ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 7-71

В.Е.Захаров, А.Б.Шабат

ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ ДВУМЕРНОЙ САМОФОКУСИРОВКИ И ОДНОМЕРНОЙ АВТОМОДУЛЯЦИИ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Новосибирск

1971

ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ ДВУМЕРНОЙ САМОФОКУСИРОВКИ И ОДНОМЕРНОЙ АВТОМОДУЛЯЦИИ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

В.Е.Захаров, А.Б.Шабат

Плоский стационарный световой пучок в среде с нелинейным показателем преломления описывается уравнением / 1-2 /:

$$2ik\,\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k^2\,\frac{\delta n_{нл}}{n_0}\,|E|^2 E \qquad (1)$$

Здесь E - комплексная огибающая электрического поля; предполагается, что показатель преломления задаётся формулой

$$n = n_0 + \delta n_{нл}\,|E|^2$$

Это же уравнение в соответствующих переменных пригодно для описания плоских волновых пучков в других нелинейных средах.

Аналогичному уравнению (см. / 3-4 /)

$$i\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \omega_k'\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\,\omega_k''\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = q\,|\psi|^2 \psi \qquad (2)$$

подчиняется комплексная амплитуда ψ квазимонохроматической одномерной волны в среде с дисперсией безинерционной нелинейностью. В уравнении (2) ω_k - закон дисперсии волн, $q\,|\psi|^2$ - нелинейная поправка к частоте волны с амплитудой ψ.

Уравнения (1), (2) приводятся к стандартному безразмерному виду

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varkappa\,|u|^2 u = 0 \qquad (3)$$

Переменной t удобно придать смысл времени.

В настоящей работе мы будем изучать уравнение (3) при $\varkappa > 0$. Применительно к уравнению (1) это означает $\delta n_{нл} > 0$.

При этом условии уравнение (1) описывает стационарную двумерную самофокусировку, а также связанную с ней поперечную неустойчивость плоской монохроматической волны /5/. Для уравнения (2) условие $\varkappa > 0$ эквивалентно требованию $q\,\omega_к'' < 0$, при выполнении которого в нелинейной среде имеет место продольная неустойчивость монохроматической волны – автомодуляция /3–4, 6/.

Уравнение (3) может быть точно решено методом обратной задачи. Этот метод применим для таких уравнений типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \hat{S}\,[u]$$

(здесь $\hat{S}$ – вообще говоря, нелинейный оператор, дифференциальный по x), которые можно представить в виде (см. /7/)

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} = i\,[\hat{L}, \hat{A}] \tag{4}$$

Здесь $\hat{L}$ и $\hat{A}$ – линейные дифференциальные операторы, содержащие искомую функцию $u(x, t)$ в виде коэффициента. Если выполняется условие (4), то спектр оператора $\hat{L}$ не зависит от времени, а асимптотические характеристики его собственных функций могут быть легко вычислены в любой момент времени по их начальным значениям. Восстановление функции $u(x, t)$ в произвольный момент времени осуществляется решением обратной задачи рассеяния для оператора $\hat{L}$.

Уравнение (3), как легко проверить, может быть записано в форме (4), причём операторы $\hat{L}$ и $\hat{A}$ имеют вид

$$\hat{L} = i\begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$A = -p\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{bmatrix} |u|^2/(1+p) & i\,u_x^* \\ -i\,u_x & -|u|^2/(1-p) \end{bmatrix}$$

$$\varkappa = \frac{2}{1-p^2}$$

Не ограничивая общности, можно считать $\varkappa > 2$, $1 > p^2 > 0$.

Метод обратной задачи был открыт Крускалом, Грином, Гарднером и Миурой /8/ и применен ими к известному уравнению Кортевега-де Вриза (КДВ).

Роль оператора $\hat{L}$ в рассматриваемом ими случае играл одномерный оператор Шредингера. При этом была выяснена фундаментальная роль частных решений уравнения КДВ – солитонов, – непосредственно связанных с дискретным спектром оператора $\hat{L}$ – было установлено, что асимптотическим при $t \to \pm\infty$ состоянием любого начального условия является конечный набор солитонов. В нашей задаче аналогичную роль играют частные решения уравнения (3)

$$u(x,t) = \sqrt{2\varkappa}\,\frac{e^{-4i(\xi^2-\eta^2)t - 2i\xi x + i\varphi}}{\operatorname{ch}\left(2\eta(x-x_0) + 8\xi\eta t\right)} \tag{6}$$

которые мы также будем называть солитонами. Солитон, как мы покажем, является устойчивым образованием.

В задаче о самофокусировке солитон имеет смысл однородного волноводного канала, наклоненного к оси z под углом $\theta = \operatorname{arctg} 4\xi$.

В задачеоб автомодуляции солитон представляет собой уединенный волновой пакет, распространяющийся без искажения формы огибающей со скоростью $v = -4\xi$. Солитон характеризуется четырьмя константами – η, ξ, x_0, φ. В отличие от КДВ – солитона константа η, характеризующая амплитуду и константа ξ, определяющая скорость солитона, независимы и могут выбираться произвольными.

Солитон (6) является простейшим представителем обширного семейства точных решений уравнения (3), выражающихся в явном виде. В общем случае такое решение – назовем его N -солитон-ным – зависит от $4N$ произвольных констант η_i, ξ_i, x_{0i}, φ_i и при несовпадающих ξ_i распадается, если $t \to \pm\infty$ на отдельные солитоны. N- солитонное решение описывает, таким образом, процесс рассеяния N солитонов друг на друге. При этом рассеянии амплитуды и скорости солитонов не меняются, происходит изменение только их координат центров x_0, и фаз φ. Как и в случае КДВ солитонов /9/, в это изменение дают вклад только парные столкновения солитонов. Принципиально новой по сравнению со случаем КДВ является возможность образования связанного состояния из конечного числа солитонов, имеющих одинаковые скорости. В простейшем случае двух солитонов связанное состояние представляет собой периодическое по времени решение уравнения (3), в общем случае N солитонов – условно-периодическое решение, характеризующееся N периодами. Применительно к задаче о самофокусировке, N – солитонное решение описывает пересечение N однородных каналов, связанное состояние описывает осциллирующий "сложный" канал.

