда поляризация  $J_h$  сохраняется.

б) Медленное прохождение ( $e^{\delta_1} \gg 1, e^{\delta_2} \gg 1$ ).

В этом случае

$$\sin \pi \mu \approx \sqrt{\sin^2 x + e^{-2\delta_1} + e^{-2\delta_2} - 2e^{-\delta_1 - \delta_2} \cos x \cos y}$$



$$m_2(0) = -\frac{\sin x}{\sin \pi \mu} \quad (7.10)$$

Так же, как и в предыдущем случае, почти всегда  $m_2 = 1$ , за исключением резонансной области:

$$|x - k\pi| \leq \sqrt{e^{-2\delta_1} + e^{-2\delta_2} - 2e^{-\delta_1 - \delta_2} (-1)^k \cos y} \quad (7.11)$$

в) Смешанный случай ( $\delta_1 \ll 1$ ,  $e^{\delta_2} \gg 1$ )

$$\mu \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sqrt{2\delta_1} \cos x - \frac{1}{\pi} e^{-\delta_2} \cos y$$

$$m_2 \approx e^{-\delta_2} \sin y - \sqrt{2\delta_1} \sin x \quad |m_2| \ll 1$$

$$m_x + i m_y = i e^{-\frac{i}{2} (\alpha_+ + \alpha_-^{(2)} - \alpha_-^{(1)})}$$

Смысл этого решения легко понять следующим образом. При быстром движении "снизу вверх"  $\int_{\vec{h}}$  не успевает измениться. Затем при медленном прохождении "сверху вниз"  $\int_{\vec{h}}$  изменяет знак. Следовательно, спин совершает поворот ( $\mu \approx \frac{1}{2}$ ) вокруг некоторого направления, поперечного к оси  $\vec{h}$ .

В отличие от предыдущих случаев, малые  $m_2$  не означают резонанса ( $\mu \neq k$ ).

г) Промежуточный случай ( $\delta_1 \sim 1$ ,  $\delta_2 \sim 1$ ).

В отличие от рассмотренных случаев, направление  $\vec{m}$  здесь зависит от  $(x, y)$  во всем интервале их изменения. При этом  $m_2$  плавно пробегает все возможные значения:

$$0 \leq |m_2| \leq \sqrt{(1 - e^{-2\delta_1})(1 - e^{-2\delta_2})} + e^{-\delta_1 - \delta_2} \quad (7.12)$$

Наибольшая чувствительность к положению точки  $(x, y)$  наблюдается вблизи резонансов  $\mu = k$ , когда

$$\delta_1 \approx \delta_2 = \delta \quad \cos x \approx \cos y \approx \pm 1$$

Приближенная формула вблизи резонанса имеет вид:

$$\sin \pi \mu \approx \sqrt{\frac{(\delta_1 - \delta_2)^2}{e^{2\delta} - 1} + (\Delta x)^2 (1 - e^{-2\delta}) + (\Delta y)^2 e^{-2\delta}}$$

$$m_2 = \frac{e^{-2\delta} \Delta y - (1 - e^{-2\delta}) \Delta x}{\sin \pi \mu}$$

Здесь  $\Delta x, \Delta y$  - отклонения от резонансной точки

$$\cos x = \cos y = \pm 1$$

### 8. Быстрые прохождения с произвольной периодической зависимостью $\vec{h}(\theta)$

Формулы (7.6, 7) периодического решения справедливы при условии (6.6). В важном случае быстрых прохождений можно решить задачу без ограничений на вид периодической зависимости  $\vec{h}(\theta)$ . Для нахождения периодического решения достаточно знать спиновое движение на периоде изменения  $\vec{h}(\theta)$ . В случае быстрых прохождений спин в эффективной зоне не успевает существенно измениться и поэтому решение в этой зоне может быть найдено по теории возмущений.

