4

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 11-71

Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко

ДИФФУЗИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЧАСТИЦ В НАКОПИТЕЛЯХ

Новосибирск

1971

Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко

ДИФФУЗИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЧАСТИЦ В НАКОПИТЕЛЯХ

Новосибирск

1971

С О Д Е Р Ж А Н И Е

I. Кинетика поляризации

1. В в е д е н и е

Работа посвящена эффектам деполяризации, которые обязаны процессам рассеяния траекторий частиц, движущихся в электромагнитном поле. Источником стохастизации орбитального движения частицы могут быть, например, квантовые флуктуации излучения, столкновения с остаточным газом и т.д.

Как известно / 1 – 4 /, при условии классичности движения частицы, спин $\vec{\zeta}(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\dot{\vec{\zeta}} = [\vec{W}_л \vec{\zeta}] \tag{1.1}$$

$$\vec{W}_л = \left(1+\gamma\frac{q'}{q_c}\right)\frac{[\vec{v}\dot{\vec{v}}]}{v^2} - \frac{q}{\gamma}\frac{(\vec{H}\vec{v})\vec{v}}{v^2} + \frac{q}{\gamma^2 v^2}[\vec{v}\vec{E}]$$

где $q = q_c + q' = \frac{e}{m} + q'$ – гиромагнитное отношение, q' –его аномальная часть, $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$, $(c=1)$ $\vec{v}$, $\dot{\vec{v}}$ – скорость и ускорение частицы в электромагнитном поле $\vec{E}$, $\vec{H}$.

В отсутствии диффузии траектории частицы, $\vec{W}_л$ является регулярной функцией времени, определяемой заданием импульсов и координат частицы в начальный момент. При этом пучок частиц, движущихся около равновесной орбиты, может деполяризоваться лишь вблизи спиновых резонансов, когда движение спина особенно чувствительно к параметрам траектории частиц / 5, 6/.

С учётом рассеяния частиц на "внешних" источниках, $\vec{W}_л$ испытывает хаотическое изменение, что приводит к диффузии спинового движения и, в конечном счёте, может полностью деполяризовать пучок. Существенно, что этот эффект имеет место и вдали от резонансов.

На такой механизм деполяризации впервые обратили внимание авторы работы / 7 /, где было показано, что, при отклонении равновесной орбиты от плоской, скачки энергии, возникающие из-за квантовых флуктуаций синхротронного излучения, могут приводить к деполяризации пучка электронов (позитронов).

В настоящей работе развит общий метод решения задачи о диффузии спина, имеющий непосредственное физическое толкование без конкретизации источника флуктуаций импульса. Получены формулы, с помощью которых можно находить скорость диффузии спина в накопителе с произвольным электромагнитным полем. Для приложений более детально разобран обычный случай движения, близкого к "идеальному" (под идеальным понимается движение с разделёнными вертикальными и радиальными колебаниями возле плоской замкнутой орбиты). В идеальном приближении диффузия спина обязана поперечным флуктуациям импульса. Если они малы по сравнению с продольными, последние могут стать определяющими благодаря отклонениям от идеальности. Эффекты деполяризации, обязанные флуктуациям энергии ($\delta\mathcal{E} \simeq \vec{v}\,\delta\vec{p}$), сильно зависят от конкретного вида возмущений и не ограничиваются указанным в / 7 /.

Следует отметить, что вдали от спиновых резонансов рассматриваемый механизм деполяризации может быть существенным лишь для систем с трением в орбитальном движении (точнее, в условиях, когда время жизни пучка велико по сравнению с временами затухания); в системах "без трения" процессы рассеяния не успевают деполяризовать пучок за время жизни.

В данной работе не учитывается непосредственное взаимодействие спина с "рассеивателем". Связанные с этим эффекты в значительно меньшей степени чувствительны к свойствам динамического движения спина во внешнем поле, чем изучаемые в работе. Для построения кинетики поляризации в области преобладания тех или других эффектов, достаточно их независимого рассмотрения без учёта возможной корреляции между ними. В работах / 8 -10,3/ исследовался эффект радиационной поляризации лёгких частиц при движении в магнитном поле. Показано, что в случае плоской орбиты за время

$$\tau_p = \left(\frac{15\sqrt{3}}{16}\,\gamma^2\,\frac{\lambda}{R}\,\delta_{rad}\right)^{-1} \qquad (1.2)$$

(здесь λ - комптоновская длина, R^{-1} - кривизна орбиты, $\delta_{rad} = -\frac{1}{\mathcal{E}}\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ - декремент радиационных потерь) устанавливается равновесная степень поляризации

$$\frac{8}{5\sqrt{3}} \approx 92\%$$

(общий случай не плоской орбиты см. / 10, 3 , 4 /.

Этот вывод справедлив лишь при $\tau_d \gg \tau_p$ (τ_d - время деполяризации, полученное без учёта взаимодействия спина с рассеивателем). В обратном случае пучок полностью деполяризуется за время τ_d.

§ 2. Основное уравнение диффузии

Рассмотрим более подробно механизм диффузии спинов. Закон движения спина частицы с заданной траекторией, характеризуемой набором интегралов движения $C = \{C_i\}$, можно записать в виде:

$$\vec{\zeta}(t) = O(C,t)\,\vec{\zeta}_0$$

где $\vec{\zeta}_0$ - начальное значение спина, O - матрица поворота. В момент рассеяния $t = t_0$ происходит скачкообразное изменение импульса $\vec{p}$ частицы (а значит и C). Это приводит к скачку

$\delta O = O(C+\delta C, t) - O(C,t)$. Непосредственно в акте рассеяния спин $\vec{\zeta}$ остаётся непрерывным (без учёта эффектов взаимодействия спина с рассеивателем), отклонение $\delta\vec{\zeta}$ набирается "интегрально" в последующие моменты $t > t_0$ из-за изменения траектории частицы. Начальные условия для новой траектории спина $\vec{\zeta}_0 + \delta\vec{\zeta}_0$ находятся из условия непрерывности $\vec{\zeta}$ при $t = t_0$:

$$\delta\left[O\vec{\zeta}_0\right] = 0$$

Хаотичность скачков δC приводит к диффузии спина и уменьшению начальной поляризации.

Кинетика поляризации для рассматриваемого механизма диффузии, очевидно, существенно зависит от свойств движения спина во внешнем поле.

Общий характер динамического движения спинов ансамбля частиц (без учёта процессов диффузии и трения) можно представить следующим образом. Частота прецессии спина $\vec{W}_л$ как функция динамических переменных частицы может быть записана в виде

$$\vec{W}_л(I_i,\psi_i,\theta)=\vec{W}_л(I_i,\psi_i+2\pi,\theta)=\vec{W}_л(I_i,\psi_i,\theta+2\pi) \tag{2.1}$$

где I_i,ψ_i – переменные действий и фаз синхротронного и бетатронного движений, θ – азимут частицы.

Будем считать известным движение спина на равновесной траектории, где

$$\vec{W}_л=\vec{W}_s(\theta)$$

Согласно / 4 / введем периодическую систему ортов

$$\vec{n},\ \vec{e}=\vec{e}_1+i\vec{e}_2=\vec{\eta}e^{i\nu\theta} \tag{2.2}$$

где $\vec{n}$, $\vec{\eta}$ – ортогональные решения уравнения:

$$\vec{\zeta}'\equiv\frac{d\vec{\zeta}}{d\theta}=\frac{1}{\omega_s}\left[\vec{W}_s\vec{\zeta}\right]$$

(ω_s – равновесная частота обращения частицы), обладающие свойствами:

$$\vec{n}(\theta)=\vec{n}(\theta+2\pi)\qquad \vec{\eta}(\theta+2\pi)=e^{-2\pi i\nu}\vec{\eta}(\theta)$$
$$\vec{n}^2=1\ ,\qquad \vec{\eta}\vec{\eta}^*=2\ ,\qquad \nu=const \tag{2.3}$$

$2\pi\nu$ имеет смысл угла поворота спина вокруг $\vec{n}$ за период движения частицы. В системе ортов (2.2) спин неравновесной частицы удовлетворяет уравнению

$$\vec{\zeta}'=\left[\vec{W}\vec{\zeta}\right]$$

$$\vec{W}=\nu\vec{n}+\vec{w}=\nu\vec{n}+\frac{\vec{W}_л}{\theta}-\frac{\vec{W}_s}{\omega_s} \tag{2.4}$$

$\vec{w}(I_i,\psi_i,\theta)$ обязано отклонению траектории частицы от равновесной.

Аналогично случаю однопериодической зависимости, на фиксированной неравновесной траектории существует решение $\vec{m}(I_i,\psi_i,\theta)$ уравнения (2.4), обладающее свойствами (2,1):

$$\vec{m}(I_i,\psi_i,\theta)=\vec{m}(I_i,\psi_i+2\pi,\theta)=\vec{m}(I_i,\psi_i,\theta+2\pi) \tag{2.5}$$

Для наших целей нет необходимости доказывать здесь это утверждение, поскольку во всех рассматриваемых ниже задачах оно подтверждается. Все остальные решения вращаются вокруг $\vec{m}$ с одной угловой скоростью. Таким образом, общее решение можно представить в виде:

$$\vec{\zeta}=\zeta_m\vec{m}(I_i,\psi_i,\theta)+\sqrt{1-\zeta_m^2}\,Re\,e^{-i\psi}\vec{\ell}(I_i,\psi_i,\theta) \tag{2.6}$$

где $\zeta_m=\vec{\zeta}\vec{m}=const$, ψ – фаза прецессии спина вокруг $\vec{m}$, $\vec{\ell}=\vec{\ell}_1+i\vec{\ell}_2$ – поперечный к $\vec{m}$ комплексный орт, удовлетворяющий свойству (2.5).

