

88

1

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР**

ИЯФ 51-70

А.М.Фридман

**РАСКАЧКА ВОЛН АЛЬФВЕНОВСКОГО ТИПА
В ПЛАЗМЕ БОЛЬШОГО ДАВЛЕНИЯ**

Новосибирск

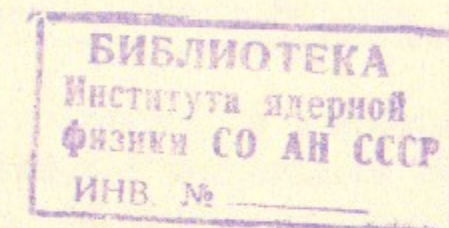
1970

А.М.Фридман

РАСКАЧКА ВОЛН АЛЬФВЕНОВСКОГО ТИПА В ПЛАЗМЕ
БОЛЬШОГО ДАВЛЕНИЯ

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследуются неустойчивости неоднородной плазмы большо-
го давления, связанные раскачке волн альфвеновского типа. Най-
дены инкременты и границы неустойчивостей как по длине воз-
буждаемых волн, так и по величине отношения градиента магнит-
ного поля к градиенту температуры $T \nabla B / B \nabla T$. В част-
ности показано, что стабилизация гидродинамической неустойчи-
вости происходит при $|T \nabla B / B \nabla T| > \frac{1}{4}$, стабилизация ки-
нетической неустойчивости имеет место, если $T \nabla B / B \nabla T < -2$.



§ 1. Введение

В работе исследуются неустойчивости плазмы большого давления, $\beta \equiv 8\pi P/B^2 \gg 1$, с малым градиентом давления,

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \ln n} \approx 1/\beta \quad (n, p - \text{плотность и давление плазмы,}$$

B - величина магнитного поля, направленного по оси z), Ранее такое исследование проводилось в работе /1/ в приближении нулевого ларморовского радиуса ионов, $Z_i \equiv K_{\perp}^2 \rho_i^2 \rightarrow 0$

($\rho_i = T/m_i \omega_{Bi}^2$, $\omega_{Bi} = eB/m_i c$; T - температура, m_i - масса иона, e - заряд электрона, c - скорость света в вакууме, K_{\perp} - поперечная компонента волнового вектора). Этого приближения, как было показано в работах /2-4/, не достаточно, если неустойчивости связаны с раскачкой колебаний альфвеновского типа. Нашей целью будет исследование именно таких колебаний.

Некоторые результаты, касающиеся раскачки альфвеновских волн в плазме большого давления, приводились в работах /5/, /6/. Здесь мы проведем более подробный анализ всей проблемы в целом. В частности будут рассмотрены возмущения как с большими, так и с малыми продольными фазовыми скоростями (по отношению к тепловой скорости ионов V_{Ti}). Возмущения с $\omega/k_z > V_{Ti}$ важны при большом продольном размере плазмы, а также при не слишком малой величине $K_{\perp} \rho_i$, поскольку частота ω интересующих нас волн пропорциональна поперечному волновому числу, $\omega \sim K_{\perp}$.

§ 2. Нулевое приближение по Z_i .

Как было упомянуто выше, в нулевом приближении по Z_i резонансное взаимодействие с частицами волн альфвеновского типа отсутствует и частота ω определяется соотношением:

$$\omega \equiv \omega^{(0)} = \frac{1}{2} \left\{ \omega_{pi}^* + \omega_{ni} \pm \left[(\omega_{pi}^* - \omega_{ni})^2 - 4 \omega_{pi}^* \omega_{ni} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln \rho_i} + 4 c_A^2 K_z^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (1)$$

Здесь $\omega_{ni} = k_y x_n V_{Ti} / \omega_{Bi}$, $\omega_{pi}^* = k_y x_p V_{Ti} / \omega_{Bi}$, $x_n = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x}$,

$$x_p = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Для удобства рассмотрим в отдельности следующие три случая:

- 1) $|\omega_M| \gg |\omega_T^*|$, $|k_z| c_A$; 2) $|\omega_T^*| \gg |\omega_M|$, $|k_z| c_A$; 3) $|k_z| c_A \gg |\omega_M|$, $|\omega_T^*|$.

В случае 1) из (1) получим следующие два корня:

$$\omega_{1,2}^{(0)} = \omega_{M1} ; \omega_2^{(0)} = \omega_{T1}^* - \frac{k_z^2 c_A^2}{\omega_{M1}} ; (|\omega_M| \gg |\omega_T^*|, |k_z| c_A) \quad (2)$$

Соответственно, в остальных двух случаях из (1) имеем:

$$\omega_{1,2}^{(0)} = \pm \sqrt{-\omega_{T1}^* \omega_{M1}} ; (|\omega_T^*| \gg |\omega_M|, |k_z| c_A) \quad (3)$$

$$\omega_{1,2}^{(0)} = \pm |k_z| c_A ; (|k_z| c_A \gg |\omega_M|, |\omega_T^*|) \quad (4)$$

Относительно двух последних корней заметим, что при $\beta \gg 1$ они существуют лишь в области частот $\omega \ll |k_z| v_{Ti}$.

Из (1) нетрудно найти условия, при которых может развиваться гидродинамическая неустойчивость. Оказывается, что таких условий три и в целом они являются необходимыми и достаточными условиями неустойчивости с инкрементом $\gamma \sim \omega^{(0)}$.

$$\left. \begin{aligned} |\omega_{M1}| < \frac{1}{2} |\omega_{T1}^*| \\ k_z < \frac{(\omega_{T1}^* \omega_{M1})^{1/2}}{c_A} \\ \frac{\omega_{p1}}{\omega_{T1}^*} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Первое и второе неравенства из условия (5) определяют, соответственно, отношения градиентов магнитного поля к градиенту плотности и длины волн, при которых может развиваться гидродинамическая неустойчивость.

