ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 47-70

А.Б.Михайловский, А.М.Фридман, В.С.Цыпин

О НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ ПЛАЗМЫ БОЛЬШОГО ДАВЛЕНИЯ, УДЕРЖИВАЕМОЙ ПЛОТНОЙ ОБОЛОЧКОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ГАЗА

Новосибирск

1970

Ордена Ленина Институт атомной энергии имени И.В.Курчатова

Институт ядерной физики Сибирского отделения АН СССР

А.Б.Михайловский, А.М.Фридман, В.С.Цыпин

О НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ ПЛАЗМЫ БОЛЬШОГО ДАВЛЕНИЯ, УДЕРЖИВАЕМОЙ ПЛОТНОЙ ОБОЛОЧКОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ГАЗА

Москва

1970

§ 1. Введение

Исследование неустойчивостей неоднородной плазмы с нулевым и почти нулевым градиентом давления, $\nabla p \approx 0$, представляет интерес в связи с проблемой удержания горячей плазмы давлением плотной оболочки нейтрального газа. Эта проблема обсуждалась Альфвеном и его сотрудниками (см.Альфвен и Смарс /1/, Ленерт /2/), а в последнее время Г.И.Будкером и его сотрудниками (см.Алиханов и др. /3/). Ранее в работах /4/ и /5/ были исследованы неустойчивости бесстолкновительной плазмы большого давления, $\beta \equiv 8\pi p / B^2 >> 1$, (B – магнитное поле в плазме) в условиях строгого равенства $\nabla p = 0$. Было показано, что в такой плазме могут раскачиваться колебания обоих фундаментальных типов: магнито-звуковые, /4/ и альфвеновские, /5/. (О классификации колебаний неоднородной плазмы с конечным и большим β ,см. работу /6/).

Картина неустойчивостей плазмы с $\beta >> 1$ однако весьма чувствительна к наличию даже небольшого градиента давления. Это связано с тем обстоятельством, что уже при $1/\beta \lesssim |\partial \ln p / \partial \ln n| << 1$ (n – плотность плазмы) начинает играть важную роль пространственная неоднородность магнитного поля, поскольку при этом $|\partial \ln B / \partial \ln n| \gtrsim 1$ (напомним, что $\nabla \ln B = -\frac{\beta}{2} \nabla \ln p$). Раскачка колебаний магнито-звукового типа в бесстолкновительной плазме с $|\partial \ln B / \partial \ln n| \gtrsim 1$ была рассмотрена в работе /7/. Исследованию раскачки колебаний альфвеновского типа при $\nabla B \neq 0$ посвящена настоящая работа.

Вначале мы сформулируем некоторые общие замечания о свойствах волн альфвеновского типа в плазме с $\beta >> 1$, необходимые для лучшего понимания механизма раскачки этих волн, § 2. Затем, в § 3 исследуем неустойчивости бесстолкновительной плазмы, а в § 4 – столкновительной. Результаты обсудим в § 5.

§ 2. Общие замечания о свойствах волн альфвеновского типа

Нас будут интересовать низкочастотные, $\omega \ll \omega_{Bi}$, длинноволновые, $k_\perp \rho_i \ll 1$, колебания плазмы большого давления, $\beta \gg 1$, в магнитном поле с прямыми и параллельными силовыми линиями, $\vec{B} \parallel \vec{z}$. Координатно-временную зависимость этих возмущений примем в виде $\exp(-i\omega t + i k_\perp r_\perp + i k_z z)$. Посредством $\omega_{Bi} = e_i B / m_i c$ и $\rho_i = (T / m_i \omega_{Bi}^2)^{1/2}$ здесь обозначены циклотронная частота ионов и их ларморовский радиус, T - температура, одинаковая для ионов и электронов, e_i, m_i - заряд и масса ионов, c - скорость света.