Выбор $\vec{\ell}$ однозначно определяет угловую скорость ψ'. Учитывая, что $\vec{m}$ – решение (2.4), из (2.6) получаем:

$$\psi'=\vec{W}\vec{m}-\frac{i}{2}\vec{\ell}'\vec{\ell}^* \tag{2.7}$$

$\vec{\ell}$ выберем так, чтобы ψ' не зависела от фаз ψ_i, θ.

В системе ортов $\vec{\ell}$, $\vec{m}$ спин движется в постоянном "поле"

$$\vec{\psi}' = \psi' \vec{m}$$

На равновесной траектории:

$$\vec{m}_s = \vec{n}(\theta), \quad \vec{\ell}_s = \vec{e}(\theta), \quad \psi'_s = \nu$$

Чувствительность $\vec{m}$ к параметрам траектории существенно зависит от близости к спиновым резонансам.

При малой вариации $\vec{w}$ ($\vec{w} \to \vec{w} + \delta \vec{w}$) в первом приближении с учётом свойства (2.5) получаем:

$$\delta \vec{m} = \mathrm{Re}\, \vec{\ell} \sum_{\{k\}} \frac{(\vec{\ell}^* \delta\vec{w})_{\{k\}}}{\psi' - \psi'_{\{k\}}} e^{-i\psi_{\{k\}}} \qquad (2.8)$$

$$\vec{\ell}^*\delta\vec{w} = \sum_{\{k\}} (\vec{\ell}^*\delta\vec{w})_{\{k\}} e^{-i\psi_{\{k\}}}, \quad \psi'_{\{k\}} = \nu_{\{k\}}$$

Пусть ψ' не равна какой-либо комбинации из частот орбитального движения:

$$\psi' - k - \sum_{i=1}^{3} k_i \psi'_i \equiv \psi' - \nu_{\{k\}} \equiv \Phi' \neq 0 \qquad (2.9)$$

(k, k_i – целые числа).

Тогда среднее за время $t > |\Phi'|^{-1}$ значение спина частицы на заданном азимуте θ будет равно

$$\vec{\zeta}_\theta = \zeta_m \langle \vec{m}\, (I_i\ \psi_i\ \theta)\rangle_{\psi_i} \qquad (2.10)$$

где $\langle\ldots\rangle_{\psi_i}$ означает усреднение по фазам ψ_i. При наличии разброса $\Delta\Phi'$ по частотам Φ', аналогичной формулой после размешивания по фазам ψ, ψ_i за время

$$t > |\omega_s \Delta\Phi'|^{-1}$$

будет определяться средний спин для группы частиц с близкими значениями $I_i\ \zeta_m$.

Скачки импульса при стохастических столкновениях частиц с какими-либо источниками приводят к рассеянию траекторий и диффузии спинов. В тех случаях, когда за время $|\dot\Phi|^{-1}$ $\vec{m}$ и Φ' вследствии столкновений меняются мало, для описания процесса деполяризации достаточно найти среднюю скорость изменения ζ_m:

$$\dot{\zeta}_m = \overline{\delta\zeta_m} \qquad (2.11)$$

где $\overline{\delta\zeta_m}$ – усредненное по столкновениям приращение в единицу времени. Используя непрерывность $\vec{\zeta}$ в акте столкновения, для скачка $\delta\zeta_m$ получаем:

$$\delta\zeta_m = \vec{\zeta}\,\delta\vec{m} = \zeta_m \vec{m}\, \delta\vec{m} + \sqrt{1-\zeta_m^2}\ \mathrm{Re}\, e^{-i\psi}\,\vec{\ell}\,\delta\vec{m} = -\frac{1}{2} \zeta_m\, \delta\vec{m}^2 + \sqrt{1-\zeta_m^2}\ \mathrm{Re}\, e^{-i\psi}\,\vec{\ell}\,\delta\vec{m} \qquad (2.12)$$

$$(\vec{m}^2 = 1)$$

Правую часть (2.11) можно усреднить по всем фазам ψ, ψ_i, θ, если выполнены следующие условия:

1. Время релаксации τ_m распределения по $\vec{m}$ (характерное время изменения $\vec{m}$ из-за процессов диффузии и трения) велико по сравнению с временами динамического движения спина:

$$|\dot\Phi| \gg \tau_m^{-1} \qquad (2.13а)$$

2. Мало изменение "поля" $\dot\Phi\vec{m}$ из-за столкновений за время $|\dot\Phi|^{-1}$:

$$|\dot\Phi|^3 \gg \overline{\delta\dot\Phi^2}$$

или

$$|\dot\Phi| \gg \overline{\delta\vec{m}^2} + \frac{\overline{\delta\dot\Phi^2}}{\dot\Phi^2} \qquad (2.13б)$$

При усреднении по фазам второй член в (2.12), учитывающий, в первом порядке по скачкам импульса $\delta\vec{p}$, воздействие "диссипативных сил" (сил трения) обращается в нуль. В результате получаем

$$\dot{\zeta}_m = -\frac{1}{2}\langle \delta \vec{m}^2\rangle_I \zeta_m \qquad (2.14)$$

где $\langle\delta\vec{m}^2\rangle_I$ означает усредненное по фазам ψ_i, θ изменение квадрата угла рассеяния $\vec{m}$ в единицу времени $\overline{\delta\vec{m}^2}$. Рассматривая $\vec{m}$ как функцию координат и импульсов ($\vec{r}, \vec{p}$), можно выразить $\overline{\delta\vec{m}^2}$ через тензор рассеяния импульса $d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\overline{\delta p_\alpha \delta p_\beta}$:

$$\frac{1}{2}\overline{\delta\vec{m}^2} = \frac{\partial\vec{m}}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\vec{m}}{\partial p_\beta} d_{\alpha\beta} \qquad (2.15)$$

Как и должно быть, в области применимости уравнения (2.14):

$$\langle\delta\vec{m}^2\rangle_I \ll |\dot{\varphi}|$$

Величина $\langle\delta\vec{m}^2\rangle_I$ увеличивается при приближении к спиновым резонансам (см.2.8). При этом максимальная скорость деполяризации ограничивается условиями (2.13). Вдали от резонансов разброс $\vec{m}$ мал ($|\Delta\vec{m}| \ll 1$) и определяющим является условие (2.13а) ($|\dot{\varphi}| \gg |\Delta\dot{\varphi}|$), где

$$\tau_m^{-1} \sim \frac{\langle\delta\vec{m}^2\rangle}{|\Delta\vec{m}|^2} \qquad (2.16)$$

$\langle\ldots\rangle$ включает усреднение и по I_i:

Вблизи резонанса, когда вследствие диффузии возможен переворот $\vec{m}$, определяющим является условие (2.13б).

Для полного описания кинетического процесса необходимо, строго говоря, привлекать уравнение, описывающее диффузию (или размешивание) фазы ψ. При выполнении условий (2.13) в этом нет практической необходимости, так как время размешивания $\vec{\zeta}_\perp = \sqrt{1-\zeta_m^2}\,\vec{\ell}\,e^{-i\psi}$ не может быть больше, чем время затухания ζ_m: даже при пренебрежении разбросом частот $\dot{\varphi}$, как мож-

но убедиться, равномерное распределение по $\vec{\zeta}_\perp$ устанавливается за время $< \langle\delta\vec{m}^2\rangle_I^{-1}$.

Условия (2.13) могут нарушаться вблизи резонансов. При этом использование уравнения (2.11) становится не эффективным, так как, из-за быстрого изменения $\vec{m}$ вследствие процессов диффузии и трения, ζ_m не является интегралом движения на временах $\sim |\dot{\varphi}|^{-1}$.

При нарушении условий (2.13) можно оценивать время деполяризации из простых физических соображений (см.§ 4, 8).