§ 1. Прямая задача рассеяния

Предположим, что $u(x, t)$ достаточно быстро убывает при $|x| \to \infty$ и рассмотрим задачу рассеяния для оператора $\hat{L}$. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \qquad \psi = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

и совершим замену переменных

$$\psi_1 = \sqrt{1-p}\, exp\left\{-i\frac{\lambda}{1-p^2}x\right\} v_2 , \qquad \psi_2 = \sqrt{1+p}\, exp\left\{-i\frac{\lambda}{1-p^2}x\right\} v_1$$

уравнение (7) перепишется в виде следующей системы

$$\begin{aligned} v_1' + i\zeta v_1 &= q(x)\, v_2 \qquad & q &= \frac{i}{\sqrt{1-p^2}}\, u \\ v_2' - i\zeta v_2 &= -q^*(x)\, v_1 \qquad & \zeta &= \frac{\lambda p}{1-p^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Несмотря на то, что данная система не является самосопряженной, задача рассеяния для неё во многом аналогична задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера.

Пусть v, w решения системы (8) при $\zeta = \zeta_1, \zeta_2$ соответственно. Тогда

$$\frac{d}{dx}(v_1 w_2 - v_2 w_1) + i(\zeta_1 - \zeta_2)(v_1 w_2 + v_2 w_1) = 0 \tag{9}$$

Кроме того, если v решение системы (4) при $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$, то

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}^*$$

удовлетворяет системе (8) при $\zeta_2 = \xi_1 - i\eta_1$.

При вещественном $\zeta = \xi$ определим функции Йоста φ, ψ как решения уравнения (8) с асимптотикой

$$\varphi \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \qquad \text{при} \quad x \to -\infty$$

$$\psi \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \qquad \text{при} \quad x \to +\infty$$

Пара решений ψ $\bar{\psi}$ образует полную систему решений, поэтому

$$\varphi = a(\xi)\,\bar{\psi} + b(\xi)\,\psi \tag{10}$$

Применив соотношение (9) к паре решений φ, $\overline{\varphi}$ уравнения (8), получаем, что

$$|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1 \qquad (11)$$

Функции Йоста φ, ψ допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\Im m\,\xi > 0$. В силу (9)

$$a(\xi) = (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)(x,\xi)$$

и, поэтому, $a(\xi)$ также допускает аналитическое продолжение.

Ясно, что

$$a(\xi) \to 1 \text{ при } |\xi| \to \infty, \ \Im m\,\xi \geq 0$$

Точки верхней полуплоскости $\Im m\,\xi > 0$, $\xi = \xi_j$, $j = 1, \dots, N$, в которых $a(\xi) = 0$ соответствуют собственным значениям задачи (8). При этом

$$\varphi(x,\xi_j) = c_j\,\psi(x,\xi_j), \quad j = 1, \dots, N$$

Заметим еще, что при вещественном $q(x)$ имеют место равенства

$$\varphi(x,-\xi) = \varphi^*(x,\xi), \quad \psi(x,-\xi) = \psi^*(x,\xi)$$

и, следовательно,

$$a(\xi) = a^*(-\xi)$$

Продолжив последнее равенство в верхнюю полуплоскость получим

$$a(\xi) = a^*(-\xi^*)$$

Ясно, что в этом случае нули $a(\xi)$ расположены на мнимой оси.

Из формулы (4) следует, что собственные функции оператора подчиняются уравнению

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{A}\psi \qquad (12)$$

Точнее говоря, если при $t=0$ функция ψ_0, рассматриваемая как начальное условие для уравнения (12), удовлетворяет системе (7), то соответствующее решение уравнения (12) в произвольный момент времени также удовлетворяет системе (7) с неизменным значением λ.

Из уравнения (12) для собственных функций следует, что решение $v(x,\xi,t)$ системы (8) при $|x| \to \infty$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\xi^2 v + 2i\xi\frac{\partial v}{\partial x} - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

откуда получаем, что $a(\xi)$ не зависит от времени, а

$$b(\xi,t) = b(\xi,0)\,e^{i4\xi^2 t}, \qquad c_j(t) = c_j(0)\,e^{4i\xi^2 t} \qquad (13)$$

§ 2. Обратная задача рассеяния

Рассмотрим вопрос о восстановлении $u(x,t)$ по данным рассеяния $a(\xi)$, $b(\xi,t)$, $-\infty < \xi < +\infty$, $c_j(t)$, $j=1, \dots, N$. Значения этих величин при $t=0$ вычисляются по начальным данным для уравнения (3), а изменение их в зависимости от t указано в формуле (13). Время t в обратной задаче рассеяния играет роль параметра. Достаточно поэтому рассмотреть вопрос о восстановлении коэффициента $q(x)$ уравнений (8) по $a(\xi)$, $b(\xi)$, c_j.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Psi(\xi) = \Psi(x,\xi) = \begin{cases} a^{-1}(\xi)\,\varphi(x,\xi)\,e^{i\xi x}, & \Im m\,\xi > 0 \\ \overline{\{\psi(x,\xi^*)\}}\,e^{i\xi x}, & \Im m\,\xi < 0 \end{cases}$$

и обозначим через $\tilde{\psi}(\xi)$ скачок этой функции при пересечении вещественной оси:

$$\tilde{\psi}(\xi) = \psi(\xi+i0) - \psi(\xi-i0)$$

Предполагая нули $\zeta_1, \dots, \zeta_N$ функции $a(\zeta)$ простыми, мы имеем формулу, восстанавливающую кусочно-аналитическую функцию $\psi(\zeta)$ по скачку $\tilde{\psi}(\xi)$ и вычетам в полюсах ζ_j:

$$\psi(\zeta) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{\kappa=1}^{N} \frac{e^{i\zeta_\kappa x}}{\zeta-\zeta_\kappa} \frac{\varphi(x,\zeta_\kappa)}{a'(\zeta_\kappa)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\psi}(\xi)}{\xi-\zeta} d\xi$$