При однократном прохождении связь  $\chi$  при  $\theta > 0$  и  $\theta < 0$  в системе, вращающейся относительно оси  $\vec{h}$  со скоростью  $h_2$ , в первом приближении имеет вид:

$$\chi'_{\theta_2} = \left(1 - \frac{i}{2} \vec{\sigma} \vec{h}_0\right) \chi'_{\theta_1} \quad H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} h_2 e^{-i \int_{\theta_0}^{\theta} h_2 d\theta} d\theta \quad (8.1)$$

$$\theta_2 > 0 \quad \theta_1 < 0 \quad h_2(\theta_0) = 0$$



Возвращаясь в исходную систему и сшивая с решениями в адиабатических зонах, получаем матрицу  $\Lambda$  (в системе (7.1)):

$$\chi_T = \Lambda \chi_0$$

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2} \sigma_2 \varphi_T} \left( 1 - \frac{i}{2} \vec{\sigma} \vec{H} \right) \quad (8.2)$$

$$H_x + i H_y = \int_0^T h_1 e^{-i \varphi_0} d\theta$$

$$\varphi_0 = \int_0^\theta \varepsilon_{\text{эф}} d\theta \quad \varepsilon_{\text{эф}} = \begin{cases} h_2 & \text{в эффективной зоне} \\ h \frac{h_2}{|h_x|} & \text{в адиабатической зоне} \end{cases}$$

Отсюда:

$$\Lambda_{11} = \left( 1 - \frac{H^2}{8} \right) e^{-\frac{i}{2} \varphi_T}$$

$$\Lambda_{12} = -\frac{i}{2} (H_x - i H_y) e^{-\frac{i}{2} \varphi_T} \quad H = |H_x + i H_y| \ll 1$$

$$\sin \pi \mu = \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_T}{2} + \frac{H^2}{4}}$$

$$m_2 = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi_T}{\sin \pi \mu} \quad (8.3)$$

$$m_x + i m_y = \frac{H_x - i H_y}{2 \sin \pi \mu} e^{-\frac{i}{2} \varphi_T}$$

Полученное решение, в отличие от (7.8), применимо и тогда, когда адиабатическая зона не достигается.

При наличии зон адиабатичности и условии (6.6), решение (8.3) переходит в (7.8). Периодическое решение, как и ранее, направлено всегда по оси  $Z$ , за исключением резонансной области:

$$\left| \frac{1}{2} \varphi_T - K\pi \right| \lesssim H \quad (\text{ср. 7.9}) \quad (8.4)$$

Заметим, что если адиабатические зоны отсутствуют, то  $\varphi_T = \bar{h}_2 T \ll 1$ . В этом случае, как видно из (8.3), спин движется в среднем поле:

$$\langle \vec{h} \rangle = (\langle h_x \rangle, 0, \langle h_z \rangle)$$

### 9. Прохождение резонансов с частотой обращения $\nu = K$

До сих пор мы не рассматривали эффектов, связанных с изменением  $\vec{h}(\chi_s, \theta)$  как функции энергии  $\chi_s$  (или других параметров) со временем. В периодической системе  $\vec{h}(\chi_s, \theta)$ ,  $\vec{e}(\chi_s, \theta)$ , вследствие изменения  $\chi_s$ , в уравнении (2.4) появляются дополнительные члены  $\sim \frac{\partial \vec{h}}{\partial \chi_s} \dot{\chi}_s$ ;  $\frac{\partial \vec{e}}{\partial \chi_s} \dot{\chi}_s$

Вдали от резонанса  $\nu = K$  они малы  $|/|$  и ими можно пренебречь, как нерезонансными. Опасными, в этом смысле, являются те значения энергии, при которых наступает резонанс:  $\nu(\chi_s) \approx K$

Задача о прохождении такого резонанса может быть решена описанными выше методами. Пусть известно периодическое решение  $\vec{h}(\chi_s, \theta)$  и частота прецессии  $\nu(\chi_s)$  при каждом значении  $\chi_s$ . За точку резонанса  $\chi_s = \chi_p$  выберем значение энергии, при котором  $\nu(\chi_s)$  наиболее близка к целому числу

$$\nu(\chi_p) - K = \Delta \nu_{\text{min}}$$

(В частности,  $\Delta \nu_{\text{min}}$  может быть равно нулю). В резонансной периодической системе



$$\vec{n}_p = \vec{n}(\gamma_p, \theta), \quad \vec{e}_p = \vec{e}(\gamma_p, \theta) \quad \text{уравнения движения}$$