§ 3. Время деполяризации в нерезонансном случае

Найдем время деполяризации вдали от спиновых резонансов, когда отклонение $\vec{m}$ от $\vec{n}$ мало:

$$|\vec{m} - \vec{n}| \ll 1 \qquad (3.1)$$

Легко видеть при этом, что в системах без трения в орбитальном движении

$$\tau_m^{-1} \sim \langle\delta\vec{m}^2\rangle$$

и в течение времени жизни пучка τ_{max} сохраняется начальная степень поляризации. Действительно, из (2.14)

$$|\Delta\zeta_m|_{max} \sim \langle\delta\vec{m}^2\rangle\,\tau_{max} \sim |\Delta\vec{m}^2|_{max} \ll 1 \qquad (3.2)$$

В системах с трением

$$\tau_m^{-1} \sim \frac{\langle\delta\vec{m}^2\rangle}{|\Delta\vec{m}|^2} \gg \langle\delta\vec{m}^2\rangle \qquad (3.3)$$

где $|\Delta\vec{m}|$ – равновесный разброс $\vec{m}$ в пучке. Из (3.3) следует, что за время малого изменения поляризации произойдет многократное перемешивание траекторий частиц. Усредняя (2.14) по равновесному распределению I_i, получаем:

$$\dot{\zeta}_m = -\tau_d^{-1}\zeta_m, \qquad \tau_d^{-1} = \frac{1}{2}\langle\delta\vec{m}^2\rangle \qquad (3.4)$$

Как видно, среднее (на заданном азимуте) значение спина $\langle \vec{J} \rangle_\theta$ затухает экспоненциально с декрементом τ_d^{-1}:

$$\langle \vec{J} \rangle_\theta = \langle J_m \vec{m} \rangle_\theta \simeq \langle J_m \rangle \vec{n}(\theta) = \langle \vec{J}\vec{n} \rangle_{t=0} e^{-\frac{t}{\tau_d}} \vec{n}(\theta) \tag{3.5}$$

В нерезонансном случае отклонение движения спина от равновесного мало и может быть найдено по теории возмущения. "Влючение" $\vec{w}$ даёт малые колебания оси прецессии $\vec{m}$ около $\vec{n}$ и поправку к ν. Ищем $\vec{m}$ в виде:

$$\vec{m} = \sqrt{1-|c|^2}\, \vec{n}(\theta) + \operatorname{Re} c\, \vec{e} \tag{3.6}$$

Из (2.4) получаем уравнение для c:

$$c' = i\sqrt{1-|c|^2}\, \vec{w}\vec{e}^{\,*} - i(\nu + \vec{w}\vec{n})\, c \tag{3.7}$$

В первом приближении с учётом (2.5)

$$c = i e^{-i\nu\theta} \int_{-\infty}^{\theta} (w_\perp)_{\theta'} e^{i\nu\theta'} d\theta' \equiv \overline{w_\perp}\ ; \quad (w_\perp \equiv \vec{w}\vec{e}^{\,*}) \tag{3.8}$$

(Интегрирование производится с отрицательной мнимой добавкой к ν). Для дальнейшего укажем следующие свойства введенного оператора $\overline{\cdots}$:

1. $\overline{e^{-i\omega\theta}} = \dfrac{e^{-i\omega\theta}}{\nu - \omega}$, в частности $\overline{1} = \dfrac{1}{\nu}$ (3.9)

2. Пусть $F = \sum_k F_k e^{-i\nu_k\theta}$

$$\overline{F} = \sum_k \frac{F_k}{\nu - \nu_k} e^{-i\nu_k\theta} \tag{3.10}$$

3. Если $F(\theta + 2\pi) = e^{-2\pi i \mu} F(\theta)$, то

$$\overline{F} = \frac{i}{e^{2\pi i(\nu-\mu)} - 1} \int_0^{2\pi} F(\theta+\tau) e^{i\nu\tau} d\tau \tag{3.11}$$

4. $\overline{F_1 F_2} = F_1 \overline{F_2} + i\, \overline{F_1' \overline{F_2}}$ в частности

$$\overline{F} = F\overline{1} + i\, \overline{F'\overline{1}} = \frac{F}{\nu} + i\,\frac{\overline{F'}}{\nu} \tag{3.12}$$

(проверяется интегрированием по частям)

5. При $\nu \to \infty$ $(\nu \gg \nu_{эфф})$ из свойства (3.12) следует:

$$\overline{F} \simeq \frac{F}{\nu} + i\frac{F'}{\nu^2} - \frac{F''}{\nu^3} + \ldots \tag{3.13}$$

Из (3.4, 3.8) получаем формулу для τ_d^{-1}:

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2}\langle \delta \vec{m}^2 \rangle \simeq \frac{1}{2}|\delta c|^2 = \frac{1}{2}\langle |\delta \overline{w_\perp}|^2 \rangle \tag{3.14}$$

В (3.8) можно $w_\perp$ представить рядом Фурье:

$$w_\perp = \sum_k w_{\perp k} e^{-i\psi_k} \equiv \sum_k U_k\ ; \quad (\psi_k' = \nu_k) \tag{3.15}$$

При этом (см. св-во 3.10):

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{kk'} \frac{\langle \delta U_k\, \delta U_{k'}^* \rangle}{(\nu - \nu_k)(\nu - \nu_{k'})} \tag{3.16}$$

(Учёт скачков расстройки см. след. параграф).

При достаточной близости ν к ν_k:

$$\tau_d^{-1} \simeq \frac{1}{2} \frac{\langle |\delta U_k|^2 \rangle}{(\nu - \nu_k)^2} \sim \frac{|U_k|^2}{(\nu - \nu_k)^2} \tau_k^{-1} \tag{3.17}$$

В системах с трением $\tau_k^{-1} \sim k\, \tau^{-1}$, где τ^{-1} – декремент трения.

§ 4. Диффузия вблизи резонансов

Для конкретности рассмотрим диффузию поляризации вблизи уединенного резонанса первого порядка.

Примеры с более сложным динамическим движением (модуляционные резонансы, перекрытие резонансов) рассмотрены в § 8. Правильное решение для $\vec{m}$, пригодное и при

$$|\nu-\nu_\kappa| \lesssim |w_{\perp\kappa}| = u \tag{4.1}$$

имеет вид:

$$\vec{m}=\frac{\vec{h}}{h} \qquad h=\sqrt{\varepsilon^2+u^2}$$

$$\vec{h} = \varepsilon\vec{n} + Re\, u e^{i\psi_\kappa}\vec{e}^{\,*}$$

$$\varepsilon = \nu-\nu_\kappa + \langle \vec{w}\vec{n}\rangle \quad , \quad \psi'_\kappa = \nu_\kappa \tag{4.2}$$

В резонансной системе (вращающейся относительно (2.2) со скоростью $\nu_\kappa \vec{n}$) спин прецессирует вокруг $\vec{m}$ с постоянной угловой скоростью h

В случае

$$h \gg \lambda^{x)} \tag{4.3}$$

где λ - декремент затухания $\vec{h}$ вследствие трения $(\tau_m^{-1} \sim \lambda)$, время деполяризации можно находить с помощью (2.14). С учётом скачков ε из (4.2) получаем

$$\delta\vec{m}^2 = \left(\delta\, arctg\, \frac{u}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{u^2}{h^2}\delta\psi_\kappa^2 = \frac{(\varepsilon\delta u - u\delta\varepsilon)^2}{h^4} + \frac{u^2}{h^2}\delta\psi_\kappa^2 \tag{4.4}$$

По порядку величины

$$\langle\delta u^2\rangle \sim u^2\lambda \quad , \quad \delta\varepsilon^2 \sim \Delta^2\lambda$$

где u^2, Δ^2 - среднеквадратичный разброс в равновесном состоянии пучка.

Таким образом:

$$\langle\delta\vec{m}^2\rangle \sim \left(\frac{u^2}{h^2} + \frac{u^2\Delta^2}{h^4}\right)\lambda \tag{4.5}$$

Как видно, если

$$\Delta < h$$

то скачками ε можно пренебречь.

При малом разбросе $\vec{m}$ ($u \ll h$) получаем нерезонансную формулу (3.17)

$$\tau_d^{-1} \sim \frac{u^2}{h^2}\lambda \tag{4.6}$$

В области резонанса, когда разброс $\vec{m}$ велик, сначала происходит динамическое размешивание спинов частиц ("динамическая деполяризация")[x)]. При описании затухания "остаточной" поляризации, нельзя разделить кинетику спинового и орбитального движения, поскольку в этом случае

$$\tau_m^{-1} \sim \langle\delta\vec{m}^2\rangle \tag{4.7}$$

---

x) Ограничиваемся случаем $\lambda_\perp \sim \lambda_\parallel \sim \lambda$.

x) Динамическое размешивание, как правило, не приводит к полному исчезновению $\langle\vec{\zeta}\rangle$ и тем более - к изотропному распределению спинов.

При этом, очевидно

$$\tau_d^{-1} \sim \lambda \tag{4.8}$$

Рассмотрим теперь случай

$$\Delta \sim \langle h \rangle \gg u, \lambda \tag{4.9}$$

когда деполяризация обязана диффузии по ε (см.4.5). При этом τ_d определяется малой областью по ε, в которой за время $\sim \lambda^{-1}$ побывают все частицы. Условие применимости уравнения (2.14) (условие 2.13б) в нашем случае

$$h^3 > \overline{\delta \varepsilon^2} \sim \Delta^2 \lambda \tag{4.10}$$

$$\frac{d\overline{h^2}}{dt} \sim \overline{\delta \varepsilon^2}$$

Если

$$u > \left(\overline{\delta \varepsilon^2}\right)^{1/3} \tag{4.11}$$

то условие (4.10) выполнено для всех ε. При этом τ_d определяется временем достижения, за счет процессов диффузии и трения, области резонанса $|\varepsilon| \sim u$, где происходит переворот $\vec{m}$. Так, для равновесного распределения

$$\tau_d \sim \lambda^{-1} \tag{4.12}$$

В обратном случае

$$u \ll \left(\overline{\delta \varepsilon^2}\right)^{1/3} \tag{4.13}$$

(2.14) применимо лишь до

$$|\varepsilon| \sim \varepsilon_r = \left(\overline{\delta \varepsilon^2}\right)^{1/3}$$