или

$$\overline{\{\psi(x,\zeta^*)\}}\, e^{i\zeta x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{\kappa=1}^{N} \frac{\lambda_\kappa}{\zeta-\zeta_\kappa} \psi_\kappa + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\psi}(\xi)}{\xi-\zeta} d\xi, \ \Im m\,\zeta < 0 \qquad (14)$$

$$\lambda_\kappa = \sqrt{\frac{c_\kappa}{a'(\zeta_\kappa)}}\, e^{i\zeta_\kappa x}, \qquad \psi_\kappa = \begin{Bmatrix} \psi_{1\kappa} \\ \psi_{2\kappa} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{c_\kappa}{a'(\zeta_\kappa)}}\, \psi(x,\zeta_\kappa)$$

Из (10) получаем следующее выражение для скачка

$$\tilde{\psi}(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)} e^{i\xi x} \psi(x,\xi) \qquad (15)$$

Система уравнений обратной задачи теории рассеяния для функции $\tilde{\psi}(\xi)$, $-\infty < \xi < +\infty$ и параметров ψ_κ, (x – фиксировано), $\kappa = 1, \dots, N$ получается, если в формуле (14) положить $\zeta = \xi - i0$ и $\zeta = \zeta_j^*$, $j = 1, \dots, N$

При $\zeta = \xi - i0$ формула (14) даёт

$$\overline{\psi(x,\xi)}\, e^{i\xi x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{\kappa=1}^{N} \frac{\lambda_\kappa}{\xi-\zeta_\kappa} \psi_\kappa - \frac{1-\mathcal{J}}{2} \tilde{\psi}(\xi)$$

Здесь $\mathcal{J}$ преобразование Гильберта:

$$(\mathcal{J}\phi)(\xi) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\xi')}{\xi'-\xi} d\xi', \qquad (\mathcal{J}\phi)^* = -\mathcal{J}\phi^*$$

Перепишем полученное соотношение в виде

$$\psi_2^*(x,\xi) e^{i\xi x} + \frac{1-\mathcal{J}}{2} \tilde{\psi}_1 = 1 + \sum \frac{\lambda_\kappa}{\xi-\zeta_\kappa} \psi_{1\kappa}$$

$$-\psi_1(x,\xi) e^{-i\xi x} + \frac{1+\mathcal{J}}{2} \tilde{\psi}_2^* = \sum \frac{\lambda_\kappa^*}{\xi-\zeta_\kappa^*} \psi_{2\kappa}^*$$

и умножим первое из этих уравнений на $c^*(x,\xi)$, а второе на $c(x,\xi)$

где

$$c(x,\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)} e^{2i\xi x}$$

Учитывая (15), получаем, что

$$\tilde{\psi}_1 - c(x,\xi) \frac{1+\mathcal{J}}{2} \tilde{\psi}_2^* = -c(x,\xi) \sum \frac{\lambda_\kappa^*}{\xi-\zeta_\kappa^*} \psi_{2\kappa}^*$$

$$c^*(x,\xi) \frac{1-\mathcal{J}}{2} \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2^* = c^*(x,\xi) + c^*(x,\xi) \sum \frac{\lambda_\kappa}{\xi-\zeta_\kappa} \psi_{1\kappa} \qquad (16)$$

В дополнение к уравнениям (16) получаем $2N$ уравнений для ψ_{1j}, ψ_{2j}^*, полагая в (14) $\zeta = \zeta_j^*$, $j = 1, \dots, N$:

$$\frac{\psi_{1j}}{\lambda_j} + \sum \frac{\lambda_\kappa^*}{\zeta_j - \zeta_\kappa^*} \psi_{2\kappa}^* = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\tilde{\psi}_2^*(\xi)}{\xi - \zeta_j} d\xi \qquad (17)$$

$$-\sum \frac{\lambda_k}{\zeta_j^*-\zeta_k}\psi_{1k} + \frac{\psi_{2j}^*}{\lambda_j^*} = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\tilde{\psi}_1(\xi)}{\xi-\zeta_j^*}\,d\xi$$

Система уравнений (16), (17) относительно

$$\tilde{\psi}(\xi) = \psi(x,\xi), \quad \psi_k = \psi_k(x)$$

позволяет найти эти величины по данным рассеяния. Формулу для восстановления $q(x)$ по $\tilde{\psi}(\xi)$, ψ_k легко получить, сравнив асимптотическое поведение $\psi(x,\xi)$ при $\xi \to \infty$ найденное из формулы (14):

$$\begin{Bmatrix}\psi_2(x,\xi)\\ -\psi_1(x,\xi)\end{Bmatrix} e^{-i\xi x} = \begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix} + \frac{1}{\xi}\Big\{\sum \lambda_k^*\psi_k^* + \frac{1}{2\pi i}\int \tilde{\psi}^*(\xi)\,d\xi\Big\} + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$$

и, непосредственно, из дифференциального уравнения (8):

$$\psi(x,\xi)e^{-i\xi x} = \begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix} + \frac{1}{2i\xi}\begin{Bmatrix} q(x)\\ \int_x^\infty |q(s)|^2\,ds\end{Bmatrix} + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$$

Из этих двух соотношений мы получаем, что

$$q(x) = -2i\sum \lambda_k^*\psi_{2k}^* - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}_2^*(x,\xi)\,d\xi$$

$$\int_x^\infty |q(s)|^2\,ds = -2i\sum \lambda_k\psi_{1k} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}_1(x,\xi)\,d\xi \qquad (18)$$

В заключение этого параграфа мы приведём уравнения обратной задачи теории рассеяния, записанные в виде уравнения типа Марченко (ср. / 10, 11 /). Эти уравнения получаются из (16), (17) в результате преобразования Фурье по ξ.