спина имеют вид:

$$\frac{d\vec{J}}{d\theta} = [\vec{w}' \vec{J}] ; \quad \vec{w}' = (w'_x; w'_y; w'_z)$$

$$w'_x + i w'_y = \frac{\delta \vec{W}_s \vec{e}_p}{\omega_s} \quad w'_z = \Delta \nu_{min} + \frac{\delta \vec{W}_s \vec{n}_p}{\omega_s}$$

$$\frac{\delta \vec{W}_s}{\omega_s} = \frac{\vec{W}_s(\gamma_s, \theta) - \vec{W}_s(\gamma_p, \theta)}{\omega_s(\gamma_s)}$$

(отклонения от равновесной орбиты не существенны).

Усредненные по  $\theta$  уравнения имеют вид:

$$\frac{d\vec{J}}{d\theta} = [\vec{h} \vec{J}] ; \quad \vec{h} = \langle \vec{w}' \rangle$$

$$h_x + i h_y = \frac{1}{\omega_s} \langle \delta \vec{W}_s \vec{e}_p \rangle ; \quad h_z = \Delta \nu_{min}$$

$$\langle \vec{n}_p \delta \vec{W}_s \rangle = 0 \quad , \text{ по определению точки резонанса}$$

$$\frac{\partial \nu(\gamma_p)}{\partial \gamma} = 0$$

Направление  $\vec{h}$  определяет направление периодического решения  $\vec{n}(\gamma_s, \theta)$  :

$$\vec{n}(\gamma_s, \theta) = \frac{\Delta \nu_{min}}{h} \vec{n}_p + \text{Re} \frac{h_x - i h_y}{h} \vec{e}_p \quad (9.1)$$

Величина  $h$  определяет  $\Delta \nu(\gamma_s) = \nu(\gamma_s) - K$

$$\Delta \nu(\gamma_s) = h = \sqrt{(\Delta \nu_{min})^2 + h_x^2 + h_y^2}$$

при  $\delta \gamma_s = 0$  , как и должно быть ,

$$\Delta \nu(\gamma_s) = \Delta \nu_{min}$$

Как видно из (9.1), направление периодического решения в точке резонанса  $\vec{n}_p(\theta)$  поперечно к  $\vec{n}(\gamma_s, \theta)$  вдали от резонанса. Это соответствует обычному поведению оси прецессии в области спинового резонанса.

При прохождении резонанса, согласно ранее полученному условию (6.4), изменение  $\vec{n}$  и  $\nu$  можно считать адиабатическим, если:

$$|\Delta \nu(\gamma_s)| \gg \sqrt{\left| \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\vec{W}_s \vec{e}_p}{\omega_s} \right) \right|} \quad (9.2)$$

При медленном прохождении

$$|\Delta \nu_{min}| \gg \sqrt{\left| \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\vec{W}_s \vec{e}_p}{\omega_s} \right) \right|}$$

проекция на  $\vec{n}$  сохраняется и переворачивается вместе с  $\vec{n}$ . В обратном случае быстрого прохождения спин не успевает следовать за  $\vec{n}(\gamma_s, \theta)$ , и проекция  $J_{\vec{n}}$  меняет знак.

Авторы признательны В.Н.Байеру, С.Т.Беляеву, Н.С.Диканскому и Ю.М.Шатунову за внимание к работе и обсуждения.



Приложение 1.