§ 3. Уравнения, учитывающие резонансное взаимодействие частиц с волной

Чтобы рассмотреть резонансное взаимодействие волн альфвеновского типа с частицами, необходимо учитывать члены первого порядка малости по Z_i . При этом частота колебаний, вообще говоря, окажется комплексной, так что

$$\omega = \omega^{(0)} + i\gamma$$

Выражение для γ волн альфвеновского типа вычислено в /3/:

$$\gamma = -\frac{1}{2} \frac{N_1^{(1)}}{N_1^{(0)}} \left\{ N_1^{(1)} + \frac{1}{2} [N_2^2 \delta_3 - 2d_{23} N_2 N_3 + N_3^2 (\delta_2 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2})] \right\} \quad (6)$$

где в правой части следует считать $\omega = \omega^{(0)}$, а функции $N_2, N_3, \delta_2, \delta_3, d_{23}$ должны быть взяты в старшем порядке по Z_i . Все функции выражения (6) вычислены в /3/. Воспользуемся ими как исходными:

$$N_2 = -\frac{4\pi e^2}{2\theta T \omega} \hat{e}_i \left\{ n_0 \omega_{M1} Z_i \left[1 + \frac{1}{4} \langle S \delta^2 (\omega - k_z v_z) \rangle \right] \right\}$$

$$N_3 = k_z \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{4\pi e^2}{T \omega} \hat{e}_i \left[n_0 \omega_{M1} Z_i \langle S \delta^2 v_z \rangle \right]$$

$$\delta_2 = -\sum_{i,e} \frac{4\pi e^2}{2\theta^2 T \omega} \hat{e}_i \left[n_0 \omega_{M1}^2 \langle S \delta^2 \rangle \right]$$

$$\delta_3 = -\sum_{i,e} \frac{4\pi e^2}{T \omega} \hat{e}_i \left[n_0 \langle S v_z^2 \rangle \right]$$

$$d_{23} = \sum_{i,e} \frac{4\pi e^2}{T \omega 2\theta} \hat{e}_i \left[n_0 \omega_{M1} \langle S v_z \delta \rangle \right]$$

$$\text{Im } N_1^{(1)} = \frac{4\pi e^2}{T_i} \hat{e}_i \left(\frac{n_0 T_i}{m_i \omega_{p1}^2} \right) \left(\frac{k^2 Z_i}{16} \right) \frac{\omega_{M1}}{\omega^{(0)}} \text{Im} \langle S_i \delta^2 (\omega - k_z v_z) \rangle \quad (7)$$

Суммирование в (7) производится по ионам и электронам, причём под знаком суммы индексы суммирования опущены. Оператор $\hat{\epsilon}$ действует на функции плотности и температуры и имеет вид:

$$\hat{\epsilon} = 1 - \frac{k_z T}{m \omega \omega_{Bi}} \left(\frac{\partial n_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial n_0} + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \right) \quad (8)$$

Символ $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по максвелловской функции, нормированной на единицу, т.е.

$$\langle \dots \rangle = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mV_z^2}{2T}\right) dV_z \int_0^{\infty} e^{-\epsilon} d\epsilon (\dots) \quad (9)$$

где $\epsilon = mV_z^2/2T$. В (7) используется также обозначение $\gamma = (\omega - k_z V_z - \epsilon \omega_{Bi})^{-1}$

§ 4. Ионная температурная неустойчивость резонансного типа ($|\omega - \epsilon \omega_{Bi}| \ll |k_z V_{Ti}|$).

При $|\omega - \epsilon \omega_{Bi}| \ll |k_z V_{Ti}|$ из (9) имеем:

$$N_2 = -\frac{3}{8} \beta k \frac{k^2 c^2}{\omega \omega_{Bi}} \left[\left(1 - \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right) \left(1 - i\sqrt{\pi} \frac{\omega_{Bi}}{|k_z V_{Ti}|}\right) + \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_{Bi} \omega_{Ti}^*}{\omega |k_z V_{Ti}|} \right]$$

$$N_3 = k_z \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \frac{4\pi e^2}{T \omega} \cdot \frac{n_0 \omega_{Bi} z_i}{2 k_z} \left[\left(1 + 6 \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right) + i\sqrt{\pi} \frac{\omega - 3\omega_{Bi}}{|k_z V_{Ti}|} \left(1 + \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right) \right]$$

$$\epsilon_2 = \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \beta \frac{k^2 c^2}{|k_z V_{Ti}| \omega} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right)$$

$$\epsilon_3 = \frac{2}{k_z^2 z_i^2} + \frac{i\sqrt{\pi}}{|k_z V_{Ti}|} \cdot \frac{1}{k_z^2 z_i^2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega} - 2 \frac{\omega_{Bi}}{\omega} + 2 \frac{\omega_{Bi}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right) \right]$$

$$\text{Im } N_1^{(2)} = -\frac{3}{8} \sqrt{\pi} k^2 \frac{k^2}{k_z |k_z|} \cdot \frac{\omega_{Bi}^2}{\omega_{Bi}^*} \frac{c^2}{C_A V_{Ti}} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right)$$

$$N_1^{(2)} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} k^2 - \frac{4\pi e^2}{T_i} n_0 z_i \left(1 - \frac{\omega_{Ti}^* \omega_{Bi}}{\omega^2}\right)$$

$$d_{23} = \frac{\sqrt{2} z_i}{k_z^2 z_{cl}^2} \cdot \frac{k_z V_{Ti}}{\omega} \left\{ \frac{\omega_{Bi}}{\omega} - \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega}{|k_z V_{Ti}|} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega} - 2 \frac{\omega_{Bi}}{\omega} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right) \right] \right\} \quad (10)$$

При выводе формул (10) предполагалось, что $|\omega_{Bi}^*| \ll |\omega_{Ti}^*|$. Подставляя (10) в (6) получим:

$$\gamma = -\frac{g}{32} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} z_i \frac{\omega^{(0)2}}{|k_z V_{Ti}|} \frac{\left(1 - \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega^{(0)}}\right)^2}{\left[1 - \frac{\beta^2}{8} \frac{\omega^{(0)} \omega_{Bi}^*}{k_z^2 V_{Ti}^2} \left(1 - 2 \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega^{(0)}}\right)\right] \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega^{(0)}}\right)} \quad (11)$$

Рассмотрим ветвь колебаний 1) $|\omega_{Bi}| \gg |\omega_{Ti}^*|$, $|k_z| C_A$.