Пусть

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{b(\xi)}{a(\xi)}e^{i\xi x}\,d\xi + \sum \frac{c_k}{a'(\zeta_k)}e^{i\zeta_k x} \qquad (19)$$

тогда после нескольких выкладок из (16), (17) мы получим

$$K_1(x,y) = F^*(x+y) + \int_x^\infty K_2^*(x,s)F^*(s+y)\,ds$$

$$K_2^*(x,y) = -\int_x^\infty K_1(x,s)F(s+y)\,ds \qquad (20)$$

где ядро $K(x,y)$ связано с $\psi(x,\xi)$ соотношением:

$$\psi(x,\xi) = e^{i\xi x} + \int_x^\infty K(x,s)e^{i\xi s}\,ds, \quad \operatorname{Im}\xi \ge 0$$

Заметим ещё, что формулы (18) в этих обозначениях принимают вид

$$q(x) = -2K_1(x,x)$$

$$\int_x^\infty |q(s)|^2\,ds = -2K_2(x,x)$$

§ 3. N-солитонные решения (явная формула)

Рассмотрим обратную задачу рассеяния в случае, когда $b(\xi,t) \equiv 0$. Тогда $\tilde{\psi}(\xi) = 0$, и решение обратной задачи сводится к решению конечной системы (17) линейных алгебраических уравнений. Мы перепишем эту систему в более симметричном виде

$$\psi_{1j} + \sum \frac{\lambda_j \lambda_k}{\zeta_j - \zeta_k^*} \psi_{2k}^* = 0 \qquad (17)$$

$$-\sum \frac{\lambda_k \lambda_j^*}{\zeta_j^* - \zeta_k} \psi_{1k} + \psi_{2j}^* = \lambda_j^*$$

Формулы (18) также принимают в рассматриваемом случае более простой вид

$$q(x) = -2i \sum \lambda_k^* \psi_{2k}^* \qquad (18)$$

$$\int_x^\infty |q(s)|^2 ds = -2i \sum \lambda_k \psi_{1k}$$

Если $N=1$, и $a(\zeta)$ имеет только один нуль в верхней полуплоскости, то система (17) имеет вид

$$\psi_1 + \frac{|\lambda|^2}{2i\eta} \psi_2^* = 0 \qquad (21)$$

$$\frac{|\lambda|^2}{2i\eta} \psi_1 + \psi_2^* = \lambda^*$$

Легко убедиться, что система (21) описывает солитон (6), параметры которого

$$x_0 = (2\eta)^{-1} \ln \frac{|\lambda(0)|^2}{2\eta}, \quad \varphi = -2 \arg \lambda(0)$$

В общем случае система (17) описывает N-солитонное решение. Эта система, как будет показано в приложении, невырождена, кроме этого имеет место формула

$$i\left(\sum \lambda_k \psi_{1k} - \sum \lambda_k^* \psi_{1k}^*\right) = \int_x^\infty |q(s)|^2 ds = \frac{d}{dx} \ln \det \Lambda \qquad (22)$$

где Λ - матрица системы (17). Для одномерного уравнения Шредингера аналогичная формула была получена Кэем и Мозесом /12/.

Для доказательства формулы (22) заметим, что

$$\frac{d}{dx} \ln \det \Lambda = \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{k=1}^{2N} \det \Lambda_k$$

где матрица Λ_k отличается от матрицы Λ столбцом с номером k, который является производной от соответствующего столбца матрицы Λ. При $1 \le k \le N$ упомянутый столбец матрицы Λ_k имеет вид

$$i\lambda_k \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1^* \\ \vdots \\ \lambda_N^* \end{matrix} \right\|$$

В силу формулы Крамера

$$\lambda_k \psi_{1k} = -i \frac{\det \Lambda_k}{\det \Lambda}$$

Таким образом

$$i\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\psi_{1k}=\frac{1}{\det\Lambda}\sum_{k=1}^{N}\det\Lambda_k$$

Для доказательства формулы (22) остается проверить, что

$$-i\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^*\psi_{1k}^*=\frac{1}{\det\Lambda}\sum_{k=N+1}^{2N}\det\Lambda_k \qquad (23)$$

Перепишем для этой цели систему (17) в виде

$$\psi_{2j}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_j\lambda_k^*}{\xi_j-\xi_k^*}\left(-\psi_{1k}^*\right)=\lambda_j$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_j^*\lambda_k}{\xi_j^*-\xi_k}\psi_{2k}+\left(-\psi_{1j}^*\right)=0$$

Матрица этой системы относительно $\{\psi_{2,1},\dots,\psi_{2,N},-\psi_{1,1}^*,\dots,-\psi_{1N}^*\}$ совпадает с матрицей Λ, откуда следуют формулы (23) и (22). Окончательно для N -солитонных решений имеем явную формулу

$$|u(x,t)|^2=\sqrt{2\varkappa}\,\frac{d^2}{dx^2}\ln\det\Lambda=\sqrt{2\varkappa}\,\ln\det\|BB^*+1\|$$

где матрица B

$$B_{jk}=\frac{\sqrt{c_j c_k^*}}{\xi_j-\xi_k^*}\,\frac{e^{i(\xi_j-\xi_k^*)}}{\sqrt{a'(\xi_j)\,a(\xi_k)}}$$

Зависимость величин c_j от времени задаётся формулой (13).

§ 4. N -солитонные решения (асимптотика при $t\to\pm\infty$).

Изучим поведение N -солитонного решения при больших $|t|$. При этом мы ограничимся случаем, когда все ξ_j различны, то есть не существует двух солитонов, имеющих одинаковые скорости. В этом случае N - солитонное решение при $t\to\pm\infty$ разбивается на расходящиеся солитоны. Чтобы убедиться в этом расположим ξ_j в порядке убывания - $\xi_1>\xi_2>\dots>\xi_N$

Из (12) имеем

$$\lambda_j(t)=\lambda_j(0)\exp\left\{-\eta_j(x+4\xi_j t)+i\xi_j x+2i(\xi_j^2-\eta_j^2)t\right\}$$

$$|\lambda_j(t)|=|\lambda_j(0)|e^{-\eta_j y_j}, \qquad y_j=x+4\xi_j t$$

Рассмотрим асимптотику N -солитонного решения на прямой $y_m=const$ при $t\to+\infty$. Тогда

$$y_j\to+\infty,\quad |\lambda_j|\to 0 \quad \text{при} \quad j<m$$

$$y_j\to-\infty,\quad |\lambda_j|\to\infty \quad \text{при} \quad j>m$$

Из системы (17) следует, что $\psi_{1j},\psi_{2j}\to 0$ при $j<m$.

