17

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

И Я Ф 76 - 70

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

# РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Новосибирск

1970

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

# РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ


## АННОТАЦИЯ

С помощью операторного метода вычисляется вклад диаграммы собственной энергии электрона во внешнем электромагнитном поле в $e^2$ -порядке по взаимодействию с излучением. Получены поправка к массе электрона и его аномальный магнитный момент. Последний имеет вид:

$$\mu'/\mu_0 = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{2}{\chi}\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^3}\int_0^\infty dx \sin\frac{u}{\chi}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$$

где $\mu_0 = \dfrac{e}{2m}$ ; $\chi = \dfrac{e\hbar}{m^3c^4}\sqrt{\left|(F_{\mu\nu}p^\nu)^2\right|}$ . Исследуются аналитические свойства входящих функций переменного $z = \dfrac{1}{\chi}$ ; для них устанавливаются дисперсионные соотношения. Рассматривается процесс распространения электромагнитных волн в области, занятой классическим полем, приводятся выражения для показателей преломления, частот и групповых скоростей двух волн. Проводится сравнение с результатами других работ, посвященных аналогичным вопросам.

# RADIATIVE EFFECTS IN EXTERNAL ELECTROMAGNETIC FIELD

V.N.Baier, V.M.Katkov, V.M.Strachovenko


## A b s t r a c t

Using the operator quasiclassical method an expression for the mass operator of the electron in external field has been obtained. This permits to find an anomalous magnetic moment of the quasi-classical particle in external field.

$$\mu'/\mu_0 = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{2}{\chi}\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^3}\int_0^\infty dx\cdot\sin\frac{u}{\chi}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$$

where $\mu_0 = e/2m$ ; $\chi = \frac{e\hbar}{m^3c^4}\sqrt{|(F_{\mu\nu}p^\nu)^2|}$

Our results are in agreement with those obtained in the crossed field /1/ and in disagreement with /2/. In the last paper approximation used in evaluation of integrals is not correct.

It is shown that in quasiclassical equation for the electron spin in external field rotational terms contain dependence on $\chi$ only through anomalous magnetic moment.

It is possible to reconstruct transverse part of the susceptibility tensor $\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}$ using dispersion relation and probability of pair creation by photon in external field. It is appeared that external classical field possesses properties of medium with dispersion and absorbtion.


В последнее время появился ряд работ, в которых рассматривается изменение свойств вакуума в присутствии классического электромагнитного поля. В /1/ предпринята попытка вычисления аномального магнитного момента электрона, находящегося в магнитном поле, в /2/ проведен расчёт изменения массы электрона, его аномального магнитного момента, и массы, возникающей у фотона, в случае, когда внешнее поле является "скрещенным": $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, $\vec{E}\vec{H}=0$. В /3/ на базе результатов Швингера /4/ исследуется распространение электромагнитных волн в области, занятой скрещенным полем. Результаты работ /1/ и /2/ не согласуются друг с другом.

Весь этот круг вопросов может быть рассмотрен с помощью операторного метода, развитого в /5/ и в тех же предположениях относительно характера внешнего поля. Для получения аномального магнитного момента и поправок к массе можно исходить из диаграммы собственной энергии электрона во внешнем поле в $e^2$-порядке по взаимодействию с излучением, представив соответствующую амплитуду в операторном виде. После проведения необходимых преобразований, операции распутывания (которая выполняется точно) и перехода к средним, получаем

$$T_{qq}^{(2)} = \frac{i\alpha}{(2\pi)^2}\sum_{\zeta'}\int\frac{d^3k}{\omega}\int dt\int_0^\infty d\tau\Big[\bar{u}(\zeta,\vec{p}_2)\gamma^\mu u(\zeta',\vec{p}_2{}')\bar{u}(\zeta',\vec{p}_1{}')\gamma_\mu u(\zeta,\vec{p}_1)L_1 - \bar{u}(\zeta,\vec{p}_1)\gamma^\mu v(\zeta',-\vec{p}_1{}')\bar{v}(\zeta',-\vec{p}_2{}')\gamma_\mu u(\zeta,\vec{p}_2)L_2\Big] \qquad (1)$$

где

$t_1 = t-\tau/2$ ; $t_2 = t+\tau/2$ ; $\vec{p}\,' = \vec{p}-\vec{k}$ ; $\vec{p}_1 \equiv \vec{p}(t_1)$ ; $\vec{p}_2 \equiv \vec{p}(t_2)$

$$L_1 = \exp i\left\{(\varepsilon-\omega)\tau - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau'\sqrt{(\varepsilon-\omega)^2+2kp(t+\tau')}\right\};\quad L_2 = \exp\left\{-i\left[(\varepsilon+\omega)\tau + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau'\sqrt{(\varepsilon+\omega)^2-2kp(t+\tau')}\right]\right\}$$