В пренебрежении малыми членами порядка $(k_\perp \rho_i)^2$ общее дисперсионное уравнение низкочастотных длинноволновых колебаний распадается на два, соответствующие волнам резным типов. Волны альфвеновского типа в этом приближении описываются уравнением

$$Q^{(0)} \equiv \omega^2 - \omega\Omega - \omega_n \Omega - k_z^2 c_A^2 = 0 \qquad (2.1)$$

Здесь $c_A^2 = B^2 / 4\pi m_i n$ - квадрат скорости Альфвена,

$\Omega = k_y \varkappa_B c T / e_i B$, $\omega_n = k_y \varkappa_n c T / e_i B$, $\varkappa_B = \partial \ln B / \partial x$, $\varkappa_n = \partial \ln n / \partial x$. Предполагается, что градиенты плотности и магнитного поля (а также температуры и давления) направлены по оси x. В (2.1) опущены члены порядка $1/\beta$.

При $\nabla B = 0$ из (2.1) следует закон дисперсии обычных альфвеновских волн,

$$\omega^2 = k_z^2 c_A^2 \qquad (2.2)$$

При $k_z = 0$ и $|\varkappa_B / \varkappa_n| \ll 1$ вместо этого имеем

$$\omega^2 = \omega_n \Omega \qquad (2.3)$$

Такие колебания, как и (2.2), обладают вещественной частотой, если

$$b \equiv \partial \ln B / \partial \ln n > 0 \qquad (2.4)$$

Если же $b < 0$, то колебания типа (2.3) имеют чисто мнимую частоту, что соответствует гидродинамической неустойчивости с инкрементом

$$\gamma = \sqrt{-b}\,|\omega_n| \qquad (2.5)$$

При еще более сильной неоднородности магнитного поля, $|b| \gg 1$ и $k_z c_A \ll \Omega$, уравнение (2.1) имеет вещественные корни разного порядка: большой,

$$\omega_1 = \Omega \qquad (2.6)$$

и малый,

$$\omega_2 = -\omega_n - \frac{k_z^2 c_A^2}{\Omega} \qquad (2.7)$$

Целью нашего последующего анализа будет выяснение возможности раскачки колебаний типа (2.1) вследствие неучтенных в (2.1) эффектов порядка $(k_\perp \rho_i)^2$. При таком анализе будет предполагаться, что корни (2.1) вещественны.

Дисперсионное уравнение для волн альфвеновского типа с учётом членов порядка $(k_\perp \rho_i)^2$ можно представить как обобщение (2.1),

$$Q^{(0)} + Q^{(1)} = 0 \qquad (2.8)$$

где $Q^{(1)}$ - некоторая комплексная функция ω и $\vec{k}$, вид которой приведем несколько ниже. Мнимая часть этой функции определяет инкремент колебаний:

$$\gamma = -\frac{\operatorname{Im} Q^{(1)}}{\partial Q^{(0)} / \partial \omega} \qquad (2.9)$$

Формула (2.9) по смыслу аналогична хорошо известной формуле теории колебаний однородной плазмы

$$\gamma = - \frac{Im\,\varepsilon}{\partial Re\,\varepsilon / \partial \omega} \qquad (2.10)$$

получающейся из обращения в нуль комплексной диэлектрической проницаемостиплазмы, $\varepsilon(\vec{K}, \omega) = 0$. Соотношение (2.10) часто трактуется в энергетических терминах: величина $\omega \frac{\partial Re\,\varepsilon}{\partial \omega}$ понимается как энергия колебаний (в единицах $\vec{E}^2/8\pi$, $\vec{E}$ – электрическое поле), а $\omega Im\,\varepsilon$ – как скорость диссипации энергии колебаний. Аналогичным образом можно трактовать и уравнение (2.9). Тогда роль безразмерной энергии колебаний будет играть величина

$$W = \frac{1}{\omega} \frac{\partial Q^{(0)}}{\partial \omega} \qquad (2.11)$$

При $Q^{(0)}$ вида (2.1) эта величина равна

$$W = 2 - \frac{\Omega}{\omega} \qquad (2.12)$$

Из (2.12) вытекает интересное следствие: энергия волн альфвеновского типа отрицательна, если

$$\frac{\Omega}{\omega} > 2 \qquad (2.13)$$

Этому условию удовлетворяет, в частности, корень (2.7) при $\beta < 0$, полученный в предположении $|\beta| >> 1$.