Остановимся на одном практическом применении полученных результатов. Может представить интерес эксперимент на встречных пучках с одинаковой поляризацией электронов и позитронов. При движении в магнитном поле накопителя, под действием синхротронного излучения пучки поляризуются в противоположных направлениях /13, 14/. Чтобы изменить направление поляризации (например, позитронов) на противоположное, разведём энергию электронов и позитронов включением радиального электрического поля  $E_z$ . Это приведёт к отличию  $\nu_{noz}$  и  $\nu_{эл}$ .

$$\Delta\nu = \nu_{noz} - \nu_{эл} = 2 \frac{\partial \nu}{\partial \gamma} \delta\gamma = 2\gamma \frac{\partial \nu}{\partial \gamma} \frac{\langle E_z \rangle}{\langle H \rangle}$$

( $\langle H \rangle$  - среднее ведущее магнитное поле накопителя). Устроим резонанс введением в участок орбиты длиной  $\theta_0$  (где  $|\vec{n}\vec{v}|$  минимально) продольного (по скорости) переменного магнитного поля  $H_{||} \sin \nu_{вн} \theta$  с внешней частотой  $\nu_{вн}$

$$\nu_{noz} = \nu_{вн} + K \neq \nu_{эл} \quad (1)$$

Ширина созданного резонанса

$$h_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{H_{||}}{\langle H \rangle} \langle g(\theta) \vec{v} \vec{e} \cdot e^{-ik\theta} \rangle$$

$$g(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \theta_0 \\ 0 & \theta_0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

не должна перекрывать соседний резонанс для электронов:

$$|h_{\perp}| \ll |\Delta\nu|$$

изменяя  $\nu_{вн}$  можно медленно  $\sqrt{|\nu_{вн}|} \ll |h_{\perp}|$  пройти ре-

зонанс (1), в результате чего поляризация позитронов изменит знак.

Приложение 2.

Уравнения (6.7) при постоянных  $h_2, h_1$  решаются точно. Эти уравнения:

$$\dot{X}_+ = -\frac{i}{2} h_2 \theta X_+ - \frac{i}{2} h_1 X_-$$

$$\dot{X}_- = \frac{i}{2} h_2 \theta X_- - \frac{i}{2} h_1 X_+$$

являются функциональными соотношениями для функций параболического цилиндра /15/  $D_p(z)$ . Решение имеет вид ( $h_2 > 0$ ):

$$X(\theta) = \begin{pmatrix} D_p(z) & D_p(-z) \\ \frac{a}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} D_{p-1}(z) & -\frac{a}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} D_{p-1}(-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2)$$

где

$$a = \frac{h_1}{\sqrt{h_2}}; \quad p = -i\frac{a^2}{4}; \quad z = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{h_2} \theta; \quad \alpha, \beta$$

постоянные, определяемые начальными условиями. Определитель  $|M|$  ("вронскиан") не зависит от времени и может быть вычислен, например, при  $\theta \rightarrow \infty$ :

$$|M| = -\frac{a}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \left\{ D_p(z) D_{p-1}(-z) + D_p(-z) D_{p-1}(z) \right\} =$$

$$= -\frac{a}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(i\frac{a^2}{4} + 1)} \quad (3)$$



Таким образом находим элементы матрицы  $\Lambda_0$  :

$$X_{\theta_2} = \Lambda_0 X_{\theta_1}$$

$$(\Lambda_0)_{11} = (\Lambda_0)_{22}^* = \frac{\Gamma(i\frac{a^2}{4} + 1)}{\sqrt{2\pi}} [D_p(z_2) D_{p-1}(-z_1) + D_p(z_1) D_{p-1}(-z_2)]$$

$$(\Lambda_0)_{12} = (\Lambda_0)_{21}^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \Gamma(i\frac{a^2}{4} + 1) \cdot \quad (4)$$

$$\cdot [D_p(z_2) D_p(-z_1) - D_p(-z_2) D_p(z_1)]$$

$$z_1 = z(\theta_1) \quad z_2 = z(\theta_2)$$

Для нахождения матрицы  $\Lambda_0$ , связывающей адиабатические области

$$\sqrt{h_2^2 + h_1^2} \gg \sqrt{h_2} \quad (5)$$

необходимо знать осимптотики  $D_p(z)$ ,  $D_{p-1}(z)$ . Известны [15] их более предельные выражения при условии:

$$|z| \gg \max(1, |p|)$$

$$|h_2| \gg \max(\sqrt{h_1}, \frac{h_1^2}{\sqrt{h_2}}) \quad (6)$$

Используя метод перевала и сохранение "вронскиана" решений, можно найти асимптотики и при условии (5).