оценку τ_d можно получить, рассматривая процесс деполяризации как некоррелированные прохождения, с частотой $\sim \lambda$, эффективной области $\sim \varepsilon_r$. За одно прохождение изменение ζ_n в первом порядке:

$$|\delta \zeta_n| \sim \zeta_\perp u \tau$$

где τ – время поворота спина вокруг $\vec{n}$ на угол ~ 1 при прохождении области $|\varepsilon| < \varepsilon_r$:

$$\int_0^\tau \varepsilon\, dt \sim \int_0^\tau \sqrt{\overline{\delta \varepsilon^2}\, t}\; dt \sim 1$$

откуда

$$\tau \sim \left(\overline{\delta \varepsilon^2}\right)^{-1/3}, \quad |\delta \zeta_n| \sim \zeta_\perp \frac{u}{\left(\overline{\delta \varepsilon^2}\right)^{1/3}} \tag{4.14}$$

Средне-квадратичная скорость изменения ζ_n:

$$\dot{\zeta}_n \sim \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta_n} (\delta \zeta_n)^2 \lambda \sim -\frac{u^2 \lambda}{\left(\overline{\delta \varepsilon^2}\right)^{2/3}} \zeta_n$$

Следовательно, при условии (4.13)

$$\tau_d^{-1} \sim \frac{u^2 \lambda}{\left(\overline{\delta \varepsilon^2}\right)^{2/3}} \sim \frac{u^2}{\Delta} \left(\frac{\lambda}{\Delta}\right)^{1/3} \tag{4.15}$$

Оценка τ_d с помощью (2.14), разумеется, даёт тот же порядок величины:

$$\tau_d^{-1} \sim \lambda \int_{\varepsilon_r}^{\Delta} \langle \delta \vec{m}^2 \rangle_I \frac{d\varepsilon^2}{\overline{\delta \varepsilon^2}} \sim \frac{u^2}{\Delta} \left(\frac{\lambda}{\Delta}\right)^{1/3}$$

Осталось рассмотреть случай

$$\langle h \rangle < \lambda \tag{4.16}$$

При этом (2.14) неприменимо.

Оценку времени деполяризации можно получить из следующих соображений. Поле $\vec{h}$, в котором движется спин в резонансной системе, на временах $\sim \lambda^{-1}$ можно рассматривать как малое возмущение. Оценим скорость затухания $\langle \zeta_n \rangle$, обязанную диффузии $\mathcal{U} e^{i\psi_k}$. За время λ^{-1} (время переворота $\vec{h}_\perp = \vec{h} - \varepsilon \vec{n}$) изменение

$$|\delta \zeta_n| \sim \zeta_\perp \mathcal{U} \lambda^{-1}$$

Среднеквадратичная скорость изменения ζ_n

$$\dot{\zeta}_n \sim \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta_n} \delta \zeta_n^2 \lambda \sim - \frac{\mathcal{U}^2}{\lambda} \zeta_n$$

Отсюда

$$\tau_d^{-1} \sim \frac{\mathcal{U}^2}{\lambda} \qquad (4.17)$$

При $h \sim \lambda$ формулы (4.17) и (4.6) дают один порядок величины τ_d.

Можно написать интерполяционную формулу, охватывающую все рассмотренные здесь случаи ($\langle \mathcal{E} \rangle < (\Delta^2 + \mathcal{U}^2 + \lambda^2)^{1/2}$):

$$\lambda \tau_{d\,min} \sim 1 + \frac{\lambda^2}{\mathcal{U}^2} \left[1 + \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^{4/3} \right] \qquad (4.18)$$

Максимально возможная скорость диффузии

$$\tau_d^{-1} \sim \lambda$$

достигается вблизи резонансов с шириной

$$\mathcal{U} \gtrsim \lambda + (\Delta^2 \lambda)^{1/3} \qquad (4.19)$$

Как и должно быть, время деполяризации всегда больше времён динамического движения ($\tau_d^{-1} < \langle h \rangle$).

При однократном внешнем прохождении резонанса. процессы диффузии могут быть существенными лишь в случае медленного прохождения ($|\dot{\mathcal{E}}_{BH}| \ll \mathcal{U}^2$).

Для сохранения степени поляризации необходимо очевидное условие[x)]:

$$|\dot{\mathcal{E}}_{BH}| \gg \frac{\sqrt{\Delta^2 + \lambda^2 + \mathcal{U}^2}}{\tau_{d\,min}} \qquad (4.20)$$

II. Применения

§ 5. Общие формулы линейного приближения

В этой части мы рассмотрим основные эффекты, возникающие в приближении, линейном по отклонению траектории частицы от равновесной. Следующие поправки могут быть существенны лишь при непосредственной близости ν к частотам членов высших приближений. В линейном приближении

$$w_\perp = \frac{\partial w_\perp}{\partial \gamma} (\gamma - \gamma_s) + \frac{\partial w_\perp}{\partial q_\alpha} q_\alpha \qquad (5.1)$$

где q_α (α = 1, 2, 3, 4) - поперечные отклонения координат и импульсов частиц от равновесной траектории.

Решение для q_α имеет вид /11/ :

$$q_\alpha = (\gamma - \gamma_s) \rho_\alpha(\theta) + U_{\alpha i}(\theta) A_i$$
$$A_i = const \qquad (5.2)$$

где $\rho_\alpha (\gamma - \gamma_s)$ - определяет замкнутую тректорию как функцию энергии, $U_{\alpha i} A_i$ - описывает бетатронные колебания. $U_{\alpha i}$ - 4 x 4 матрица из нормальных решений (решений Флоке):

---

x) При $\mathcal{U} > \lambda + (\Delta^2 \lambda)^{1/3}$ в процессе адиабатического прохождения имеет место динамическая деполяризация. Условие (4.20) обеспечивает восстановление начальной степени поляризации после прохождения резонанса.

$$U_{\alpha i} = (Q_1, Q_1^*; Q_2, Q_2^*)$$

$$Q_i(\theta+2\pi) = e^{-2\pi i \nu_i} Q_i(\theta); \qquad \nu_2 = -\nu_1, \ \nu_4 = -\nu_3$$

(ν_1, ν_3 - частоты бетатронных колебаний).

Ввиду малости синхротронной частоты, вдали от спиновых резонансов

$$\nu \approx k, \ k \pm \nu_{1,3} \tag{5.3}$$

колебания энергии можно учитывать адиабатически, полагая $\gamma = const$ при нахождении $\vec{m}$. Эффекты синхротронной модуляции вблизи резонансов с быстрыми частотами (5.3) рассмотрены в § 8.

Решение для $\vec{m}$ можно записать в виде

$$\vec{m} \simeq \vec{n}(\gamma,\theta) + \Delta\vec{m}_b \tag{5.4}$$

где $\vec{n}(\gamma,\theta) = \vec{n}(\gamma,\theta+2\pi)$ - решение для $\vec{m}$ на замкнутой траектории $(\vec{n}(\gamma_s,\theta) \equiv \vec{n}(\theta))$, $\Delta\vec{m}_b$ - обязано бетатронным колебаниям.

С помощью (3.6), (3.8) и (3.11) получаем

$$\begin{cases} \vec{n}(\gamma\theta) \simeq \vec{n}(\gamma_s,\theta) + Re\, C_\gamma \vec{e} \\ C_\gamma = \dfrac{i(\gamma-\gamma_s)}{e^{2\pi i\nu}-1} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w_1}{\partial\gamma} + \frac{\partial w_1}{\partial q_\alpha}\rho_\alpha\right)_{\theta+\tau} e^{i\nu\tau} d\tau \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\begin{cases} \Delta\vec{m}_b = Re\, C_b \vec{e} \\ C_b = i \displaystyle\sum_{\alpha,i} \frac{A_i}{e^{2\pi i(\nu-\nu_i)}-1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w_1}{\partial q_\alpha} U_{\alpha i}\right)_{\theta+\tau} e^{i\nu\tau} d\tau \end{cases} \tag{5.6}$$

Таким образом

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2}\langle|\delta\vec{n}(\gamma,\theta) + \delta\vec{m}_b|^2\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\left|\frac{\partial C_\gamma}{\partial\gamma}\delta\gamma + \frac{\partial C_b}{\partial A_i}\delta A_i\right|^2\right\rangle \tag{5.7}$$

Выражение для скачка амплитуды бетатронных колебаний получаем из (5.2)

$$\delta A_i = U_{i\alpha}^{-1}(\delta q_\alpha - \rho_\alpha\delta\gamma) \tag{5.8}$$

($\delta q_\alpha \neq 0$, разумеется только для импульсных компонент).

Как видно, флуктуации энергии приводят к скачкам не только $\vec{n}(\gamma,\theta)$, но и бетатронной части $\Delta\vec{m}_b$, из-за связи поперечного и продольного движений частицы около равновесной траектории.

Формула (5.7) учитывает также и корреляцию этих эффектов.

В §§ 6,7 получены формулы для τ_d для распространенного случая, когда малы как связь вертикального движения с радиальным и продольным, так и отличие $\vec{n}$ от вертикального направления.