Используя (2.1) и (2.13), найдем, что волны с $W < 0$ существуют, если

$$\beta < - K_z^2 C_A^2 / \omega_n^2 \qquad (2.14)$$

и если, кроме того удовлетворяется неравенство

$$(\beta + 2)^2 > 4[1 - (K_z C_A / \omega_n)^2] \qquad (2.15)$$

которое следует учитывать при $|K_z C_A| < |\omega_n|$.

Исследуемые ниже неустойчивости плазмы с большим отрицательным β связаны с раскачкой волн с $W < 0$. В случае $\beta = 0$ $W > 0$, а неустойчивости обусловлены отрицательной диссипацией $\omega Im\, Q^{(1)} < 0$.

Данное здесь определение энергии колебаний и диссипации энергии колебаний, конечно, не является строгим и имеет иллюстративный характер. Строгий вывод уравнения баланса энергии колебаний неоднородной плазмы развивается Юнгвиртом /8/. Однако проведенный в /8/ анализ относится только к некоторым частным типам колебаний и не может быть использован в интересующей нас проблеме волн альфвеновского типа.

§ 3. Неустойчивости бесстолкновительной плазмы

Общий вид функции $Im\, Q^{(1)}(\vec{K}, \omega)$ для бесстолкновительной плазмы при произвольных K_z, ω и β приведен в работе /9/. Здесь мы будем считать $\beta >> 1$ и рассмотрим только наиболее интересные возмущения с

$$K_z V_{Ti} >> (\omega, \Omega) \qquad (3.1)$$

В этих условиях x)

$$Im\, Q^{(1)} = \frac{9\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}} (K_\perp \rho_i)^2 |K_z| V_{Ti} \frac{(1 + \omega_n/\omega)^2}{1 + \omega_n/2\omega} \qquad (3.2)$$

$$V_{Ti} = (T/m_i)^{1/2}$$

Видно, что $\omega Im\, Q^{(1)} < 0$ (отрицательная диссипация) при

$$-\frac{1}{2} < \frac{\omega}{\omega_n} < 0 \qquad (3.3)$$

Вследствие отрицательной диссипации должны раскачиваться волны с положительной энергией, если их частота удовлетворяет условию (3.3). Условиям $W > 0$ и (3.3) удовлетворяют, в част –

x) Вывод (3,2), а также подробное исследование устойчивости бесстолкновительной плазмы относительно раскачки волн альфвеновского типа содержится в /12/.

ности, возмущения плазсы с $\nabla p = 0\ (\Omega = 0)$, если, согласно (2.2), их продольное волновое число не слишком велико,

$$k_z < \omega_n / \sqrt{2}\, c_A \qquad (3.4)$$

Инкремент этих колебаний при $k_z c_A \ll \omega_n$ равен

$$\gamma = \frac{9}{8\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\beta}{2}}\, \omega_n. \qquad (3.5)$$

Такого рода неустойчивость волн с положительной энергией была рассмотрена в работе /5/.

При $|\theta| \gg 1$ в (3.1) следует подставлять корни $\omega = \omega_{1,2}$, определяемые выражениями (2.6), (2.7). В случае корня $\omega = \omega_1$ имеем $\omega \operatorname{Im} Q^{(1)} > 0$, $W > 0$, так что колебания типа (2.6) не раскачиваются. Если $\omega = \omega_2$ и $(k_z c_A)^2 < \omega_n^2 |\theta|$, то при любом знаке θ $\omega \operatorname{Im} Q^{(1)} > 0$ (положительная диссипация). Знак энергии колебаний зависит от знака θ, причём $W < 0$ при $\theta < 0$ (отрицательная энергия). Таким образом, с корнем $\omega = \omega_2$ связана неустойчивость волн с отрицательной энергией плазмы с $\partial \ln B / \partial \ln n < 0$.