Выберем корень $\omega_2^{(0)} = \omega_{Bi}$. Тогда $\omega^{(0)} \gg \omega_{Ti}^*$

и выражение (11) упростится следующим образом:

$$\gamma = -\frac{g}{32} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} z_i \frac{\omega^{(0)2}}{|k_z V_{Ti}|} \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{8} \frac{\omega^{(0)} \omega_{Bi}^*}{k_z^2 V_{Ti}^2}} \quad (12)$$

Отсюда видно, что неустойчивость сможет иметь место при условиях:

$$\frac{\omega_{Ti}^*}{\omega_{Bi}^*} < 0; \quad k_z < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\omega_{Ti}^* \omega_{Bi})^{1/2}}{C_A} \quad (13)$$

совпадающих со вторым и третьим условиями (5). Однако первое условие (5) является обратным тому, которое использовалось при получении инкремента (12).

Таким образом, при достаточно большом значении величины градиента магнитного поля, оказывающего стабилизирующее влияние на гидродинамическую неустойчивость (как это видно из (5)), может развиваться кинетическая неустойчивость, связанная с резонансным взаимодействием ионов с волнами альфвеновского типа.

Подставим в (11) второй корень $\omega_2^{(0)} = \omega_{Ti}^* - k_z^2 C_A^2 / \omega_{Bi}$

$$Y = \frac{g}{16} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} Z_i \frac{K_z^2 C_A^2}{\omega_{Mi}^2} \cdot \frac{K_z^4 C_A^4}{|K_z| V_{Ti} \left(\frac{1}{2} \omega_{Ti}^* \omega_{Mi} - K_z^2 C_A^2 \right)} \quad (14)$$

В этом случае длины волн раскачиваются в области $K_z < \frac{(\omega_{Ti}^* \omega_{Mi})^{1/2}}{\sqrt{2} C_A}$, при $\omega_{Ti}^*/\omega_{Mi} > 0$ (или $\omega_{Ti}^*/\omega_{Pi}^* < 0$), как и выше (см. (13))

$$Y = \frac{g}{8} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} Z_i \frac{K_z^6 C_A^6}{|K_z| V_{Ti} \omega_{Mi}^3 \omega_{Ti}^*} \quad (15)$$

В области $K_z \gg (\omega_{Ti}^* \omega_{Mi})^{1/2} C_A^{-1}$ имеем затухания колебаний. При старом условии $\omega_{Pi}^*/\omega_{Ti}^* < 0$ может развиваться неустойчивость в узкой области волновых чисел:

$$K_z^2 C_A^2 < \omega_{Ti}^* \omega_{Mi} < 2 K_z^2 C_A^2 \quad (\omega_{Ti}^*/\omega_{Mi} > 0):$$

$$Y = -\frac{g}{8} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} Z_i \frac{\delta^2}{|K_z| V_{Ti}} \cdot \frac{K_z^4 C_A^4}{\omega_{Mi}} \cdot \frac{1}{\left(2 + \frac{\delta^2}{K_z^2 C_A^2} \right) (\delta^2 - K_z^2 C_A^2)} \quad (16)$$

Здесь δ имеет размерность частоты, причём $\delta < |K_z| C_A$.

Рассмотрим другую ветку 2) $|\omega_{Ti}^*| \gg |\omega_{Mi}|$, $|K_z| C_A$.

В этом случае согласно (3) $\omega_{\pm 2}^{(0)} = \pm (-\omega_{Ti}^* \omega_{Mi})^{1/2}$, т.е. $|\omega^{(0)}| \ll |\omega_{Ti}^*|$.

Воспользовавшись последним неравенством, из (11) получим:

$$Y = \frac{g}{16} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} Z_i \frac{\omega^{(0)}}{|K_z| V_{Ti}} \cdot \frac{\omega_{Ti}^*}{\left(1 + \frac{\beta^2}{4} \frac{\omega_{Pi}^* \omega_{Ti}^*}{K_z^2 V_{Ti}^2} \right)} \quad (17)$$

Поскольку $\omega_{\pm 2}^{(0)}$ имеет противоположные знаки, инкремент (17) существует также при условии (2) стабилизации гидродинамической неустойчивости.

Таким образом в диапазоне медленных волн $|\omega - \delta \omega_{Mi}| \ll |K_z| V_{Ti}$ в положительной и отрицательной областях значений $\omega_{Mi}/\omega_{Ti}^*$ оказалась возможной кинетическая неустойчивость (см. рис. 1а).

Ветка $\omega^{(0)} = |K_z| C_A$ не дает ничего нового: неустойчивость в этом случае развивается в более широкой области волновых векторов в отличие от (5):

$$K_z < \frac{\beta}{4} \cdot \frac{\omega_{Pi}^*}{C_A}$$

§ 5. Исследование устойчивости плазмы в области

"промежуточных" частот $|K_z| V_{Ti} \ll |\omega - \delta \omega_{Mi}| \ll |K_z| V_{Te}$.

Своеобразие этой области частот состоит в том, что при малой величине частоты магнитного дрейфа ω_{Mi} по сравнению с ω взаимодействие с волной резонансных ионов экспоненциально мало. В этом случае с волной взаимодействуют только резонансные электроны. При $|\omega_{Mi}| \gg |\omega|$ вклад резонансных ионов в мнимую часть частоты сравним с вкладом резонансных электронов. Итак, будем различать два случая: 1) $|\omega| \gg |\omega_{Mi}|$, 2) $|\omega| \ll |\omega_{Mi}|$.