Для наших целей оказывается достаточным знать предельные выражения  $D_p(z)$ , поскольку при условии (5) известен асимптотический вид  $\Lambda$  (см. 6.12) (а значит и  $\Lambda_0$ ). Для полного определения  $\Lambda$  необходимо определить постоянную (при условии (5)!) фазу  $\varphi$ , которую очевидно можно найти и в пределе  $|\theta_1|, |\theta_2| \rightarrow \infty$ . Чтобы получить связь  $\Lambda$  и  $\Lambda_0$ , нужно матрицу  $\Lambda_0$  преобразовать в систему, связанную с направлением  $\vec{h}$ , что осуществляется поворотом вокруг оси "y" на угол  $\alpha = \arctg \frac{h_1}{h_2}$  :

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2}\sigma_y \alpha(\theta_1)} \Lambda_0 e^{-\frac{i}{2}\sigma_y \alpha(\theta_2)} \quad (7)$$

В пределе  $|\theta_1|, |\theta_2| \rightarrow \infty$

$$\Lambda_{11} = \Lambda_{12}^c = \sqrt{1 - e^{-2\delta}} e^{-i(\varphi + \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} h d\theta)} \quad (8)$$

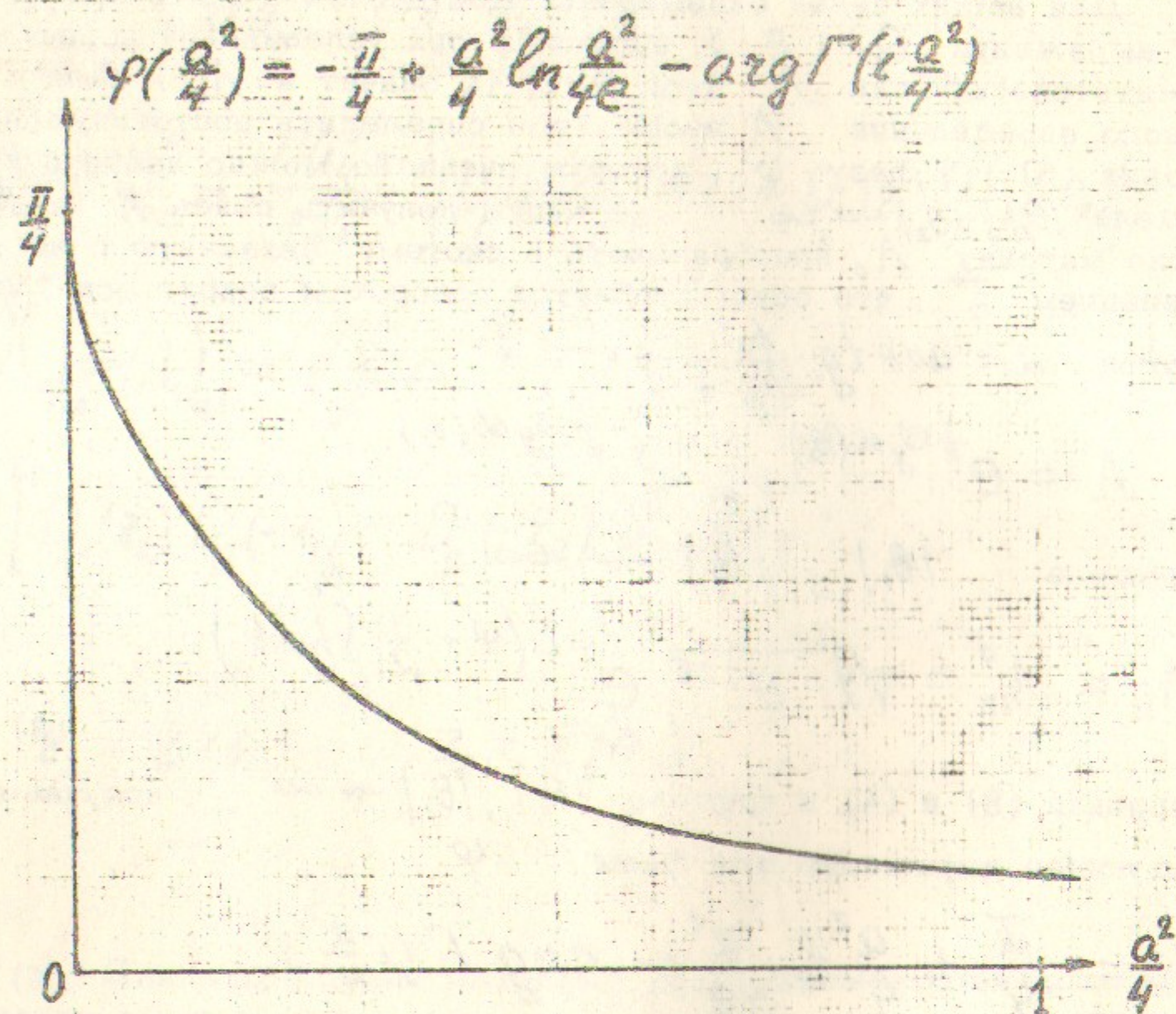
Сравнивая (8) и (4) в пределе  $|\theta_1|, |\theta_2| \rightarrow \infty$ , получаем следующее выражение для фазы  $\varphi$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} + \frac{a^2}{4} \ln \frac{a^2}{4e} - \arg \Gamma(i\frac{a^2}{4}) \quad (9)$$