Если устремить в (1) внешнее поле к нулю, то получающаяся амплитуда $T_{qq}^{(2)0}$ является точной для свободных частиц. Поскольку нас интересует только эффект, связанный с наличием внешнего поля, будем рассматривать разность $T_{qq}^{(2)} - T_{qq}^{(2)0} = T_Q^{(2)}$. Вычисление $T_Q^{(2)}$ проведем систематически разлагая все выражения по степеням $1/\gamma$ ($\gamma = \frac{\varepsilon}{m}$) и сохраняя только старшие члены этого разложения. Показатель экспоненты $L_2$ никогда не бывает малым, поскольку "большие" члены ( $\varepsilon+\omega$ ) складываются; это приводит к уменьшению вклада второго члена в (1), вообще говоря в $\gamma^2$ раз по сравнению с первым. Аналогично этому, отсутствие компенсации в показателе экспоненты $L_1$ , при $\omega > \varepsilon$

также приводит к подавлению интеграла по $\tau$. Так что с принятой точностью достаточно в выражении (1) ограничиться первым членом в скобках и интегрировать по $\omega$ от 0 до $\varepsilon$.

Дальнейший расчёт проводится также как и в /5/. Если теперь представить $dT_Q^{(2)}/dt$ в виде суммы членов: $dT_Q^{(2)}/dt = T_1^{(2)} + T_2^{(2)}(\vec{\xi}\vec{U}\vec{S})$, $(\vec{S} = \vec{v}/|\vec{v}|)$, где зависимость от спина выделена явно, то для $T_1^{(2)}$, $T_2^{(2)}$ имеем:

$$T_1^{(2)} = \frac{\alpha m^2}{6\pi\varepsilon}\int_0^\infty du\,\frac{5u^2+7u+5}{(1+u)^3}\left[-L_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right) + \frac{i}{\sqrt{3}}K_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)\right] \qquad (2)$$

$$T_2^{(2)} = -\frac{\alpha m^2}{2\pi\varepsilon}\int_0^\infty du\,\frac{u}{(1+u)^3}\left[L_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right) + \frac{i}{\sqrt{3}}K_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)\right]$$

$$L_{2/3}(z) = \int_0^\infty dx\, x\cos\frac{3z}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}\right), \quad L_{1/3}(z) = \int_0^\infty dx \sin\frac{3z}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$$

где

$$\chi = \frac{e\hbar}{m^3c^4}\sqrt{|(F_{\mu\nu}p^\nu)^2|}, \quad F_{\mu\nu} = (\vec{E}, \vec{H})$$

Приведем также выражения для $L_{2/3,\,1/3}$ при действительном $z = a > 0$

$$L_{1/3}(a) = \frac{1}{3}\left\{K_{1/3}(a) + \frac{2\pi}{i\sqrt{3}}\left[J_{1/3}(ia) - A_{1/3}(ia) - J_{1/3}(-ia) + A_{1/3}(-ia)\right]\right\} \qquad (3)$$

$$L_{2/3}(a) = \frac{1}{3}\left\{K_{2/3}(a) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[J_{2/3}(ia) - A_{2/3}(ia) + J_{2/3}(-ia) - A_{2/3}(-ia)\right]\right\}$$

здесь $K_\nu$, $J_\nu$, $A_\nu$ – соответственно функции Макдональда, Бесселя и Ангера.

Амплитуда $T_Q^{(2)}$ связана простым соотношением:

$$\frac{dT_Q^{(2)}}{dt} = -\frac{m}{\varepsilon}\Delta M$$

с $\Delta M$ – зависящей от внешнего поля поправкой к массе электрона в $e^2$ -порядке по взаимодействию с излучением. С точностью до членов более высокого порядка по $\frac{1}{\gamma}$



смешанное произведение $(\vec{\xi}\vec{U}\vec{S})$ может быть однозначно представлено в инвариантной форме:

$$(\vec{\xi}\vec{U}\vec{S}) = -\frac{e\tilde{F}_{\mu\nu}p^\mu s^\nu}{\sqrt{|(eF_{\lambda\sigma}p^\sigma)^2|}} = -\frac{2\mu_0(\vec{\xi}\vec{H}_R)}{m\chi} = A; \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

$s^\mu$ – 4-вектор поляризации, $\mu_0 = e/2m$, $\vec{H}_R$ – магнитное поле в системе покоя частицы. Тем самым величина $\Delta M$ принимает явно инвариантный вид. Отметим, что инвариант A не зависит от $\chi$ ( $H_R \sim \chi$ ). Представив $\Delta M$ в виде суммы $\Delta M = \Delta m + \Delta m_\xi$, где только $\Delta m_\xi$ зависит от спина электрона, имеем:

$$\Delta m = \frac{\alpha m}{6\pi}\int_0^\infty du\,\frac{5u^2+7u+5}{(1+u)^3}\left[L_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right) - \frac{i}{\sqrt{3}}K_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)\right] \qquad (4)$$

$$\Delta m_\xi = \frac{\alpha m}{2\pi}A\int_0^\infty du\,\frac{u}{(1+u)^3}\left[L_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right) + \frac{i}{\sqrt{3}}K_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)\right]$$

В системе покоя частицы величину $\mathrm{Re}\,\Delta m_\xi$ можно интерпретировать как энергию взаимодействия возникающего у частицы аномального магнитного момента с магнитным полем $\vec{H}_R$: $\mathrm{Re}\,\Delta m_\xi = -\mu'(\vec{\xi}\vec{H}_R)$. Отсюда мы получаем выражение для аномального магнитного момента электрона, обусловленного радиационными эффектами в $e^2$ порядке и взаимодействием с внешним полем:

$$\mu'/\mu_0 = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{2}{\chi}\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^3}L_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right) \qquad (5)$$

Приведем также разложение величины $\mu'/\mu_0$ в случае предельных значений параметра $\chi$:

$$\frac{\mu'}{\mu_0} = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi}\left[1 - 12\chi^2\left(\ln 1/\chi + C + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{37}{12}\right) + \ldots\right], & \chi \ll 1 \\ \frac{\alpha\,\Gamma(1/3)}{9\sqrt{3}(3\chi)^{2/3}}\left[1 + 6\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}(3\chi)^{-2/3} + \ldots\right], & \chi \gg 1 \end{cases} \qquad (6)$$

Видно, что с возрастанием $\chi$ функция $\mu'/\mu_0$ монотонно убывает.

Проводившееся нами разложение по $1/\chi$, в инвариантном виде соответствует разложению по $f/\chi$ $\left( f = \frac{e\hbar}{m^2c^3}\sqrt{|F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|} \right)$. В скрещенном внешнем поле $f \equiv 0$, поэтому для такого поля наши выражения являются точными, совпадая с результатами /2/. Что касается результатов работы /1/, то из найденного там точного промежуточного выражения при корректном вычислении для $\mu'/\mu_0$ получается формула (5).

Для рассмотрения аналитических свойств $\Delta m$, $\Delta m_\zeta$, нужно в (4) вернуться к интегральным представлениям функций $L_\nu$, $K_\nu$ (см.(2), /5/). Получаем:

$$\Delta m = \frac{\alpha m}{6\pi}\int_0^\infty du\,\frac{5u^2+7u+5}{(1+u)^3}\int_0^\infty d\tau\,\tau\, e^{-\frac{iu}{\chi}\left(\tau+\frac{\tau^3}{3}\right)}$$

$$\Delta m_\zeta = -i\,\frac{\alpha m}{2\pi}A\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^3}\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\frac{u}{\chi}\left(\tau+\frac{\tau^3}{3}\right)} \tag{7}$$

Функции $\Delta m$, $\Delta m_\zeta$ являются целыми функциями, экспоненциально спадающими в нижней полуплоскости переменной $z = 1/\chi$ при $\operatorname{Im} z \to -\infty$. Поэтому на действительной оси мнимая и реальная части $\Delta m$, $\Delta m_\zeta$ связаны соотношением:

$$\operatorname{Re} f(z) = -\frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} f(z')\,dz'}{z'-z}; \qquad f(z) = \Delta m,\ \Delta m_\zeta \tag{8}$$

Поскольку нам известен явный вид функции $f$, то факт существования дисперсионного соотношения (8) очевиден. Однако существование дисперсионных соотношений в квантовой электродинамике следует из весьма общих соображений, отнюдь не опирающихся на явный вид входящих функций. Поэтому вычисление поправок $\Delta m$, $\Delta m_\zeta$ можно провести, опираясь на дисперсионные соотношения /2/.