В случае 1) имеем:

$$N_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4\pi e n_0}{B} \cdot \frac{K_z}{\omega} \cdot Z_i \left(1 - \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega} \right)$$

$$N_3 = K_z \frac{C^2 K^2}{\omega^2}$$

$$\xi_2 = -\frac{\beta}{2} \frac{C^2 K^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega} - i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|K_z| V_{Te}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{Te}^*}{\omega} \right) \right] \quad (18)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{K_z^2 V_{Te}^2} \left[1 + \frac{\omega_{Te}^*}{\omega} + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|K_z| V_{Te}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_{Te}^*}{\omega} \right) \right]$$

$$d_{23} = \frac{4\pi e n_0}{K_z B} \cdot \frac{K_z}{\omega} \left[1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|K_z| V_{Te}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{Te}^*}{\omega} \right) \right]$$

$$\text{Im } N_1^{(0)} = 0$$

Для вычисления инкремента вновь воспользуемся формулой (8)

$$\gamma = -\frac{9}{32} \sqrt{\pi} \beta \frac{k^2}{k_z^2} \frac{\omega^4}{\omega_{pi}^2 |k_z| V_{Te}} \cdot \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right)^2 \times$$

$$\times \frac{\left[\left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right)^2 \left(2 - \frac{5}{2} \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega} \left(\frac{3}{4} + \frac{\omega_{pi}^{*2}}{\omega^2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) + \frac{3}{2} \frac{\omega_{pi}^{*2}}{\omega^2} \right]}{\left[1 + \frac{\beta}{4} \frac{\omega_{ni} \omega^{(o)}}{k_z^2 V_{Ti}^2} \left(1 - 2 \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) \right] \left[\left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{2} \right]^2} \quad (19)$$

(В правой части равенства везде под ω понимается $\omega^{(o)}$).
При выводе (19) было учтено, что

$$\left| \frac{N_2^2 \delta_3}{N_3^2 \delta_2} \right| \sim \beta^2 \frac{\omega^4}{k_z^4 V_{Ti}^4} \gg 1; \quad \left| \frac{N_2 \delta_3}{\alpha_{23} N_3} \right| \sim \beta \frac{\omega^2}{k_z^2 V_{Ti}^2} \gg 1$$

Случай 1) соответствует $\omega_{1,2}^{(o)} = \pm (-\omega_{ni} \omega_{pi}^*)^{1/2}$; $|\omega^{(o)}| \gg |\omega_{ni}|$,
т.к. $|\omega_{pi}^*| \gg |\omega_{ni}|$, (см. (3)). При учете написанных нера-
венств из (19) имеем:

$$\gamma = \frac{63}{64} \sqrt{\pi} \beta \frac{k^2}{k_z^2} \frac{\omega^4}{\omega_{pi}^2 |k_z| V_{Te}} \cdot \frac{\omega_{pi}^*}{\omega^{(o)}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta}{2} \frac{\omega_{ni} \omega_{pi}^*}{k_z^2 V_{Ti}^2}\right)} \quad (20)$$

Из определения $\omega_{1,2}^{(o)}$ следует, что неустойчивость, опи-
сываемая инкрементом (20), может развиваться и при условии про-
тивоположном последнему условию (5). При последнем условии (5)
она интересна в области волновых векторов, находящейся вне вто-
рого условия (5). В данном случае эта область есть

$$\frac{(\omega_{pi}^* \omega_{ni})^{1/2}}{c_A} < k_z < \frac{\omega_{pi}^*}{c_A} \quad (21)$$

Инкремент неустойчивости по порядку величины равен

$$\gamma \sim Z_i \frac{(-\omega_{ni} \omega_{pi}^*)^{1/2}}{k_z V_{Te}} \omega_{pi}^* \quad (22)$$

В случае 2) $|\omega| \ll |\omega_{ni}|$ имеем:

$$N_2 = -\frac{4\pi e n_0}{B} Z_i \frac{kc}{\omega} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right)$$

$$N_3 = k_z \frac{c^2 k^2}{\omega}$$

$$\delta_2 = \frac{4\pi e n_0}{Z_B B} \cdot \frac{ck}{\omega} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) + i\sqrt{\pi} \frac{\beta}{2} \frac{k^2 c^2}{\omega |k_z| V_{Te}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) +$$

$$+ \frac{i\pi}{Z_B^2 Z_i} \cdot \frac{\omega}{i|\omega_{ni}|} \left(1 + 2 \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right)$$

$$\delta_3 = \frac{1}{k_z^2 V_{Te}^2} \left[1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega} + 4i\sqrt{\pi} \frac{\omega_{ne}^2}{\omega |k_z| V_{Te}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) \right] \quad (23)$$

$$\alpha_{23} = \frac{4\pi e n_0}{k_z B} \cdot \frac{kc}{\omega} \left[1 + 2i\sqrt{\pi} \frac{\omega_{ne}^2}{|k_z| V_{Te}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) \right]$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} N_3^{(1)} = \frac{4\pi^2 e^2}{T_i} \hat{L}_i \left(\frac{n_0 T_i}{M \omega_{pi}^*} \right) \left(\frac{k_z^2 Z_i}{16} \right) \frac{\omega^3}{|\omega_{ni}| \omega_{pi}^*}$$

Подставляя (23) и (6), получим

$$\gamma = -\frac{\frac{\omega^4}{k_z^2 c^2} \frac{Z_i^2}{2} \left[4i\sqrt{\pi} \frac{\omega_{ne}^2}{|k_z| V_{Te} \cdot k^2 c^2} + \pi \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right)^3 \left(1 + 2 \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) \right]}{\left[1 + \frac{\beta}{4} \frac{\omega_{ni} \omega}{k_z^2 V_{Ti}^2} \left(1 - 2 \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) \right]} \quad (24)$$