где  $\Gamma(z)$  - гамма - функция.

В работе [1] при получении результата (6.1) использовалось условие (6). Как следует из всего изложенного, для того, чтобы матрица  $\Lambda$  имела вид (6.12) с  $\varphi$  из (9), необходимо постоянство  $h_2$  и  $h_1$  лишь в эффективной зоне (6.5).





$$\varphi = \frac{1}{3a^2} + \frac{8}{45a^6} + \dots$$

$$a^2 > 4$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{a^2}{4} \left( \ln \frac{a^2}{4e} + 0,577 \right) + \dots$$

$$a^2 \ll 4$$

Рис.1.

### Л и т е р а т у р а

1. Froissart M., *Acta R. Nucl. Instr. and Methods* 7, 297 (1960)
2. Х.А.Симонян, Ю.Ф.Орлов. *ЖЭТФ* 45, № 2, 173 (1963).
3. Ю.Ф.Орлов, С.А.Хейфец. *Изв. А.Н.Арм.ССР X111 № 1*, 169 (1960).
4. Х.А.Симонян. *Тр. 1У Международной конференции по ускорителям, Дубна* (1963).
5. Ю.А.Плис, Л.М.Сороко. *Тр. 1У Международной конференции по ускорителям, Дубна* (1963).
6. П.Р.Зенкевич. *Тр. 1У Международной конференции по ускорителям, Дубна* (1963).
7. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. *Препринт ИЯФ СО АН СССР 2-70; ДАН СССР* (1970) (в печати).
8. V. Bargmann, L. Michel, V. Telegdi  
*Phys. Rev. Lett.* 2, 435 (1959)
9. V.N. Baier, V.M. Katkov, V.M. Strakhovenko  
*Phys. Lett.* 31A N4 (1970)
10. Stueckelberg E. G. *Helv. Phys. Acta*, 5, 370 (1932)
11. Г.М.Заславский. *Лекции по применению метода ВКБ в физике, НГУ, Новосибирск* (1965).
12. Хединг Д. *Введение в метод фазовых интегралов. М., Мир* (1965).
13. А.А.Соколов, И.М.Тернов. *ДАН СССР* 153, 1052 (1963).
14. В.Н.Байер, В.М.Катков. *ЖЭТФ* 52, 1422 (1967).



15. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. "Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений". Ф.М., М., (1962).
16. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, ОГИЗ(1948).
17. А.А.Абрамов. Таблицы  $\ln \Gamma(z)$  в комплексной области, Изд-во АН СССР (1953).

---

Ответственный за выпуск **ДЕРБЕНЕВ**  
Подписано к печати **29.06.70г.**  
Усл. **2** печ.л., тираж **300** экз. Бесплатно.  
Заказ № **44** ПРЕПРИНТ.

---

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР.