И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

И Я Ф 50 - 71

Г.Е.Деревянкин

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

Новосибирск

1971

Г.Е.Деревянкин

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

А Н Н О Т А Ц И Я

Приводится точное решение задачи о потенциале квадрупольной линзы по заданному значению градиента на оси. В общем случае потенциал выражается в виде интеграла.

В настоящее время в электронной оптике и ускорительной технике широкое распространение получили квадрупольные линзы. Известно /1/, что электронно-оптические характеристики этих линз определяются распределением градиента по оси линзы. В связи с этим возникает задача определения потенциала линзы с заданным значением градиента на оси. Математически эта задача сводится к определению потенциала $V(x,y,z)$, удовлетворяющего уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

и дополнительному условию на оси z, которое для электростатической линзы можно записать в виде:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}} = f(z) \tag{2}$$

Здесь x, y, z – декартовы координаты, ось z совпадает с осью симметрии линзы.

В настоящее время широко используется представление решения задачи (1,2) в виде ряда по степеням x и y /1,2/. Однако, использование этого представления для получения численных результатов представляет известные неудобства, обусловленные сложностью самого ряда, необходимостью многократного дифференцирования функции $f(z)$ и исследования сходимости ряда.

Предпринимались попытки описания реальной системы с помощью подходящей модели. Однако, при этом приходится либо использовать достаточно простые модели, например /3,4/, либо ограничиваться приближенным описанием /5,6/.

Здесь мы приведем точное решение задачи (1,2). При этом потенциал в большом числе случаев может быть выражен в явном виде, а в общем случае сводится к квадратуре.

Рассмотрим в начале случай электростатической линзы. Итак, необходимо найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2). Кроме того, поле электростатического квадруполя симметрично относительно плоскостей $x=0$, $y=0$ и антисимметрично относительно плоскостей $x=y$, $x=-y$. Эти условия можно записать соответственно в виде:

$$V(x,y,z) = V(-x,y,z) = V(-x,-y,z) \quad (3)$$

$$V(x,y,z) = -V(y,x,z) \quad (4)$$

Перейдём к построению интересующего нас решения. С этой целью заметим, что всякая гармоническая функция $\mathcal{U}_1(x,z)$ двух переменных x и z будет удовлетворять и трехмерному уравнению Лапласа (1). Аналогично, уравнению (1) будет удовлетворять всякая гармоническая функция $\mathcal{U}_2(y,z)$ переменных y и z. В силу линейности уравнения (1) его решением также будет:

$$V(x,y,z) = \mathcal{U}_1(x,z) + \mathcal{U}_2(y,z) \quad (5)$$

В этом виде мы и будем искать решение нашей задачи. Прежде всего из условия (3) следует, что $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ должны быть четными функциями по переменным x и y, соответственно. Из теории функций комплексного переменного известно, что действительная часть всякой аналитической функции $F(\zeta)$ комплексного переменного $\zeta = z + ix$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является чётной функцией по переменной x /7/. В таком случае $V(x,y,z)$ можно представить в виде:

$$V(x,y,z) = Re\left[F_1(z+ix) + F_2(z+iy)\right] \quad (6)$$

Подставив (6) в (4), получим (символ Re для простоты опустим):

$$F_1(z+ix) + F_2(z+iy) = -F_1(z+iy) - F_2(z+ix)$$

Отсюда следует, что

$$F_1(t) = -F_2(t) = F(t)$$

Таким образом, потенциал V принимает вид:

$$V(x,y,z) = Re\left[F(z+ix) - F(z+iy)\right] \quad (7)$$

Из этого выражения следует

$$V(0,0,z) = 0$$

Это означает, что (7) пригодно для представления потенциала симметричной электростатической квадрупольной линзы.

Итак, мы получили решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям симметрии (3,4). Необходимо еще удовлетворить условию (2). Подставив (7) в (2), получим:

$$F''(z) = -f(z)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование. Отсюда имеем:

$$F(\zeta) = -\int_0^{\zeta} dt \int_0^{t} f(z)\,dz \quad (8)$$

И, следовательно, решение задачи (1,2) принимает вид:

$$V(x,y,z) = -Re\int_{\eta}^{\zeta} dt \int_0^{t} f(z)\,dz \quad (9)$$

Здесь $\zeta = z + ix$, $\eta = z + iy$

Приведем несколько примеров.

1. Положив $f(z) = G$, $F(z) = -\frac{G}{2}z$

получим хорошо известное плоское квадрупольное поле:

$$V_1(x,y,z) = \frac{G}{2}(x^2 - y^2)$$

2. Полагая $f(z) = K \cdot z$, $F(z) = -\frac{K}{6}z^3$

придём к линейно нарастающему квадрупольному полю:

$$V_2(x,y,z) = \frac{K}{2}z(x^2 - y^2)$$

Таким представлением часто пользуются для описания краевого поля квадрупольной линзы с постоянным градиентом /8/.

Перейдем к более интересным примерам.