В пределе имеем редуцированную систему уравнений относительно функций от y_m

$$\psi_{1m},\ \psi_{2m}^*\ ;\quad \phi_{1k}=\psi_{1k}^*\lambda_k,\quad \phi_{2k}=\psi_{2k}^*\lambda_k^*,\quad k=m+1,\dots,N.$$

а, именно:

$$\psi_{1m} + \frac{|\lambda_m|^2}{2i\eta_m}\psi_{2m}^* = -\lambda_m \sum_{k=m+1}^{N} \frac{1}{\zeta_j - \zeta_k^*}\phi_{2k}^*$$

$$\frac{|\lambda_m|^2}{2i\eta_m}\psi_{1m} + \psi_{2m}^* = \lambda_m^* \sum_{k=m+1}^{N} \frac{\phi_{1k}}{\zeta_j^* - \zeta_k} \tag{24}$$

и

$$\sum_{k=m+1}^{N} \frac{1}{\zeta_j - \zeta_k^*}\phi_{2k}^* = -\frac{\lambda_m^*}{\zeta_j - \zeta_m^*}\psi_{2m}^*$$

$$\sum_{k=m+1}^{N} \frac{1}{\zeta_j^* - \zeta_k}\phi_{1k} = -1 - \frac{\lambda_m}{\zeta_j^* - \zeta_m}\psi_{1m} \tag{25}$$

$$j = m+1, \dots, N$$

Разрешив последнюю систему относительно ϕ_{1k}, ϕ_{2k}^* мы получаем (см. формулы (2), (4) приложения) следующие простые формулы

$$\phi_{1k} = a_k + \frac{2i\eta_m}{a_m}\frac{a_k}{\zeta_k - \zeta_m}\psi_{1m}\lambda_m$$

$$\phi_{2k}^* = -\frac{2i\eta_m}{a_m^*}\frac{a_k^*}{\zeta_k^* - \zeta_m^*}\psi_{2m}^*\lambda_m^* .$$

Здесь

$$a_k = \frac{\prod_{p=m+1}^{N}(\zeta_k - \zeta_p^*)}{\prod_{p=m+1}^{N}(\zeta_k - \zeta_p)}\ ; \quad a_m = 2i\eta_m \prod_{p=m+1}^{N} \frac{\zeta_m - \zeta_p^*}{\zeta_m - \zeta_p}$$

Подставив выражения для ϕ_{1k}, ϕ_{2k}^* в (24) получаем, используя формулы (4), (5), (6) приложения,

$$\psi_{1m} + \frac{|\lambda_m^+|^2}{2i\eta_m}\psi_{2m}^* = 0$$

$$\frac{|\lambda_m^+|^2}{2i\eta_m}\psi_{1m} + \psi_{2m}^* = (\lambda_m^+)^*, \quad \lambda_m^+ = \lambda_m \prod_{p=m+1}^{N} \frac{\zeta_m - \zeta_p}{\zeta_m - \zeta_p^*} \tag{26}$$

Система (26) совпадает с системой (21) и описывает солитон со смещенным положением центра x_0^+ и фазой φ^+

$$x_{0m}^+ - x_{0m} = \frac{1}{\eta_m}\sum_{m+1}^{N} \ln\left|\frac{\zeta_m - \zeta_p}{\zeta_m - \zeta_p^*}\right| < 0$$

$$\varphi_m^+ - \varphi_m = -2\sum_{p=m+1}^{N} \arg\left(\frac{\zeta_m - \zeta_p}{\zeta_m - \zeta_p^*}\right)$$

Аналогично при $t \to -\infty$ получаем систему (24) с λ^-, φ^-. На прямых $y = x - \xi t$, где ξ не совпадает ни с одним ξ_m при $t \to \pm\infty$ редуцированная система асимптотически становится однородной и решение с экспоненциальной скоростью стремится к нулю, что и доказывает асимптотическое распадение N-солитонного решения на отдельные солитоны. Полученные формулы дают возможность описать процесс рассеяния солитонов. При

$t \to +\infty$ N-солитонное решение распадается на солитоны, расположенные таким образом, что впереди находится самый быстрый солитон, а сзади – самый медленный. При $t \to -\infty$ расположение солитонов обратное. При изменении времени t от $-\infty$ до $+\infty$ происходит изменение величины λ_m на фактор $\lambda_m^+ / \lambda_m^-$

что соответствует суммарному изменению координаты центра солитона

$$\Delta x_{0m} = x_{0m}^+ - x_{0m}^- = \frac{1}{2\eta_m}\left(\sum_{p=m+1}^{N} \ln\left|\frac{\zeta_m-\zeta_p}{\zeta_m-\zeta_p^*}\right| - \sum_{p=1}^{m-1} \ln\left|\frac{\zeta_m-\zeta_p}{\zeta_m-\zeta_p^*}\right|\right) \tag{27}$$

и фазы

$$\Delta\varphi_m = \varphi_m^+ - \varphi_m^- = \sum_{p=m+1}^{N} \arg\frac{\zeta_m-\zeta_p}{\zeta_m-\zeta_p^*} - \sum_{p=1}^{m-1} \frac{\zeta_m-\zeta_p}{\zeta_m-\zeta_p^*}$$

Формулы (27) можно интерпретировать, приняв, что солитоны попарно сталкиваются (причём каждый солитон сталкивается с каждым). При каждом парном столкновении более быстрый солитон дополнительно сдвигается вперед на величину

$\frac{1}{2\eta_m} \ln\left|\frac{\zeta_m-\zeta_p^*}{\zeta_m-\zeta_p}\right|$, $\xi_m > \xi_p$, а более медленный сдвигается назад на величину $\frac{1}{2\eta_p} \ln\left|\frac{\zeta_m-\zeta_p^*}{\zeta_m-\zeta_p}\right|$. Полный сдвиг солитона равен алгебраической сумме его сдвигов при парных столкновениях, так что эффект многочастичных столкновений полностью отсутствует. Аналогично обстоит дело и с фазами.

§ 5. Связанные состояния и кратные собственные значения

Скорость расхождения пары солитонов пропорциональна разности значений их параметров ξ_j; при совпадающих ξ солитоны не расходятся, а образуют связанное состояние. Рассмотрим связанное состояние N солитонов, положив для простоты $\xi_j = 0$. Тогда $c_k(t) = c_k(0)\, e^{-4i\eta_k^2 t}$. Непосредственно из общей формулы (20) видно, что связанное состояние представляет собой условно-периодическое решение уравнения (3), характеризующееся в общем случае N частотами $\omega_n = 4\eta_n^2$. Фактически в ответ входят всевозможные разности частот, поэтому связанное состояние из двух солитонов характеризуется всего одной частотой $\omega = 4(\eta_1^2 - \eta_2^2)$ и представляет собой периодическое решение уравнения (3).

При $\eta_2 \to 0$, $\omega \to 4\eta_1^2$, то есть период осцилляций стремится к постоянному пределу. Более детальное рассмотрение показывает, однако, что глубина осцилляций стремится к нулю и связанное состояние переходит в солитон с амплитудой η_1. При $\eta_2 \to \eta_1$ происходит слияние нулей $a(\zeta)$; связанное состояние при этом становится апериодическим.

Предельное состояние, возникающее при слиянии нулей и образовании у величины $a(\zeta)$ кратного нуля, удобно изучить исходя непосредственно из уравнений Марченко (20).

Рассмотрим ядро уравнения Марченко $F(x,t)$ для системы двух солитонов с близкими значениями параметров

$$F(x,t) = a_1 e^{i\zeta x + 4i\zeta^2 t} + a_2 e^{i(\zeta+\Delta\zeta)x + 4i(\zeta+\Delta\zeta)^2 t}$$

$$\simeq e^{i\zeta x + 4i\zeta^2 t}\left(a_1 + a_2 + i a_1 \Delta\zeta\,(x + 8\zeta t) + \dots\right.$$

переходя к пределу $\Delta\xi \to 0$; $a_2 \Delta\xi \to x$; $a_1 + a_2 \to c_1$ получим

$$F(x,t) = \left(c_1(t) + x c_2(t)\right) e^{i\xi x}$$

где

$$c_1(t) = c_1(0)\, e^{4i\xi^2 t}\,(1 + 8 x \xi t)$$

$$c_2(t) = c_2(0)\, e^{4i\xi^2 t}$$

Решая уравнения Марченко, получим после преобразований

$$q(x) = -\frac{4\eta \lambda^{*2} c_2^*}{1 + |c_2|^2 |\lambda|^4} \; \frac{-2 + |\lambda|^4 \mu\, c_2^*}{1 + |\mu|^2 |\lambda|^4} \tag{28}$$

$$\mu = \frac{2\eta\left(c_1 + 2\left(x + \frac{1}{2\eta}\right) c_2\right)}{1 + |c_2|^2 |\lambda|^4}, \quad \lambda = \frac{e^{i\xi x}}{2\eta}$$

Анализ этого выражения показывает, что при $|t| \to \infty$ оно представляет собой суперпозицию двух солитонов с амплитудой η, расстояние между которыми растёт со времени как $\ln 4\eta^2 t$. Аналогичный вид имеют и решения, возникающие в результате слияния большого количества простых нулей.

§ 6. Устойчивость солитона

В настоящей работе мы не будем рассматривать эволюцию начальных условий общего вида, в которых существенную роль может играть "несолитонная" часть решения, связанная с величиной. Мы рассмотрим только случай, когда эта величина мала, то есть

$$\left| \frac{b(\xi,t)}{a(\xi)} \right| = \left| \frac{b(\xi,0)}{a(\xi)} \right| \ll 1 \tag{29}$$

а коэффициент $a(\xi)$ имеет в верхней полуплоскости всего один нуль $\zeta = \zeta_1$. Такой выбор начальных условий соответствует постановке задачи об устойчивости солитона с параметрами $\xi_1 + i\eta_1 = \zeta_1$ при возмущении его непрерывным спектром.

Рассмотрим систему (16), (17) при $N = 1$ и выразим функции ψ_{21}^* и ψ_{11}^* из (17) через $\phi = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\tilde{\psi}(\xi)}{\xi - \zeta_1^*}$

После подстановки в (16) получаем систему только для величин $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2^*$. В качестве коэффициента в эту систему входит малая величина $c(x,\xi,t) = b(\xi,t) e^{i\xi x} / a(\xi)$. С точностью до членов квадратичных по c имеем

$$\tilde{\psi}_1 = 0, \quad \tilde{\psi}_2 = c(x,\xi,t)\left[1 + \frac{\zeta_1^* - \zeta_1}{\xi - \zeta_1} \frac{|\lambda|^4}{1 + |\lambda|^4}\right] \tag{30}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{c_1(0)}{a'(\zeta_1)}}\, e^{i2\zeta^2 t}\, e^{i\zeta_1 x}$$

Из формулы (18) имеем теперь

$$q(x,t) = q_0(x,t) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_2^*(x,\xi,t)\, d\xi \tag{31}$$

Здесь q_0 - солитон (6) с параметрами $\xi + i\eta = \zeta_1$. Учитывая, что

$$c(x,\xi,t) = \frac{b(\xi,0)}{a(\xi)}\, e^{2i\xi x + 4i\xi^2 t}$$

получаем, что интеграл в формуле (31) убывает как $1/\sqrt{t}$ при $t \to \infty$. Это означает, что солитон устойчив по отношению к возмущению его непрерывным спектром - асимптотически при $t \to \infty$ решение переходит в солитон.

Возмущение общего вида, кроме порождения непрерывного спектра, сдвигает положение нуля $a(\xi)$ на комплексной плоскости и тем самым возмущает параметры солитона. При $t \to \infty$

решение асимптотически стремится к этому возмущённому солитону.

§ 7. Квазиклассическое приближение

Рассмотрим такие начальные условия для уравнения (3), при которых к оператору $\hat{L}$ применимо квазиклассическое приближение. Для этого исключим из системы уравнений (8) функцию v_2. В квазиклассическом приближении $q'/q \ll |\xi|$ поэтому уравнение для v_1 можно заменить уравнением Шредингера

$$v_1'' + (|q|^2 + \xi^2) v_1 = 0$$

Отсюда следует, что в квазиклассическом приближении все собственные значения ξ лежат на мнимой оси и описываются правилами квантования Бора

$$\xi^2 = -\eta^2 \qquad \oint \sqrt{|q|^2 - \eta_n^2}\, dx = 2\pi \left(n + \tfrac{1}{2}\right)$$

Фактически, уровни расположены не строго на мнимой оси, а имеют малые действительные добавки, которые обеспечивают расхождение отдельных солитонов. Простая оценка показывает, что характерное отношение действительной части к мнимой $\xi/\eta \sim N^{-1/2}$, где N – общее число солитонов в квазиклассическом пределе большая величина.