Здесь $\omega \equiv \text{Re } \omega$. При вычислении (24) были использованы следующие неравенства:

$$\left| \frac{N_2^2 \varepsilon_3}{N_3^2 \varepsilon_2} \right| \sim \beta^2 \left| \frac{\omega^3 \omega_H}{K_z^4 V_{Te}^4} \right| \gg 1; \quad \left| \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right| \sim \beta \left| \frac{\omega}{\omega_H} \right| \gg 1;$$

$$\left| \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{d_{23}^2} \right| \sim \left| \frac{\omega}{\omega_H} \right| \ll 1; \quad \left| \frac{\text{Im } N_2^{(2)}}{\text{Im } N_3^2 \varepsilon_3} \right| \sim \frac{K_z^2}{k^2} \left| \frac{\omega^3}{\omega_H^3} \right| \ll 1; \quad \left| \frac{\text{Im } \varepsilon_{3e}}{\text{Im } \varepsilon_{2e}} \right| \sim \frac{1}{Z_i K_z^2 V_{Te}^2} \gg 1.$$

Как следует из нулевого приближения (4) - (6) случаю

2) $|\omega^{(0)}| \ll |\omega_H|$ соответствует $\omega^{(0)} = \omega_{Te}^* - K_z^2 C_A / \omega_H$

Подставляя это значение в (24) получим, что при всех K_z , определенных условиями существования ветки, условием неустойчивости является, по-прежнему, последнее условие (5). Область раскачиваемых длин волн здесь также шире, чем при гидродинамической неустойчивости.

По порядку величины инкремент неустойчивости γ равен:

$$\gamma \sim Z_i \frac{\omega_{Te}^* \omega_H}{|K_z| V_{Te}} \quad (25)$$

§ 6. Частоты $|\omega - \varepsilon \omega_H| \gg |K_z| V_{Te}$.

В области частот $|\omega - \varepsilon \omega_H| \gg |K_z| V_{Te}$ по-прежнему, следует различать два случая: 1) $\omega \gg |\omega_H|$

2) $\omega \ll |\omega_H|$. В случае 1) имеем:

$$N_2 = - \frac{4\pi e n_0}{B} \cdot \frac{K_z}{\omega} \cdot Z_i \cdot \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\omega_{Te}^*}{\omega} \right)$$

$$N_3 = K_z \frac{c^2 k^2}{\omega^2}$$

$$\varepsilon_2 = - \frac{16\pi n_0 T_i}{B^2} \cdot \frac{c^2 k^2}{\omega^2}$$

$$\varepsilon_3 = - \frac{\omega_{pe}^{*2}}{\omega^2}$$

$$d_{23} = 0$$

$$\text{Im } N_1^{(1)} = 0$$

(26)

Как следует из (26), $\text{Im } N_2^2 \varepsilon_3 / \varepsilon = 0$ (с экспоненциальной точностью) и потому $\gamma = 0$.

В случае 2) $\omega \ll |\omega_H|$

$$N_2 = - \frac{4\pi e n_0}{B} \cdot \frac{K_z}{\omega} \cdot Z_i \left(1 - \frac{\omega_{Te}^*}{\omega} \right)$$

$$N_3 = K_z \frac{c^2 k^2}{\omega^2}$$

$$\varepsilon_2 = - \frac{8\pi e n_0}{2B} \cdot \frac{K_z}{\omega} \cdot \frac{\omega_{pe}^*}{\omega} + \frac{i\pi}{2B^2 \tau_d} \cdot \frac{\omega}{|\omega_H|} \left(1 + 2 \frac{\omega_{Te}^*}{\omega} \right) \quad (27)$$

$$\varepsilon_3 = - \frac{\omega_{pe}^{*2}}{\omega^2} + \frac{i\pi}{2K_z^2 \tau_d} \cdot \frac{K_z^2 V_{Te}^2}{\omega |\omega_H|} \left(1 + \frac{\omega_{Te}^*}{\omega} \right)$$

$$d_{23} = 0$$

$$\text{Im } N_1^{(1)} = \frac{4\pi^2 e^2}{T_i} \hat{\ell}_i \left(\frac{n_0 T_i}{M \omega_{Bi}} \right) \left(\frac{K_z^2 Z_i}{16} \right) \frac{\omega^3}{|\omega_H| \omega_H^2}$$

С помощью (25) получим

$$\gamma = - \frac{\frac{\beta}{8} \pi^2 z_i^2 \frac{1}{k_z^2 v_{Te}^2} \cdot \frac{\omega^2}{|\omega_{ni}|} \left(1 - \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right)^2 \left(1 + 2 \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right)}{\left[\frac{\beta}{4} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\pi^2}{2 \beta^2 z_i^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} \left(1 + 2 \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right)^2 \right]} \times \times \left[1 + \frac{\beta}{4} \cdot \frac{\omega_{ni} \omega}{k_z^2 v_{Te}^2} \left(1 - 2 \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega}\right) \right]^{-1} \quad (28)$$

В рассмотренном нами случае имеет место корень $\omega^{(0)} = \omega_{Ti}^* - k_z^2 C_A^2 / \omega_{ni}$. Условие устойчивости при этом есть условие (2).

При $\beta \gg 1$ область раскачиваемых длин волн вновь шире, чем в случае гидродинамической неустойчивости и определяется условиями существования ветки колебания. Область кинетической неустойчивости по параметру $\omega_{ni} / \omega_{Ti}^*$ также много шире области гидродинамической неустойчивости. (Ветка $\omega^{(0)} = \omega_{Ti}^* - k_z^2 C_A^2 / \omega_{ni}$ получена при условии $|\omega_{ni} / \omega_{Ti}^*| \gg 1$).

Рис. 1в, на котором изображены области неустойчивости при предельных значениях параметра $|\omega_{ni} / \omega_{Ti}^*|$ и частотах $|\omega - \delta \omega_{ni}| \gg |k_z| v_{Te}$, оказался тождественно совпадающим с рис. 1б, относящимся к области промежуточных частот $|k_z| v_{Te} \gg |\omega - \delta \omega_{ni}| \gg |k_z| v_{Ti}$.