3. $f(z) = \sin z$, $F(z) = \sin z$

$$V_3(x,y,z) = \sin z\,(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y)$$

Это представление интересно тем, что при $z=0$ и $z=\pi$ $V=0$. Это даёт возможность реализовать его на практике, ограничив область линзы двумя плоскими экранами и спрофилировав электроды по форме эквипотенциалей.

4. Линза с полем типа колокольного.

$$f(z) = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 z}, \quad F(z) = -2\ln(\operatorname{ch} z)$$

$$V_4(x,y,z) = \ln\left[\frac{\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 z}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 z}\right]$$

Этим потенциалом можно описывать поле одиночной квадрупольной линзы, достаточно удаленной от других систем. Прежде чем перейти к рассмотрению аналогичной задачи о магнитном скалярном потенциале $W(x,y,z)$ необходимо заметить, что вместо (2,3,4) для магнитного квадруполя будем иметь, соответственно:

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = f(z) \tag{10}$$

$$W(x,y,z) = -W(-x,y,z) = -W(x,-y,z) \tag{11}$$

$$W(x,y,z) = W(y,x,z) \tag{12}$$

Учитывая, что поле магнитного квадруполя отличается от соответствующего электростатического поворотом на угол $\pi/4$ вокруг оси z, выражение для W легко получим, подставив в (9) вместо x и y, соответственно, $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ и $\frac{y-x}{\sqrt{2}}$:

$$W(x,y,z) = -\operatorname{Re}\left[F\left(z+i\,\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) - F\left(z+i\,\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{13}$$

Здесь $F(t)$ по-прежнему даётся выражением (8). Нетрудно видеть, что (13) удовлетворяет также условиям (10,11,12). Рассмотренные выше примеры потенциала электростатического квадруполя в случае магнитной линзы, соответственно, примут вид:

$$W_1(x,y,z) = G\,x\,y$$

$$W_2(x,y,z) = K\,z\,x\,y$$

$$W_3(x,y,z) = 2\sin z\cdot\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{sh}\frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$W_4(x,y,z) = \ln\left[\frac{\cos^2\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{sh}^2 z}{\cos^2\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{sh}^2 z}\right]$$

Выражения (9,13) позволяют вычислить потенциал квадрупольной линзы с заданным значением градиента на оси, которое диктуется требуемыми электронно-оптическими характеристиками линзы. Знание потенциала, в свою очередь, позволяет определить форму электродов (полюсов), которая обеспечивает необходимое распределение градиента на оси.

Следует заметить, что условия (2,3,4) определяют потенциал неполностью, а лишь с точностью до потенциала мультипольных полей, порядок которых равен $4(2k+1)$, $k = 1, 2, \cdots$. В этом смысле решения, даваемые выражениями (9,13), следует считать, по-видимому, простейшими.

Потенциал линзы определяется однозначно, если задано его значение, скажем, в одной из плоскостей. Не нарушая общности в качестве таковой можно выбрать плоскость $z=0$. Тогда, если в этой плоскости потенциал можно задать в виде:

$$V(x,y,0) = f_1(x) + f_2(y) \tag{14}$$

(разумеется, что в случае квадруполя (14) должно удовлетворять условиям (3,4), то решение задачи (1.14) может быть легко получено из (6). Действительно, положив

$$V(x,y,z) = Re\left[f_1(x+iz) + f_2(y+iz) \right] \tag{15}$$

получим требуемое решение. Однако, в этом случае остается открытым вопрос о выполнении условия (2). По этой причине постановку задачи в виде (1.2) и её решение (9), по-видимому, следует считать предпочтительным.

Несколько слов о нелинейности поля. Как и следовало ожидать, неоднородность распределения градиента по оси линзы вызывает нелинейность поля. Причём, как это видно из (7) и примеров, нелинейность поля определяется производными функции $f(z)$ порядка выше первого. Например, в примере 3 градиент растёт при удалении от оси, как

$$G(x) \simeq \left(1 + \frac{x^2}{2} + \cdots\right) \tag{16}$$

Учитывая то обстоятельство, что оптическая сила линейной квадрупольной линзы для более удаленных от оси траекторий меньше, чем для приосевых /8/, можно заключить, что нелинейность вида (16) может оказаться полезной.

В заключение автор благодарит Г.И.Димова и И.Я.Протопопова за обсуждения и ряд полезных замечаний.

Литература

1. В.Глазер, Основы электронной оптики, М., Гостехиздат, 1957.
2. С.Я.Явор. Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами, М., Атомиздат, 1967.
3. А.М.Страшкевич. Электронная оптика электростатических систем, не обладающих осевой симметрией. М., Физматгиз, 1959.
4. Е.В.Шпак и С.Я.Явор, 34, 1037 (1964).
5. M.Y. Bernard, Annales de Physique, 9, 633, (1954).
6. M.Y. Bernard, Rend. Acad. Sci. 240, 1612, (1955).
7. М.А.Лаврентьев и Б.В.Шабат, Методы теории функции комплексного переменного, М.,Наука, 1965.
8. К.Штеффен. Оптика пучков высокой энергии, М., Мир,1969.