§ 6. Случай "идеальной геометрии"

Получим явные выражения для τ_d^{-1} в линейном приближении в случае плоских замкнутых орбит с разделенными вертикальными и радиальными колебаниями. Как обычно / 11 / радиус вектор частицы $\vec{r}$ представим в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_s(\theta) + x\,\vec{e}_x(\theta) + z\,\vec{e}_z(\theta) \tag{6.1}$$

где x, z - радиальные и вертикальные отклонения частицы от равновесной орбиты $\vec{r}_s(\theta)$. При этом

$$\vec{\tau}_s{}' = \vec{e}_y = \frac{\vec{v}_s}{v_s}\ , \qquad \vec{e}_x{}' = \mathcal{K}\vec{e}_y\ , \qquad \vec{e}_y{}' = -\mathcal{K}\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z{}' = 0\ , \qquad \mathcal{K} = H_z \qquad \langle\mathcal{K}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{K}\,d\theta = 1 \qquad (6.2)$$

(Для простоты записи используются безразмерные единицы: $\vec{r}$, $\vec{r}_s$, x, z измеряются в единицах радиуса $\sigma/2\pi$ равновесной траектории, σ – длина орбиты, электромагнитные поля – в единицах среднего "ведущего" магнитного поля $\langle H_z\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_z\,d\theta$).

Нужные нам выражения для $\vec{v}$ и $\dot{\vec{v}}$ можно получить из (6.1) и (6.2). Например:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\theta}\,\left(x'\vec{e}_x + (1+\mathcal{K}x)\vec{e}_y + z'\vec{e}_z\right)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{(1+\mathcal{K}x)^2 + x'^2 + z'^2}} \qquad (6.3)$$

В рассматриваемом случае

$$\vec{W}_s = (1+\nu)\,\mathcal{K}\vec{e}_z$$

Периодическую систему ортов (2.2) выберем в виде:

$$\vec{n} = \vec{e}_z\ , \qquad \vec{e} = (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)\,e^{-i\nu\int^\theta(\mathcal{K}-1)d\theta}$$

$$\nu = \gamma_s\frac{q'}{q_0} \qquad (6.4)$$

В линейном приближении из (1.2, 2.4) получаем формулу для

$$w_\perp = (w_x - i w_y)\,e^{i\nu\int^\theta(\mathcal{K}-1)d\theta}$$

$$w_x = \frac{1}{\dot{\theta}}\,\vec{W}_\text{л}\vec{e}_x \simeq (1+\nu)\,z'' \qquad (6.5)$$

$$w_y = \frac{1}{\dot{\theta}}\,\vec{W}_\text{л}\vec{e}_y \simeq -\nu\mathcal{K}z' + \mathcal{K}'z$$

(Поскольку наиболее распространенные системы с трением – накопители легких частиц, будем использовать малость q'/q_0).

Как видно, диффузия спина в данном случае обязана лишь рассеянию в z –направлении. Пусть

$$z = a_z f_z + a_z^* f_z^*\ , \qquad \mathcal{I}m\, f_z^* f_z' = 1 \qquad (6.6)$$

$f_z(\theta+2\pi) = e^{2\pi i\nu_z} f_z(\theta)$ – нормальное решение Флоке уравнения для z колебаний:

$$z'' + g_z z = 0$$

(ν_z – бетатронная частота z –колебаний).

Из (6.6)

$$\delta a_z = \frac{1}{2i} f_z^*\,\delta z'$$

Используя (6.5) и свойство (3.12):

$$\delta\overline{w}_\perp = i\,\delta z'\Big\{ e^{i\nu\int^\theta(\mathcal{K}-1)d\theta} +$$

$$+\frac{1}{2}\Big[f_z^*(g_z - i\mathcal{K}')f_z\,\overline{e^{i\nu\int^\theta(\mathcal{K}-1)d\theta}} - f_z(g_z - i\mathcal{K}')f_z^*\,\overline{e^{i\nu\int(\mathcal{K}-1)d\theta}}\Big]\Big\} \qquad (6.7)$$

и окончательно с помощью свойства (3.11)

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2}\left\langle \delta z'^2 \left| 1 + \frac{1}{2}\int_\theta^{\theta+2\pi}(\mathcal{K}' - i\nu g_z)\left[\frac{f_z^*(\theta)\,f_z(\theta')}{1-e^{2\pi i(\nu+\nu_z)}} - \frac{f_z(\theta)\,f_z^*(\theta')}{1-e^{2\pi i(\nu-\nu_z)}}\right] e^{i\nu\int_\theta^{\theta'}\mathcal{K}d\theta}\,d\theta'\right|^2\right\rangle \qquad (6.8)$$

В азимутально однородном случае:

$$\mathcal{K}' = 0\ , \quad g_z = \nu_z^2\ , \quad f_z(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\nu_z}}\,e^{i\nu_z\theta}$$

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu\nu_z^2}{\nu^2 - \nu_z^2}\right)^2 \langle \delta z'^2 \rangle \tag{6.9}$$

При $\nu \ll \nu_z$ эффект обязан радиальному полю, появляющемуся при z -колебаниях. Напротив, при $\nu >> \nu_z$ определяющий вклад даёт продольное магнитное поле $\vec{H}\vec{v} \simeq H_z z'$.

Последний эффект не связан с неоднородностью магнитного поля. В точке $\nu_z^2 = \frac{\nu^2}{1+\nu}$ интерференция этих двух эффектов приводит к независимости направления $\vec{m}$ от z'. Этим объясняется исчезновение диффузии в этом случае ($\tau_d^{-1} = 0$).

В общем случае результат (6.8) в значительной степени зависит от структуры магнитной системы. При этом происходит возрастание τ_d^{-1} вблизи возможных в линейном приближении резонансов:

$$\nu \approx \nu_k = \pm \nu_z + kN \qquad k = 0, 1 \ldots \tag{6.10}$$

пропорционально $(\nu - \nu_k)^{-2}$, где N - число элементов периодичности на орбите. Если угловой размер $\langle z'^2 \rangle$ определяется рассеянием импульса в поперечном направлении, можно написать:

$$\langle \delta z'^2 \rangle = \frac{4}{\tau_z} \langle z'^2 \rangle \tag{6.11}$$

где τ_z^{-1} -полный декремент затухания z-колебаний.

Оценим время деполяризации (для электронов, позитронов) за счёт квантовых флуктуаций синхротронного излучения, которые дают:

$$\langle \delta z'^2 \rangle \sim \frac{\hbar}{mR} \frac{\delta_{rad}}{2} \equiv \frac{\lambda}{R}\frac{1}{2}\delta_{rad}$$

($\frac{1}{2}\delta_{rad}$ - радиационный декремент затухания). Сравнивая τ_d^{-1} вблизи резонансов (6.10)

$$\tau_d^{-1} \sim \frac{\nu^2 \langle g_z^2 \rangle}{\nu_z^2 (\nu - \nu_z)^2} \frac{\lambda}{R} \delta_{rad} \tag{6.12}$$

с (1.2), видим, что в приближении идеальной геометрии квантовые флуктуации излучения приводят к деполяризации лишь при достаточной близости к резонансу:

$$|\nu - \nu_k| < \frac{\nu \langle |g_z| \rangle}{\gamma \nu_z} \simeq \frac{q'}{q_0} \frac{\langle |g_z| \rangle}{\nu_z} \sim 10^{-3} \frac{\langle |g_z| \rangle}{\nu_z} \tag{6.13}$$

§ 7. Эффекты флуктуаций энергии при малых нарушениях идеальности

В линейном приближении влияние на поляризацию рассеяния по энергии появляется при учёте отклонений от идеальности и может стать определяющим при достаточной малости рассеяния импульса в поперечном направлении.

Включение неидеальной части поля приводит к зависимости периодической части $\vec{m}$ от γ $\left(\frac{\partial}{\partial \gamma}\vec{n}(\gamma,\theta) \neq 0\right)$ и бетатронной части $\Delta\vec{m}_b$ от радиальных бетатронных колебаний. При этом амплитуды бетатронных колебаний из-за связи поперечного движения с продольным в свою очередь являются функциями энергии (см. § 5).

Рассмотрим типичные примеры.

а) Влияние градиента радиального поля.

Пусть на равновесной орбите

$$H_x - E_z = H_y = 0 \qquad g \equiv \frac{\partial}{\partial x}(H_x - E_z) \neq 0 \tag{7.1}$$

(Зависимость τ_d^{-1} от $E_x(\tau_s)$, $E_y(\tau_s)$ в линейном приближении не существенна). Уравнения z, x движения имеют вид

$$z''+g_z z = g x$$

$$x''+g_x x = K\frac{\Delta\gamma}{\gamma}, \qquad \Delta\gamma=\gamma-\gamma_s \tag{7.2}$$

В этом случае равновесное движение частицы и спина не искажается:

$$\vec{n}(\theta)=\vec{e}_z$$

Поэтому $w_\perp$ по-прежнему обязано вертикальным отклонениям от равновесной орбиты и имеет вид (7.2). Зависимость $\vec{m}$ от энергии обязана связи вертикального движения с радиальным при движении частицы возле равновесной орбиты.