Из (3.2), (2.9), (2.1) находим, что инкремент этой неустойчивости порядка

$$\gamma \simeq (k_\perp \rho_i)^2 k_z v_{T_i} \qquad (3.6)$$

Он максимален при

$$k_z \simeq \sqrt{|\theta|}\ \omega_n / c_A \qquad (3.7)$$

и при этом

$$\gamma \simeq (k_\perp \rho_i)^2 \sqrt{\beta |\theta|}\ \omega_n \qquad (3.8)$$

Обсуждаемые в этом параграфе неустойчивости обусловлены взаимодействием с колебаниями резонансных ионов и потому являются существенно кинетическими. Однако, как будет показано

в следующем параграфе, эти неустойчивости имеют аналог в столкновительной плазме, когда эффекты резонансных частиц отсутствуют.

§ 4. Неустойчивости столкновительной плазмы

Альфвеновские волны в столкновительной плазме обсуждались ранее в работе /10/. Проведенный там анализ ограничивается случаем возмущений с $k_z = 0$. Нас однако интересуют волновые числа k_z, такие, что

$$\frac{k_z^2 v_{T_i}^2}{\nu_i} \gg (\omega, \Omega) \qquad (4.1)$$

где ν_i – частота ионно-ионных столкновений. Условие (4.1) аналогично принятому в § 3 условию (3.1). На границе применимости столкновительного и бесстолкновительного приближений, когда $k_z v_{T_i} \simeq \nu_i$, условия (4.1) и (3.1) совпадают между собой.

Дисперсионное уравнение для колебаний столкновительной плазмы с $\beta \gg 1$ можно получить, используя общие гидродинамические уравнения с выражениями для тензора вязкости и потока тепла, полученными в работе /10/. Это дисперсионное уравнение можно записать в виде (2.8), где $Q^{(0)}$ определяется прежней формулой (2.1), а функция $\operatorname{Im} Q^{(1)}$ имеет вид:

$$\operatorname{Im} Q^{(1)} = \frac{1}{3} (k_\perp \rho_i)^2 \frac{\omega \nu_i \left(0,9 + 2,4 \frac{\omega_n}{\omega} + 0,1 \frac{\omega_n^2}{\omega^2}\right)}{1 + 1,7 \frac{\omega_n}{\omega}} \qquad (4.2)$$

(Подробный вывод формулы (4.2) предполагается изложить в другой работе).

При $\theta = 0$ и $k_z c_A \ll \omega_n$ из (2.1), (2.8), (4.2) следует, что плазма неустойчива относительно возмущений с частотой (2.2) и инкрементом

$$\gamma = \frac{1}{204} (k_\perp \rho_i)^2 \frac{\nu_i \omega_n}{k_z v_{T_i}} \sqrt{\beta} \qquad (4.3)$$

Видно, что при $k_z v_{Ti} \simeq \nu_i$ выражения (4.3) и (3.5) качественно совпадают. Уравнение (4.3), как и уравнение (3.5), описывает раскачку волн положительной энергии, $W>0$, из-за эффекта отрицательной диссипации, $\omega\, \mathrm{Im}\, Q^{(2)}<0$. Однако теперь эта диссипация обусловлена парными столкновениями между ионами, а не взаимодействием резонансных ионов с колебаниями.

При $|\beta|>>1$ и $(k_z C_A)^2<<|\beta|\omega_n^2$ вместо (4.3) получается следующее выражение для мнимой части частоты (при $Re\,\omega=\omega_z$)

$$\gamma=-\frac{2}{3\beta}(k_\perp \rho_i)^2\nu_i \tag{4.4}$$

Отсюда видно, что при $\partial \ln B/\partial \ln n<0$ имеет место неустойчивость. Этот результат аналогичен (3.6). Оба эти выражения качественно совпадают при $\nu_i \simeq k_z v_{Ti}$. Как и в случае бесстолкновительной плазмы, неустойчивость связана с раскачкой волн отрицательной энергии, $W<0$, из-за положительной диссипации $\omega\, \mathrm{Im}\, Q^{(2)}>0$. В данном случае эта диссипация обусловлена парными столкновениями.