Заметим (см. § 1), что если начальное условие чисто действительно, то все ξ_n в точности равны нулю. В этом случае можно пренебречь "несолитонной" частью решения вследствие экспоненциальной малости коэффициента отражения и считать, что мы имеем дело со связанным состоянием очень большого числа солитонов. Такое состояние характеризуется большим количеством частот и может описываться усредненно.

Величиной, характеризующей это усредненное состояние, может считаться функция распределения солитонов по амплитудам

$$f(\eta) = \frac{\partial n}{\partial \eta} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\eta}{\sqrt{|q|^2-\eta^2}}\, dx$$

Поскольку размер солитона однозначно связан с его амплитудой, то $f(\eta)$ – также функция распределения по обратным размерам. Если начальное условие $u(x,0)$ не обращается в нуль при $|x| \to \pm\infty$, а только ограничено, то можно ввести среднюю функцию распределения солитонов по амплитудам:

$$\tilde{f}(\eta) = \lim \frac{1}{2\pi L} \int_{-L}^{L} \frac{\eta}{\sqrt{|q|^2-\eta^2}}\, dx$$

Как функция $f(\eta)$ так и "средняя" функция распределения не зависит от времени.

Используя эти факты можно сделать вывод о том, какой характер будет носить нелинейная стадия развития неустойчивости плоской монохроматической волны с амплитудой u_0 в рамках уравнения (3). В результате неустойчивости возникает "обратимая" одномерная турбулентность, характеризующаяся средней функцией распределения по обратным длинам

$$\tilde{f}(\eta) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\varkappa |u_0|^2 - \eta^2}}$$

Развитие неустойчивости не будет сопровождаться никакой систематической передачей энергии от одних масштабов к другим.

§ 8. Законы сохранения

Уравнение (3) имеет бесконечное множество законов сохранения – это следует хотя бы из того факта, что сохраняется во времени величина $a(\xi)$. Среди законов сохранения, связанных с $a(\xi)$, существует счётное множество так называемых полиномиальных законов сохранения. Они имеют вид интеграла по x от полиномиального выражения от функции $u(x,t)$ и её производных по x.

Опишем регулярный способ вычисления таких законов сохранения. Функция

$$a(\xi) = \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 \,, \quad \operatorname{Im} \xi \geq 0$$

задаёт асимптотику при $x \to +\infty$ решения $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ уравнения (8): $\varphi_1(x,\xi) e^{i\xi x} \to a(\xi)$ при $x \to +\infty$, $\operatorname{Im}\xi > 0$, $\xi \neq \xi_k$ или, обозначив $\varphi_1 e^{i\xi x} = e^{\phi}$,

$$\phi(x,\xi) \to \ln a(\xi) \quad \text{при} \quad x \to \infty, \ |\xi| > R \tag{33}$$

Из (8) имеем следующее уравнение для

$$2i\xi \phi' = |q|^2 + \phi'^2 + q \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{q}\phi'\right)$$

которое позволяет регулярным образом вычислять коэффициенты асимптотического разложения функции $\phi(x,\xi)$ по степеням $1/\xi$:

$$\phi'(x,\xi) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{(2i\xi)^n} \tag{34}$$

$$f_{n+1} = q \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{q} f_n\right) + \sum_{j+k=n} f_j f_k \,, \quad f_1 = |q|^2 \tag{35}$$

Функция $\ln a(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$, $\operatorname{Im}\xi \geq 0$ и также допускает асимптотическое разложение по степеням $1/\xi$:

$$\ln a(\xi) \cong \sum \frac{c_n}{\xi^n} \tag{36}$$

Из формул (33), (34), (36) следует, что

$$(2i)^n c_n = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx \,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{37}$$

В силу рекуррентной формулы (35) подынтегральные выражения законов сохранения (37) представляют собой полиномы от функции u и её производных по x. Приведём первые пять законов сохранения

$$2i C_1(u) = \frac{\varkappa}{2} \int |u(x,t)|^2 dx$$

$$(2i)^2 C_2(u) = -\frac{\varkappa}{4} \int (u^* u_x - u u_x^*)\, dx$$

$$(2i)^4 C_4(u) = \frac{\varkappa}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u u_{xxx}^* + \frac{3\varkappa}{2} u u_x^* |u|^2\right) dx$$

$$(2i)^3 C_3(u) = -\frac{\varkappa}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|u_x|^2 - \frac{\varkappa}{2}|u|^4\right) dx$$

$$(2i)^5 C_5(u) = \frac{\varkappa}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[|u_{xx}|^2 + \frac{\varkappa^2}{2}|u|^6 - \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}|u|^2\right)^2 - 3\varkappa |u_x|^2 |u|^2 \Big] dx$$

Первые три интеграла имеют простой физический смысл, если интерпретировать уравнение (3) как нелинейное уравнение Шредингера. Константы движения C_1, C_2, C_3 совпадают при этом, с точностью до множителей, с числом частиц, импульсом и энергией.

Для N -солитонных решений нетрудно вычислить все константы движения C_n. В рассматриваемом случае из (11) следует, что

$$a(\xi)\, a^*(\xi) = 1$$

Ясно отсюда, что аналитическая в верхней полуплоскости функция $a(\xi)$ аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость и имеет там простые полюса в точках, сопряженных нулям ξ_k, $k=1,\dots,N$. Восстанавливая дробно рациональную функцию $a(\xi)$ по её нулям и полюсам, получаем, учитывая что $a(\xi)\to 1$ при $|\xi|\to\infty$:

$$a(\xi) = \prod_{p=1}^{N} \frac{\xi-\xi_p}{\xi-\xi_p^*}$$

Легко убедиться теперь, что

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} (\xi_k^n)^* - \xi_k^n$$

Наличие бесконечного числа полиномиальных законов сохранения является характерным свойством уравнений, к которым применим метод обратной задачи. Для уравнения Кортевега-де Вриза теория законов сохранения подробно разработана в работе /13/.