Из (7.2) получаем:

$$z = a_z f_z + a_z^* f_z^*$$

$$x = a_x f_x + a_x^* f_x^*$$

где f_z, f_x – идеальные решения Флоке.

$$f_z(\theta+2\pi)=e^{i\nu_z\theta} f_z(\theta); \qquad f_x(\theta+2\pi)=e^{i\nu_x\theta} f_x(\theta)$$

$$a_z' = \frac{1}{2i}\, g x f_z^* ; \qquad a_x' = \frac{1}{2i}\,\frac{\Delta\gamma}{\gamma} K f_x^* \tag{7.3}$$

Используя (6.5) и свойство (3.12) получаем:

$$\frac{\partial \overline{w_\perp}}{\partial\gamma} = \frac{\partial}{\partial\gamma}\overline{(\nu z''-iK'z)e^{i\nu\int^{\theta}_{0}(K-1)d\theta}} = \frac{\partial}{\partial\gamma}\overline{\alpha z}$$

$$\alpha = \left[i(\nu^2-1)K' - \nu^3 K^2\right] e^{i\nu\int^{\theta}_{0}(K-1)d\theta} \tag{7.4}$$

Учитывая (7.3):

$$\delta\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\overline{\alpha z} = \delta\gamma\left[\overline{i a_z'\overline{\alpha f_z}} + \overline{i a_z'^{*}\overline{\alpha f_z^*}}\right] = \dots =$$

$$= \frac14\frac{\delta\gamma}{\gamma}\left\{ \overline{K f_x^* \overline{g f_x \left(f_z^*\overline{\alpha f_z} - f_z\overline{\alpha f_z^*}\right)}} - \overline{K f_x \overline{g f_x^*\left(f_z^*\overline{\alpha f_z}-f_z\overline{\alpha f_z^*}\right)}}\right\}$$

Таким образом:

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{32}\left\langle\frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2}\right\rangle \left| \overline{K f_x^* \overline{g f_x \left(f_z^*\overline{\alpha f_z} - f_z\overline{\alpha f_z^*}\right)}} - \overline{K f_x \overline{g f_x^* \left(f_z^*\overline{\alpha f_z} - f_z\overline{\alpha f_z^*}\right)}}\right|^2 \tag{7.5}$$

Из (7.5) видно, что возможны резонансы $\nu\approx\nu_K=\pm\nu_z+K$, $\pm\nu_x+K$, K, с зависимостью $(\nu-\nu_K)^{-2}$ вблизи резонанса.

Результирующее τ_d^{-1} является суммой (7.5) и (6.8). В частности в азимутально однородном случае

$(\mathcal{K}' = g_x' = g_z' = 0)$:

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2}\left\langle\frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2}\right\rangle \frac{\nu^6}{(\nu^2-\nu_z^2)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|g_k|^2}{(\nu-k)^2\left[(\nu-k)^2-\nu_x^2\right]^2} + \frac{\langle\delta z'^2\rangle}{2}\left(1-\frac{\nu\nu_z^2}{\nu^2-\nu_z^2}\right)^2 \qquad (7.6)$$

$$\frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2} = \frac{4}{\tau_\gamma}\left\langle\frac{\Delta\gamma^2}{\gamma^2}\right\rangle; \quad g = \sum_k g_k e^{-ik\theta}$$

Обратим внимание, что вблизи резонанса $\nu \approx \nu_z$ в азимутально однородном случае, спиновая диффузия определяется среднеквадратичной амплитудой $\langle A_z^2\rangle$ свободных z-колебаний. Действительно:

$$\langle A_z^2\rangle = \frac{\tau_z}{2}\langle|\delta A_z|^2\rangle = \frac{\tau_z}{2\nu_z^2}\left\{\langle\delta z'^2\rangle + \left\langle\frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2}\right\rangle \sum_k \frac{|g_k|^2}{(\nu_z-k)^2\left[(\nu_z-k)^2-\nu_x^2\right]^2}\right\} \qquad (7.7)$$

(см. 5.8)

и при $\nu \approx \nu_z$ из (7.6) получаем:

$$\tau_d^{-1} \simeq \tau_z^{-1} \frac{\nu_z^6}{4(\nu-\nu_z)^2}\langle A_z^2\rangle \qquad (7.8)$$

б) Влияние искажения равновесного движения

При наличии H_x, H_y, E_z на траектории, искажается также и равновесное движение спина. Появляется прямая зависимость $w_\perp$ от x, γ, связанная с наклоном $\vec{n}$ к плоскости идеальной равновесной траектории ($\vec{n}(\theta) \neq \vec{e}_z$). Формула τ_d^{-1} в общем случае довольно громоздка и приведена в Приложении.

Мы ограничимся сравнением роли поля H_x и его градиента $\partial H_x/\partial x$. Для простоты "ведущее" поле будем считать азимутально однородным. Практически, если не принято специальных мер:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}\Big/H_x \sim \frac{R}{\ell} \gg 1 \qquad (7.9)$$

где R - радиус орбиты, ℓ - эффективная длина изменения H_x по радиусу, обычно порядка апертуры камеры накопителя. При этом, как видно из (П.11)

$$\nu \lesssim K_{эфф}$$

($K_{эфф}$ - номер эффективной гармоники H_x), член с градиентом будет основным за исключением сильной близости к резонансу $\nu \approx K$

$$|\nu - K| < \nu\nu_x^2\frac{\ell}{R} \qquad (7.10)$$

Тогда

$$\tau_d^{-1} \simeq \frac{1}{2}\left\langle\frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2}\right\rangle \frac{\nu^4 K^4}{(\nu-K)^4}\frac{\nu_x^4}{\left[(\nu-K)^2-\nu_x^2\right]^2}|z_s^K|^2 \qquad (7.11)$$

где

$$z_s^K = \frac{H_x^K}{\nu_z^2-K^2}$$

- гармоника вертикального искажения равновесной траектории частицы.

В работе / 7 /, где впервые рассматривался эффект деполяризации из-за скачков энергии, в азимутально однородном накопителе при включении радиального магнитного поля H_x получена следующая формула (при $\nu \sim K \gg 1$)

$$\tau_d^{-1} \simeq \frac{1}{2}\left\langle\frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2}\right\rangle \frac{\nu^4 K^4}{(\nu-K)^4} \left|Z_s^K\right|^2 \tag{7.12}$$

Отличие (7.12) от (7.11) ($\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$) объясняется тем, что в /7/ не учитывались бетатронные x -колебания. Это оправдано лишь при $|\nu - K| \ll \nu_x$

§ 8. Учёт синхротронной модуляции энергии

Эффекты колебаний энергии могут стать существенными при достаточной близости к резонансам (в линейном приближении):

$$\nu \approx \nu_K = K, \quad K \pm \nu_z, \quad K \pm \nu_x$$

В резонансной системе

$$\vec{n}, \quad \vec{e} e^{-i\psi_K} \equiv \vec{e}_\tau \qquad \psi_K' = \nu_K$$

спин движется в среднем поле ($\langle \ldots \rangle$ - среднее при постоянной энергии)

$$\nu \approx K$$

$$\vec{h} = (\nu - K)\vec{n} + \vec{\Delta}(\gamma)$$

$$\vec{\Delta}\vec{n} = (\gamma - \gamma_s)\frac{d}{d\gamma}\langle \vec{n}\vec{w}\rangle = \Delta_\parallel \tag{8.1}$$

$$\vec{\Delta}\vec{e}_\tau = (\gamma - \gamma_s)\frac{d}{d\gamma}\langle \vec{e}_\tau \vec{w}\rangle = \Delta_\perp$$

$$\nu \neq K$$

$$\vec{h} = [\varepsilon_s + \Delta(\gamma)]\vec{n} + \vec{h}_\perp$$

$$\Delta(\gamma) = (\gamma - \gamma_s)\frac{d}{d\gamma}\left(\langle\vec{n}\vec{w}\rangle - \nu_K\right) \qquad \varepsilon_s = \nu - \nu_K(\gamma_s)$$

$$\vec{h}_\perp = Re\, \vec{e}_\tau \langle \vec{w}\vec{e}_\tau^{\,*}\rangle$$

$$\vec{\Delta} = \vec{\Delta}_0 \cos\psi_\gamma \qquad \psi_\gamma' = \nu_\gamma$$

$$\vec{\Delta}_0, \ \vec{h}_\perp = const \tag{8.2}$$

, ν_γ - частота синхротронных колебаний.

1. Прежде всего, если

$$|\nu - \nu_K| \gg \Delta_0, \ \nu_\gamma \tag{8.3}$$

колебания энергии можно учитывать адиабатически. При этом справедливы формулы § 5.

2. В случае

$$|\nu - \nu_K| \lesssim \nu_\gamma \qquad \nu_\gamma \gg \Delta_0 \tag{8.4}$$

применима теория возмущения по Δ .

Формулу для τ_d^{-1} в линейном приближении по Δ можно получить из результатов § 3.

Для

$$\tau_d^{-1}=\frac{1}{2}\frac{(\nu-\kappa)^2\langle|\delta\Delta_\perp|^2\rangle}{[(\nu-\kappa)^2-\nu_\gamma^2]^2}=\frac{(\nu-\kappa)^2\langle|\mathring{\Delta}_\perp|^2\rangle}{[(\nu-\kappa)^2-\nu_\gamma^2]^2}\lambda_\gamma \qquad (8.5)$$

где $\lambda_\gamma=\tau_\gamma^{-1}$ – декремент затухания γ колебаний.