Пользуясь дисперсионными соотношениями, нетрудно получить и основные характеристики процесса распространения плоских электромагнитных волн в области пространства, занятой внешним полем. Применяя оптическую теорему и вводя показатель преломления соотношением $\tilde{n} = |\vec{k}|/\omega$, сразу имеем: $\operatorname{Im}\tilde{n}^2 = \frac{1}{\omega}W_{\gamma\to e^+e^-}$, где $W_{\gamma\to e^+e^-}$ вероятность рождения пары поляризованным фотоном во внешнем поле. Аналитические свойства функции $\tilde{n}^2$ такие же, как и функций $f$ в (7), т.е.: $\tilde{n}^2$ не имеет особенностей в нижней полуплоскости переменной $z = \frac{1}{\varkappa}$ $\left(\varkappa = \frac{e\hbar^2}{m^3}\sqrt{|(F_{\mu\nu}k^\nu)^2|}\right)$ и при $\operatorname{Im} z \to -\infty$ спадает экспоненциально. Это вытекает из принципа причинности и, естественно, подтверждается прямым вычислением. Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\operatorname{Re}\tilde{n}^2(z) = 1 - \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\tilde{n}^2(z')\,dz'}{z'-z}, \tag{9}$$

где учтено, что $\operatorname{Re}\tilde{n}^2(\infty) = 1$. Из получающегося после подстановки в (9) $\operatorname{Im}\tilde{n}^2$ и взятия интеграла выражения нетрудно восстановить поперечную часть тензора восприимчивости

$$\eta_{ij}^{\perp} = (\varepsilon_{ij}-\delta_{ij})^{\perp} = 2g_1(\varkappa)F_i^{(1)}F_j^{(1)} + 2g_2(\varkappa)F_i^{(2)}F_j^{(2)} \tag{10}$$

где

$$g_{1,2}(\varkappa) = \frac{\alpha}{3\pi}\cdot\frac{1}{(\varkappa H_0)^2}\int_0^\infty dy\,\varphi_{1,2}(y)\left[\frac{i}{\sqrt{3}}K_{2/3}(\xi) - L_{2/3}(\xi)\right]; \quad \xi = \frac{8\,\mathrm{ch}^2 y}{3\varkappa}$$

$$\varphi_1(y) = \frac{4\,\mathrm{ch}^2 y - 1}{\mathrm{ch}^2 y}; \quad \varphi_2 = \frac{4\,\mathrm{ch}^2 y + 2}{\mathrm{ch}^2 y}; \quad \vec{F}_1 = \vec{E}_\perp + [\vec{n}\vec{H}]; \quad \vec{F}_2 = [\vec{n}\vec{F}_1]$$

Из такого тензора получаются значения показателей преломления двух волн: $\tilde{n}_{1,2} = 1 + g_{1,2}|\vec{F}_{1,2}|^2$ и их частот: $\omega_{1,2} = |\vec{k}|(1 - g_{1,2}|\vec{F}_{1,2}|^2)$, совпадающие с результатами /3/, если в наших выражениях считать внешнее поле скрещенным. Если рассматриваются поля, меньшие по величине, чем $H_0 = \frac{m^2c^3}{e\hbar}$

то затухание волн мало и можно ввести групповую скорость соотношением: $\vec{v}_g^{(1,2)} = \frac{\partial \operatorname{Re}\omega_{1,2}}{\partial \vec{k}}$. Приведем выражение для групповой скорости двух волн:

$$\vec{v}_g^{(1,2)} = \vec{n}\left[1 - |\vec{F}_{1,2}|^2(\operatorname{Re}g_{1,2} + \psi_{1,2})\right] + \vec{S}\left[2\operatorname{Re}g_{1,2} + \psi_{1,2}\right]$$

где

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}; \quad \vec{S} = H_\parallel \vec{H}_\perp + E_\parallel \vec{E}_\perp + [\vec{E}\vec{H}]_\perp; \quad \vec{B}_\perp = \vec{B} - \vec{B}_\parallel; \quad \vec{B}_\parallel = \vec{n}(\vec{n}\vec{B}) \tag{11}$$

$$\psi_{1,2} = \frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{(\varkappa H_0)^2}\int_0^\infty dy\, \varphi_{1,2}(y)\left[2L_{2/3}(\xi) + \xi L'_{2/3}(\xi)\right]$$

В скрещенном поле для конкретных случаев (определенное $\vec{n}$), рассмотренных в /3/, из (11) получаются выражения, совпадающие с соответствующими формулами работы /3/.



Литература


1. И.М.Тернов, В.Г.Багров, В.А.Бородовицин, О.Ф.Дорофеев. ЖЭТФ, 55, 2273, (1968).
2. В.И.Ритус. ЖЭТФ, 57, 2176, (1969).
3. Н.Б.Нарожный, ЖЭТФ, 55, (1968).
4. J.Schwinger.Phys.Rev. , 82, 664, (1951).
5. В.Н.Байер, В.М.Катков. ЖЭТФ, 53, 1478, (1967).

Ответственный за выпуск В.М.Катков
Подписано к печати 1.09.70 г.
Усл. 0,5 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 76 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,нв.