Приложение

Пусть $\xi_1,\dots,\xi_N$ произвольные комплексные числа такие, что $\xi_j \neq \xi_k$ при $j\neq k$, $\xi_j \neq \xi_k^*$ для всех j,k. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вида (23):

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\xi_k-\xi_j^*} f_k = g_j, \quad j=1,\dots,N \qquad (1)$$

Пусть

$$p(\xi) = \prod_{p=1}^{N}(\xi-\xi_p) \qquad q(\xi) = \prod_{p=1}^{N}(\xi-\xi_p^*)$$

$$a(\xi) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}; \qquad a_k = \frac{\prod_{p=1}^{N}(\xi_k-\xi_p^*)}{\prod'_{p=1}(\xi_k-\xi_p)}$$

Здесь и в дальнейшем Π' обозначает, что в произведении пропущен равный нулю сомножитель. Легко видеть, что

$$a(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^*}{\xi-\xi_k}$$

Полагая здесь $\xi=\xi_j$, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^*}{\xi_k^*-\xi_j} = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\xi_k-\xi_j^*} = 1 \qquad (2)$$

Мы получили таким образом решение системы (1) при $g_1=\dots=g_N=1$

Введём ещё в рассмотрение полиномы

$$p_k(\xi) = \frac{p(\xi)}{\xi-\xi_k}, \qquad q_k(\xi) = \frac{q(\xi)}{\xi-\xi_k^*}$$

Нетрудно убедиться, что для любого многочлена $h(\zeta)$ степени $N-1$ справедливо тождество:

$$h(\zeta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{h(\zeta_k)}{q(\zeta_k)}\, a_k\, P_k(\zeta)$$

Полагая здесь $\zeta = \zeta_j^*$, находим, что

$$\frac{h(\zeta_j^*)}{p(\zeta_j^*)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{h(\zeta_k)}{q(\zeta_k)}\, a_k\, \frac{1}{\zeta_j^*-\zeta_k}$$

При специальном выборе многочлена $h(\zeta) = q_\ell(\zeta)$ эта формула принимает вид

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\zeta_j^*-\zeta_k}\,\frac{1}{\zeta_k-\zeta_\ell^*} = \begin{cases} 0 & \text{при } \ell \neq j \\ 1/a_\ell^* & \text{при } \ell = j \end{cases} \qquad (3)$$

Из соотношений (3) следует, что матрицей обратной к матрице системы уравнений (1) является

$$\left\| \frac{a_j^*\, a_k}{\zeta_j^*-\zeta_k} \right\|$$

Возвращаясь к системе (23), мы видим, что нам нужно выписать решение системы (1) при

$$g_j = \frac{1}{\zeta_j-\zeta_0^*}$$

где ζ_0 некоторое комплексное число, отличное от $\zeta_1, \dots, \zeta_N$.

Пусть

$$\tilde a_k = \frac{\prod\limits_{p=0}^{N} (\zeta_k-\zeta_p^*)}{\prod\limits_{p=0}^{N}{}' (\zeta_k-\zeta_p)}, \quad k = 0, \dots, N$$

При этом

$$\tilde a_k = \frac{\zeta_k-\zeta_0^*}{\zeta_k-\zeta_0}\, a_k, \quad k > 0$$

Аналогично формуле (3) имеем

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\tilde a_k}{(\zeta_j^*-\zeta_k)}\,\frac{1}{\zeta_k-\zeta_0} = \begin{cases} 0, & j > 0 \\ \dfrac{1}{\tilde a_0^*}, & j = 0 \end{cases}$$

Откуда заменяя $\tilde a_k$ через a_k при $k > 0$ получаем, что

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\zeta_j^*-\zeta_k}\,\frac{1}{\zeta_k-\zeta_0} = -\frac{\tilde a_0}{2i\eta_0}\,\frac{1}{\zeta_j^*-\zeta_0} \qquad (4)$$

и, что

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\zeta_0^*-\zeta_k}\,\frac{1}{\zeta_k-\zeta_0} = \frac{1}{\tilde a_0^*} - \frac{\tilde a_0}{4\eta_0^2} \qquad (5)$$

В связи с уравнениями (22) укажем еще обобщение формулы (2)

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\zeta_k-\zeta_0} = 1 - \frac{\tilde a_0}{2i\eta_0} \qquad (6)$$

Литература

1. В.И.Таланов. Письма ЖЭТФ 2.222. 1965.
2. P.L. Kelley, Phys. Rev. Lett 15. 1005. 1965
3. В.И.Беспалов, А.Г.Литвак, В.И.Таланов. Доклад на II Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике. Новосибирск. 1966г. Опубл. в сборнике трудов симпозиума. Изд. "Наука". 1968.
4. В.Е.Захаров. Диссертация. ИЯФ СО АН СССР. 1966г.
5. В.И.Беспалов, В.И.Таланов. Письма ЖЭТФ т.3, вып.12, стр.471, 1966.
6. А.Г.Литвак, В.И.Таланов. Изв.вузов - радиофизика, 1967 г., т.10, вып.4, стр.539.
7. P.D. Lax Comm. on Pure and Appl. Math 21, p. 467, 1968.
8. C.S. Gardner, G. Green, M. Kruskal, R. Miura Phys. Rev. Lett. 19, 1095, 1967.
9. В.Е.Захаров. ЖЭТФ т.60, вып.2 (в печати).
10. В.А.Марченко. ДАН СССР, 104, № 5. 1955.
11. Л.Д.Фаддеев. ДАН СССР, т.121, № 1, стр.63, 1958г.
12. J. Kay, H.E. Moses, Nuovo Cim. 3. 2. 227. 1956
13. G.S. Gardner, G. Green, M. Kruskal, R. Miura, N. Zabusky, J. Math. Phys. 9, p.1204, (1968), 11, p. 952 (1970)

Ответственный за выпуск В.Е.Захаров
Подписано к печати 28.I.71.
Усл. 1,3 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 7 . ПРЕПРИНТ.
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.