Вблизи резонансов

$$\big||\nu-\kappa|-\nu_\gamma\big| \lesssim |\mathring{\Delta}_\perp|$$

достигается максимальное значение

$$(\tau_d^{-1})_{max}\sim\lambda_\gamma$$

При $\nu\neq K$ учёт колебаний энергии в (8.2) может существенно изменить τ_d лишь вблизи модуляционного резонанса / 6 /:

$$|h_s-\nu_\gamma|\lesssim\Delta_o \qquad h_s=\sqrt{\mathcal{E}_s^2+|h_\perp|^2}$$

ширина которого $\sim\Delta_o\frac{|h_\perp|}{h_s}$

$$\tau_d^{-1}\sim\frac{|h_\perp|^2}{h_s^2}\lambda_\perp+\frac{\Delta_o^2|h_\perp|^2}{h_s^2(h_s-\nu_\gamma)^2}\lambda_\gamma \qquad (8.6)$$

3. В случае

$$\Delta_o\gg\nu_\gamma\ ; \quad \Delta_o\gg h_s \qquad (8.7)$$

приходим к задаче о периодическом прохождении резонанса

Для единообразного описания удобно привести (8.1) к виду (8.2) выбрав направление $\vec{\Delta}$ за ось 3. Используем обозначения:

$$\vec{h}=[\mathcal{E}_s+\Delta(\gamma)]\vec{n}+\mathcal{U}\vec{e}=\mathcal{E}\vec{n}+\mathcal{U}\vec{e}_1$$

$$\mathcal{E}_s=const=\begin{cases}(\nu-K)\dfrac{\vec{\Delta}\vec{n}}{\Delta}, & \nu\approx K\\ \nu-\nu_\kappa(\gamma_s), & \nu\neq K\end{cases}$$

$$\mathcal{U}=const=\begin{cases}\left|(\nu-K)\vec{n}-\mathcal{E}_s\dfrac{\vec{\Delta}}{\Delta}\right|, & \nu\approx K\\ |h_\perp| & \nu\neq K\end{cases} \qquad (8.8)$$

Динамика движения спина в такой задаче исследована в работе / 6 /, где было найдено периодическое решение $\vec{m}$ и частота μ прецессии спина вокруг $\vec{m}$. При этом основными параметрами, определяющими $\vec{m}$ и μ являются:

$$\delta=\frac{\pi}{4}\frac{\mathcal{U}^2}{\nu_\gamma\Delta_o} \qquad x=\frac{1}{2}\int_c^{2\pi}\frac{h}{\nu_\gamma}d\psi_\gamma \qquad (8.9)$$

$$y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{h}{\nu_\gamma}\operatorname{sign}\mathcal{E}\,d\psi_\gamma$$

Здесь ограничимся рассмотрением предельных случаев быстрых либо медленных прохождений.

<u>Быстрое прохождение</u>

$$\delta\ll1 \qquad (8.10)$$

При этом можно получить оценку τ_d без использования явного выражения для $\vec{m}$.

При однократном быстром прохождении ζ_n изменяется на величину $(\Delta\zeta_n)_1\sim\sqrt{\delta}$

Периодические прохождения приводят к колебаниям ζ_n, амплитуда и частота которых определяются близостью y/π к целому числу:

$$y = \pi \frac{\varepsilon_s}{\nu_\gamma} \tag{8.11}$$

$$(\Delta \zeta_n)_{max} \sim \frac{\sqrt{\delta}}{\sin y}$$

частота колебаний $\mu \simeq \nu_\gamma \sin y$

Диффузия Δ_0 приводит к хаотизации фаз прохождений резонанса.

Время корреляции фаз прохождений $(\lambda_\gamma \sim \lambda_\perp \sim \lambda)$

$$\tau_{corr} \sim max\left(\nu_\gamma^{-1}, (\overline{\delta x^2})^{-1} \sim \left(\frac{\Delta^2}{\nu_\gamma^2}\lambda\right)^{-1}\right) \tag{8.12}$$

Скорость деполяризации определяется динамическим изменением $(\Delta \zeta_n)_{corr}$ за время τ_{corr}

$$\tau_d^{-1} \sim (\Delta \zeta_n)^2_{corr} \, \tau^{-1}_{corr} \tag{8.13}$$

Можно выделить случаи:

1) $\Delta^2 \lambda < \nu_\gamma^3$

а) $|\sin y| > \frac{\Delta^2 \lambda}{\nu_\gamma^3}$

При этом

$$(\Delta \zeta_n)_{corr} \sim (\Delta \zeta_n)_{max}$$

$$\tau_d^{-1} \sim \frac{u^2 \Delta \lambda}{\nu_\gamma^3} \frac{1}{\sin^2 y} \tag{8.14}$$

б) $\sin y < \frac{\Delta^2 \lambda}{\nu_\gamma^3}$

$$(\Delta \zeta_n)_{corr} \sim \delta \cdot \tau_{corr}$$

$$\tau_d^{-1} \sim \frac{u^2}{\Delta} \frac{\nu_\gamma^3}{\Delta^2 \lambda} \tag{8.15}$$

2) $\Delta^2 \lambda > \nu_\gamma^3 > \Delta \lambda^2$

Последовательные прохождения являются полностью некоррелированными

$$\tau_d^{-1} \sim \delta \cdot \nu_\gamma \sim \frac{u^2}{\Delta} \tag{8.16}$$

3) При $\nu_\gamma < (\Delta \lambda^2)^{1/3}$

изменение $(\Delta \zeta_n)_1$ при однократном прохождении ограничивается процессами диффузии Δ

$$(\Delta \zeta_n)_1 \sim \frac{u}{(\Delta^2 \lambda)^{1/3}} \qquad \text{(ср. (4.14))}$$

При $\nu_\gamma > \lambda$

$$\tau_d^{-1} \sim \frac{u^2}{(\Delta^2 \lambda)^{2/3}} \nu_\gamma \tag{8.17}$$

Можно написать интерполяционную формулу, применимую при $\nu_\gamma > (\Delta \lambda^2)^{1/3}$

$$\tau_d^{-1} \sim \frac{u^2}{\Delta} \frac{\left(\frac{\Delta^2\lambda}{\nu_\gamma^3}\right)^2}{\sin^2 y + \delta + \left(\frac{\Delta^2\lambda}{\nu_\gamma^3}\right)^2} \left(1 + \frac{\nu_\gamma^3}{\Delta^2\lambda}\right) \qquad (8.18)$$

Медленное прохождение

$$\delta \ll 1$$

При этом отличие $\vec{m}$ от $\frac{\vec{h}}{h}$ почти всегда экспоненциально мало.

В адиабатическом приближении $\vec{m} = \frac{\vec{h}}{h}$

Если $u > (\Delta^2\lambda)^{1/3}$ (см. 4.11)

резонанс проходится динамически со скоростью $\dot{\varepsilon} = \Delta_0 \nu_\gamma$

При этом

$$\tau_d^{-1} \sim \min\left(\nu_\gamma; \langle \delta \vec{m}^2 \rangle\right) \sim \frac{\nu_\gamma}{1 + \frac{u\nu_\gamma}{\Delta\lambda}} \qquad (8.19)$$

$$\langle \delta \vec{m}^2 \rangle = \left\langle \frac{u^2 \delta \Delta^2}{h^4} \right\rangle \sim \frac{\Delta}{u}\lambda$$

При $u < (\Delta^2\lambda)^{1/3}$, τ_d^{-1} определяется формулой (8.17).

Адиабатичность нарушается вблизи резонансов

$$\chi \approx k\pi \qquad \left(\chi \sim \frac{\Delta}{\nu_\gamma}\right)$$

с шириной (в единицах ν_γ) / 6 /:

$$\sim e^{-\delta}$$

которые проходятся вследствии диффузии по χ. Изменение $(\Delta\zeta_n)$ при прохождении одного резонанса (см.4.14):

$$\Delta\zeta_n \sim \frac{e^{-\delta}}{\sqrt{e^{-2\delta} + \left(\frac{\overline{\delta\chi^2}}{\nu_\gamma}\right)^{2/3}}} \qquad (8.20)$$

Поскольку за единицу времени проходятся $\overline{\delta\chi^2}$ резонансов, то :

$$\left(\tau_d^{-1}\right)_{неад.} \sim \frac{\overline{\delta\chi^2}}{1 + e^{2\delta}\left(\frac{\overline{\delta\chi^2}}{\nu_\gamma}\right)^{2/3}} \qquad (8.21)$$

Результирующее τ_d^{-1} определяется суммой (8.19) и (8.21).

Как видно, неадиабатическими эффектами можно пренебречь лишь при

$$\frac{e^{4\delta}}{\delta} \gg \left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^{1/3} \cdot \frac{\nu_\gamma}{\lambda} \qquad (8.22)$$

Максимальная скорость (при заданном $\overline{\delta\chi^2}$)

$$\left(\tau_d^{-1}\right)_{max} \sim \overline{\delta\chi^2} \sim \frac{\Delta^2\lambda}{\nu_\gamma^2} \qquad (8.23)$$

достигается при

$$e^{-\delta} > \left(\frac{\overline{\delta\chi^2}}{\nu_\gamma}\right)^{1/3} \sim \frac{(\Delta^2\lambda)^{1/3}}{\nu_\gamma} \qquad (8.24)$$

Пользуемся случаем поблагодарить В.Н.Байера, С.Т.Беляева за интерес к работе и дискуссию, Ю.М.Шатунова за полезный контакт по экспериментальным вопросам. Мы особенно признательны А.Н.Скринскому за стимулирующие обсуждения в ходе выполнения работы.