Инкремент неустойчивости (28) по порядку величины равен

$$\gamma \sim \frac{k_z^2 C_A^2}{\omega_{ni}} \quad (29)$$

§ 7. Неустойчивости плазмы при $|\omega_{ni} / \omega_{Ti}^*| \sim 1$.

В предыдущих параграфах исследовалась устойчивость плазмы в случаях, когда параметр $|\omega_{ni} / \omega_{Ti}^*|$ принимал предельные значения. При этом во всех предельных случаях, за

исключением $\omega_{ni} / \omega_{Ti}^* \leq -1$, плазма оказывается неустойчивой (см. рис. 1а, 1б, 1в).

На основании рисунков 1а-1в можно сделать вывод, что в области $|\omega_{ni} / \omega_{Ti}^*| \sim 1$ плазма устойчива. Однако, как будет показано в этом параграфе, как раз области $|\omega_{ni} / \omega_{Ti}^*| \sim 1$ плазма неустойчива с наибольшим инкрементом. При этом область неустойчивости, связанной резонансному взаимодействию волна альфвеновского типа с частицами плазмы большого давления, простирается на $\omega_{ni} / \omega_{Ti}^* > -2$.

Относительно раскачиваемых длин волн в предыдущих параграфах подчеркивалось, что резонансное взаимодействие с частицами вызывает значительно более широкий спектр (относительно k_z) возмущенных волн по сравнению с областью (по k_z) гидродинамической неустойчивости. В настоящем, исследуя узкую область $|\omega_{ni} / \omega_{Ti}^*| \sim 1$, мы не станем как раньше очерчивать области неустойчивости по k_z . С самого начала мы будем рассматривать лишь те длины волн, которые раскачиваются наиболее интенсивно. В связи с этим заметим, что знаменатели всех инкрементов (11), (19), (24), (28) содержат одинаковый множитель. Приравняем его к нулю

$$1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{ni} \omega^{(0)}}{k_z^2 C_A^2} \left(1 - 2 \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega^{(0)}}\right) = 0 \quad (30)$$

Запишем также уравнение, из которого определяется $\omega^{(0)}$

$$\omega^2 - \omega_{ni} \omega + \omega_{ni} \omega_{Ti}^* - k_z^2 C_A^2 = 0 \quad (31)$$

Таким образом имеем два уравнения для двух неизвестных k_z и $\omega^{(0)}$. Из уравнения (31) определим $k_z^2 C_A^2$ и подставим в уравнение (30). Найдем $\omega_1^{(0)} = 0$, $\omega_2^{(0)} = \frac{1}{2} \omega_{ni}$. Это как раз те значения $\omega^{(0)}$, при которых инкремент достигает наибольшего значения.

В области частот $|\omega - \delta \omega_{ni}| \ll |k_z| v_{Te}$ условиями неустойчивости являются следующие (см. (11)):

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{ni} \omega^{(0)}}{k_z^2 C_A^2} - \frac{\omega_{ni} \omega_{Ti}^*}{k_z^2 C_A^2} < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega^{(0)}} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{ni} \omega^{(0)}}{k_z^2 c_A^2} - \frac{\omega_{ni} \omega_{Ti}^*}{k_z^2 c_A^2} > 0$$

$$1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega^{(0)}} < 0$$
(33)

Заметим, что выражение (11) достигает максимального значения при $\omega^{(0)} = \frac{1}{2} \omega_{Ti}^*$ (кроме отмеченного выше $\omega^{(0)} = \frac{1}{2} \omega_{ni}$). Таким образом при соблюдении условий (32) или (33) имеет место неустойчивость, причем максимум инкремента достигается, если $\omega_{Ti}^* \approx \omega_{ni}$. При этом раскачиваются следующие длины волн:

$$\frac{k_z}{k_y} \approx \sqrt{\beta} \frac{\rho_i}{a}$$
(34)

Аналогичный анализ выражения (19) показывает, что в промежуточной области частот также имеет место неустойчивость при $\omega_{Ti}^* \approx \omega_{ni}$.

Рассмотрим теперь область частот $|\omega - \delta \omega_{ni}| \gg |k_z| V_{Te}$. Здесь имеют место следующие условия неустойчивости (см. (28)):

$$1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{ni}}{\omega^{(0)}} > 0$$
(35)

$$1 + 2 \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega^{(0)}} < 0$$

$$1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{ni}}{\omega^{(0)}} < 0$$

$$1 + 2 \frac{\omega_{Ti}^*}{\omega^{(0)}} > 0$$
(36)

Из (35) легко получить $\omega_{ni}/\omega_{Ti}^* > -2$, из (36): $\omega_{ni}/\omega_{Ti}^* > 2$.

Окончательно область неустойчивости, вызванной резонансным взаимодействием с волнами альфвеновского типа частиц плазмы большого давления показана на рис. 2.

§ 8. Обсуждение результатов

Как показывают результаты цитируемых выше работ, включая настоящую, гидродинамические неустойчивости плазмы с $\beta \gg 1$ стабилизируются уже при сравнительно небольшой величине параметра $|\omega_{ni}/\omega_{Ti}^*|$. Например, стабилизация гидродинамической неустойчивости, связанной с раскачкой волн альфвеновского типа, происходит при $|\omega_{ni}/\omega_{Ti}^*| < 1/4$ (см. рис.1)). При этом условия стабилизации двух различных гидродинамических неустойчивостей, вызванных раскачкой волн магнитозвукового и альфвеновского типов, противоположны. Для стабилизации первой из них требуется, чтобы $\omega_{ni}/\omega_{Ti}^* > 0$ (см./1/); условие стабилизации второй противоположно: $\omega_{ni}/\omega_{Ti}^* < 0$ (см. § 2 настоящей работы).