§ 5. Заключение

Обсудим роль рассмотренных выше неустойчивостей в проблеме удержания горячей плазмы давлением нейтрального газа, о которой упоминалось в § 1. Можно представить себе три основных варианта такого удержания: (а) с однородным по радиусу магнитным полем, $\nabla B=0$; (в) с магнитным полем, нарастающим к периферии, $\beta\equiv\partial \ln B/\partial \ln n>0$; (с) с магнитным полем, убывающим к периферии, $\beta<0$. Для каждого из этих случаев теория предсказывает неустойчивости. Наиболее сильно неустойчивости предсказываются для вариантов (а) и (в): согласно работам /4/, /5/, /6/, такие неустойчивости имеют инкремент $\gamma\simeq\omega_n$ и малую продольную длину волны, $k_z \gtrsim \omega_n/v_{Ti}$. (Отметим, что к варианту (в) относится и стационарное состояние плазмы, обсуждавшееся в работе Алиханова и др. /3/. В случае (с) при достаточно большой неоднородности магнитного поля, $|\beta|>>1$, столь опасные неустойчивости отсутствуют. Картина неустойчивостей в этом случае оказывается такой. Существуют неустойчивости с $\gamma\simeq\omega_n$, но их продольная длина волны достаточно велика, $k_z<<\omega_n/v_{Ti}$. Такие неустойчивости обсуждались в работах /7/, /11/. В принципе, их можно подавить широм. Кроме того, существуют неустойчивости с $k_z \gtrsim \omega_n/v_{Ti}$, но со сравнительно малым инкрементом, $\gamma\simeq\omega_n(k_\perp\rho_i)^2$. Теория таких неустойчивостей была изложена выше.

Условие $\partial \ln B/\partial \ln n<0$ означает, что магнитное поле в центре больше, чем на периферии. Именно такого типа конфигурация магнитного поля представляется наиболее подходящей в случае, когда это поле используется для уменьшения теплопроводности и диффузии, а не для удержания плазмы. Наличие магнитного поля принципиально необходимо только в центре, а не на периферии, где вследствие частых столкновений замагниченность плазмы не играет роли. Поэтому вывод о повышенной устойчивости плазмы с $\partial \ln B/\partial \ln n<0$ в целом следует считать благоприятным, не забывая однако, что и в этом наиболее благоприятном случае плазма не свободна от неустойчивостей.

Авторы благодарны академику Г.И.Будкеру, по инициативе которого была выполнена настоящая работа.

Литература

/ 1 / Alfven, H., Smars, E. Nature 188, 4753 (1960) 801.

/ 2 / Lehnert, B., Nuclear Fusion 8, 3 (1968) 173.

/ 3 / Alikhanov, S. G., Konkashbaev, I. K., Chebotaev, P. Z. Nuclear Fusion, 10, 1 (1970) 13.

/ 4 / Михайловский А.Б., ДАН СССР, 192, 1 (1970) 74.

/ 5 / Mikhailovsky, A. B., Fridman, A. M., Plasma Physics 12, (1970).

/ 6 / Михайловский А.Б., Фридман А.М., ЖЭТФ, 51, (1966) 1430.

/ 7 / Михайловский А.Б., ЖТФ, 40 (1970).

/ 8 / Yungwirth, K., Nuclear Fusion 8, 1 (1968), 23.

/ 9 / Михайловский А.Б., Фридман А.М., ЖТФ, 37, 10 (1967), 1782.

/10/ Mikhailovsky, A. B., Tsypin, V. S., Plasma Physics 12, (1970).

/11/ Михайловский А.Б., Цыпин В.С., ЖЭТФ, 59, 8 (1970).

/12/ Фридман А.М., ЖТФ, 40, (1970).

Ответственный за выпуск А.М.ФРИДМАН

Подписано к печати 3.07.70г.

Усл. 0,6 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.

Заказ № 47

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.