Приложение

Получим в линейном приближении формулу для τ_d, описывающую диффузию в γ направлении для почти плоской орбиты. Из (2.4 , 1.1) для лёгких частиц(при $\gamma^2 q'/q_0 \gg 1$) в безразмерных единицах имеем:

$$\vec{w} = \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma_s}\nu\right)\frac{[\vec{v}\,\dot{\vec{v}}]}{v^2} + \frac{\gamma_s v_s}{\gamma\,\dot{\theta}}\,\frac{\vec{H}\vec{v}}{v^2}\,\vec{v} - (1+\nu)\mathcal{K}\vec{e}_z \qquad (\text{П.1})$$

Пусть z_s – вертикальное отклонение равновесной траектории от идеальной, плоской:

$$z_s'' + g_z z_s = H_x - E_z$$

(радиальное отклонение равновесной орбиты в линейном приближении не существенно).

z – аксиальное отклонение частицы от равновесной траектории:

$$z'' + g_z z = \left[\frac{\partial}{\partial x}(H_x - E_z) + (\mathcal{K} z_s')' + \mathcal{K} z_s''\right]x +$$

$$+\left[\mathcal{K} z_s' - \mathcal{K}' z_s - H_y\right]x' - \frac{\Delta\gamma}{\gamma} z_s'' \qquad (\text{П.2})$$

При разложении полей вблизи идеальной траектории используются соотношения:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} = -g_z\,; \qquad \frac{\partial H_x}{\partial \theta} = \frac{\partial H_y}{\partial x} + \mathcal{K} H_y \qquad (\text{П.3})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial \theta} = \mathcal{K}' \qquad \frac{\partial^2 H_y}{\partial x\,\partial z} = -g_z' - \mathcal{K}\mathcal{K}'$$

которые следуют из уравнения:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0$$

Из (П.1) в линейном приближении:

$$w_x = (1+\nu)\left[z'' + z_s'' - (\mathcal{K} x z_s')' - \mathcal{K} x' z_s'\right] +$$

$$+ (\mathcal{K} z_s)' x' + x' H_y + \frac{\Delta\gamma}{\gamma}\nu z_s''$$

$$w_y = (1+\nu)\left[-\mathcal{K} z' - \mathcal{K} z_s' + \mathcal{K}^2 x z_s' + z_s' x'' - z_s'' x'\right] + \qquad (\text{П.4})$$

$$+ (\mathcal{K} z)' + (\mathcal{K} z_s)' + H_y + (H_x x)' - (g_z x z_s)' -$$

$$- \frac{\Delta\gamma}{\gamma}\left[\nu\mathcal{K} z_s' + (\mathcal{K} z_s)' + H_y\right]$$

$$w_z = \nu\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\mathcal{K} - (1+\nu)x'' = \nu g_x x - x''$$

Из (3.7)

$$c = i e^{-i\left(\nu\theta + \int^{\theta} w_z d\theta\right)} \int_{-\infty}^{\theta} (\vec{w}\vec{e}^{\,*})_{\theta'}\, e^{i\left(\nu\theta + \int^{\theta'} w_z d\theta\right)} d\theta'$$

И с нужной нам линейной точностью:

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma}\left\{\overline{\alpha z} - \overline{\nu g_x x\,\overline{(\nu z_s'' - i\mathcal{K}' z_s - i H_y)\, e^{i\nu\int^{\theta}(\mathcal{K}-1)d\theta}}} + \right.$$

$$\overline{\left[\left[i(\nu^2\mathcal{K}^2-g_z)Z_s'-\nu\mathcal{K}(Z_s''+E_z)\right]X+\frac{\Delta\gamma}{\gamma}(\nu Z_s''+i\mathcal{K}'Z_s+iH_y)\right]e^{i\nu\int^{\theta}(\mathcal{K}-1)d\theta}} \qquad (\text{П}.5)$$

(При получении (П.5) использовалось свойство (3.12).
Определение α см. (7.4)

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\overline{\alpha z}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\overline{\mathcal{P}\left(f_z^*\overline{\alpha f_z}-f_z\overline{\alpha f_z^*}\right)} \qquad (\text{П}.6)$$

где $\mathcal{P}$ – правая часть уравнения (П.2).

Таким образом:

$$\delta\gamma\frac{\partial C}{\partial\gamma}=\frac{\delta\gamma}{\gamma}\overline{\left\{a+\frac{\mathcal{K}}{2}\left[f_x^*\overline{(bf_x+cf_x')}-f_x\overline{(bf_x^*+cf_x'^*)}\right]\right\}} \qquad (\text{П}.7)$$

где

$$a=\frac{1}{2}Z_s''\left(f_z\overline{\alpha f_z^*}-f_z^*\overline{\alpha f_z}\right)+(\nu Z_s''+i\mathcal{K}'Z_s+iH_y)e^{i\nu\int^{\theta}(\mathcal{K}-1)d\theta}$$

$$b=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(H_x-E_z)+(\mathcal{K}Z_s')'+\mathcal{K}Z_s''\right]\left(f_z^*\overline{\alpha f_z}-f_z\overline{\alpha f_z^*}\right)-$$

$$-\nu g_x\overline{(\nu Z_s''-i\mathcal{K}'Z_s-iH_y)e^{i\nu\int^{\theta}(\mathcal{K}-1)d\theta}}+$$

$$+\left[i(\nu^2\mathcal{K}^2-g_z)Z_s'-\nu\mathcal{K}(Z_s''+E_z)\right]e^{i\nu\int^{\theta}(\mathcal{K}-1)d\theta}$$

$$c=\frac{1}{2}(\mathcal{K}Z_s'-\mathcal{K}'Z_s-H_y)\left(f_z^*\overline{\alpha f_z}-f_z\overline{\alpha f_z^*}\right) \qquad (\text{П}.8)$$

И окончательно:

$$\tau_d^{-1}=\frac{1}{2}\left\langle\delta\gamma^2\left(\frac{\partial C}{\partial\gamma}\right)^2\right\rangle \qquad (\text{П}.9)$$

В азимутальном однородном случае:

$$\tau_d^{-1}=\frac{1}{2}\left\langle\frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2}\right\rangle\sum_k\left|\frac{a_k}{\nu-k}+\frac{ic_k}{(\nu-k)^2-\nu_x^2}-\frac{b_k}{(\nu-k)\left[(\nu-k)^2-\nu_x^2\right]}\right|^2 \qquad (\text{П}.10)$$

$$a=\sum_k a_k e^{-ik\theta},\qquad b=\dots\qquad c=\dots\quad\dots$$

$$a_k=\frac{\nu_z^2\nu k^2}{\nu^2-\nu_z^2}Z_s^k+iH_y^k$$

$$b_k=\frac{\nu^3}{\nu^2-\nu_z^2}g_k-\nu E_z^k+i\frac{\nu\nu_x^2}{\nu-k}H_y^k+$$

$$+\left[\frac{\nu_x^2\nu^2k^2}{\nu-k}+\frac{k\nu^3(\nu-k)-\nu_z^2(2k\nu^2+\nu k^2-k\nu_z^2)}{\nu^2-\nu_z^2}\right]Z_s^k$$

$$c_k=-(ikZ_s^k+H_y^k)\frac{\nu^3}{\nu^2-\nu_z^2}$$

Таким образом:

$$\tau_d^{-1}=\frac{1}{2}\left\langle\frac{\delta\gamma^2}{\gamma^2}\right\rangle\sum_K\left|\frac{\nu E_z^K}{(\nu-K)\left[(\nu-K)^2-\nu_x^2\right]}-\frac{\nu^3 g^K}{(\nu-K)(\nu^2-\nu_z^2)\left[(\nu-K)^2-\nu_x^2\right]}+\right.$$

$$+iH_y^K\left[\frac{1}{\nu-K}-\frac{\nu^3}{(\nu^2-\nu_z^2)\left[(\nu-K)^2-\nu_x^2\right]}-\frac{\nu\nu_x^2}{(\nu-K)^2\left[(\nu-K)^2-\nu_x^2\right]}\right]+$$

$$\left.+Z_s^K\left[\frac{\nu_z^2\nu K^2}{(\nu-K)(\nu^2-\nu_z^2)}+\frac{\nu_z^2(2K\nu^2+\nu K^2-K\nu_z^2)}{(\nu-K)(\nu^2-\nu_z^2)\left[(\nu-K)^2-\nu_x^2\right]}-\frac{\nu_x^2K^2\nu^2}{(\nu-K)^2\left[(\nu-K)^2-\nu_x^2\right]}\right]\right|^2$$

(П.11)

Литература

1. V. Bargmann, L. Michel, V. Telegdi Phys. Rev. Lett. 2, 435 (1959)

2. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, ч.1, Ф.М. (1968).

3. V.N. Baier, V.M. Katkov, V.M. Strakhovenko Phys. Lett. 31 A N 4 (1970)

4. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский, ДАН СССР, 192, № 6, 1255 (1970); Препринт ИЯФ СО АН СССР 2-70.

5. Х.А.Симонян, Ю.Ф.Орлов. ЖЭТФ 45, № 2, 173 (1963).

6. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. Препринт ИЯФ СО АН СССР 44-70; ЖЭТФ 60, 1216, (1971).

7. V.N. Baier, Ju.F. Orlov V International conference on high energy accelerators. Frascati, 569 (1965)

8. А.А.Соколов, И.М.Тернов. ДАН СССР 153, 1052 (1963).

9. V.N. Baier, V.M. Katkov Phys. Lett. 24 A, 327 (1967)

10. В.Н.Байер, В.М.Катков. ЖЭТФ 52, 1422 (1967).

11. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев "Теория циклических ускорителей", М., Ф.М. 1962.

Ответственный А.М.Кондратенко
Подписано к печати 15.11.71
Усл. 2 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 11 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР , нв .