В §§ 4-6 настоящей работы показано, что кинетическая неустойчивость имеет место при сколько угодно большом значении параметра $\omega_{ni}/\omega_{Ti}^* > 0$. Однако область кинетических неустойчивостей захватывает не всю область значений параметра $\omega_{ni}/\omega_{Ti}^*$. Эта область неустойчивости находится при $\omega_{ni}/\omega_{Ti}^* > -2$ (см.рис.2). Левее границы неустойчивости лежит область неустойчивости магнитозвуковой ветки колебаний /1/. С точки зрения эксперимента альтернативность условий устойчивости, полученных в /1/ и настоящей работе на первый взгляд кажется не столь опасной, поскольку максимальный из инкрементов, полученный в § 4, меньше инкремента /1/ в $\beta^{-1/2} z_i^{-1}$ раз.

Однако, следует иметь в виду, что волны альфвеновского типа в отличие от волн магнитозвукового типа имеют отрицательную энергию. Поэтому в нелинейном режиме резонансное взаимодействие с частицами волн альфвеновского типа может оказаться наиболее опасным.

В заключение выражаю глубокую благодарность А.Б. Михайловскому за плодотворные обсуждения результатов настоящей работы. Благодарю Г.И. Будкера, по инициативе которого была выполнена эта работа.

Л и т е р а т у р а

- /1/ А.Б.Михайловский ЖТФ, 40, (1970).
- /2/ А.Б.Михайловский, А.М.Фридман. ЖЭТФ, 51, 1430 (1966).
- /3/ А.Б.Михайловский, А.М.Фридман, ЖТФ, 37, 10, (1967).
- /4/ В.Ц.Гурович, Б.Ю.Найдорф, А.М.Фридман. ЖТФ, 40, 441, (1970).
- /5/ А.В. Михайловский, А.М. Фридман, Plasma Physics, 12, (1970).
- /6/ А. В. Михайловский, А. М. Фридман, V. S. Tsypin, Nuclear Fusion, (1970).
- /7/ Ю.А. Церковников. ЖЭТФ, 32, 67, (1957).

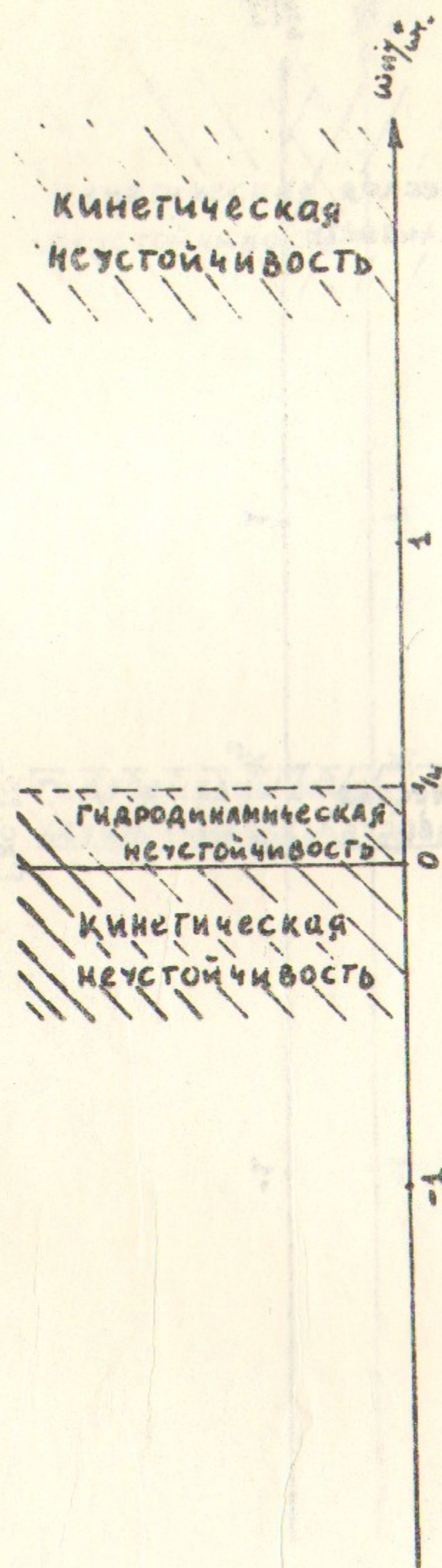


Рис. 1а.

$$|\omega - \varepsilon \omega_{ci}| \ll |kz| V_{Te}$$

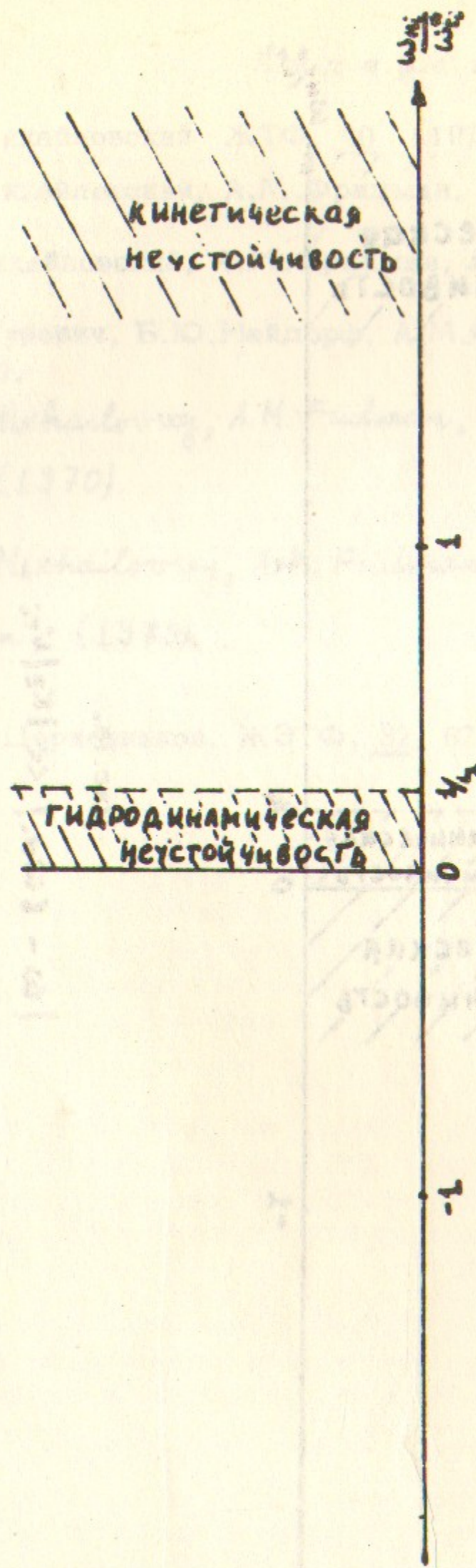


Рис. 1б.

$$|Kz| V_{Te} \ll |\omega - \varepsilon \omega_{ni}| \ll |Kz| V_{Te}$$

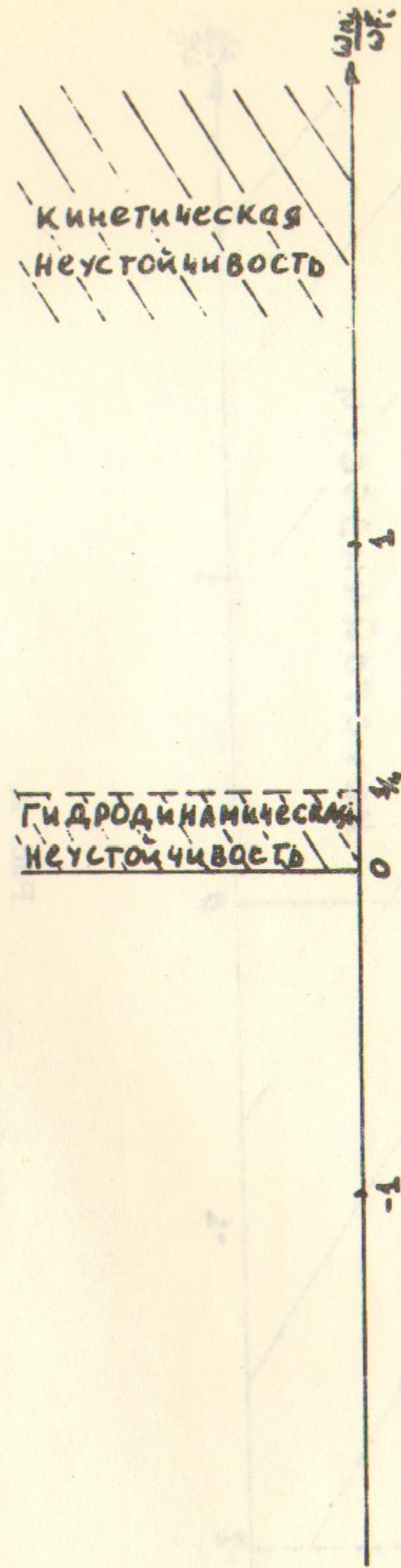


Рис. 1в

$$|\omega - \varepsilon \omega_{ni}| \gg |Kz| V_{Te}$$

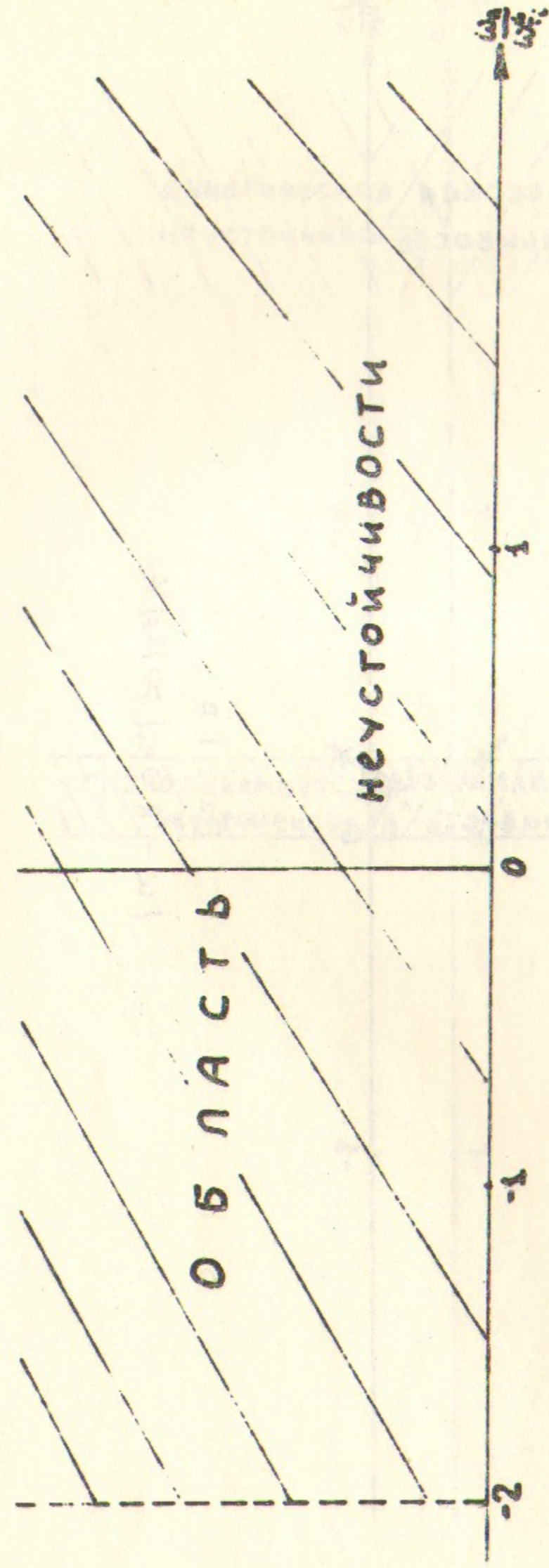


Рис. 2.
Область неустойчивости, связанной раскочке волн альфвеновского типа.

Ответственный за выпуск А.М.Фридман
Подписано к печати 2.УП-1970 г.

Усл. 1 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № **51** . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринтере в ИЯФ СО АН СССР.