

10

**И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

**ИЯФ 17 - 71**

**В.Н.Байер, В.С.Фадин**

**ЭЛЕКТРОРОЖДЕНИЕ ПАР ЧАСТИЦ  
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ**

**Новосибирск**

**1971**

# ЭЛЕКТРОРОЖДЕНИЕ ПАР ЧАСТИЦ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

## АННОТАЦИЯ

Рассмотрен процесс образования пары частиц со спином 0 и  $1/2$  при столкновении двух заряженных частиц при высоких энергиях. В сечении этого процесса, которое логарифмически возрастает с энергией, найдены члены, содержащие третью, вторую, а в ряде актуальных случаев и первую степень логарифма. Наряду с полным сечением получен ряд дифференциальных сечений, с помощью которых проведен анализ угловых и энергетических распределений конечных частиц.

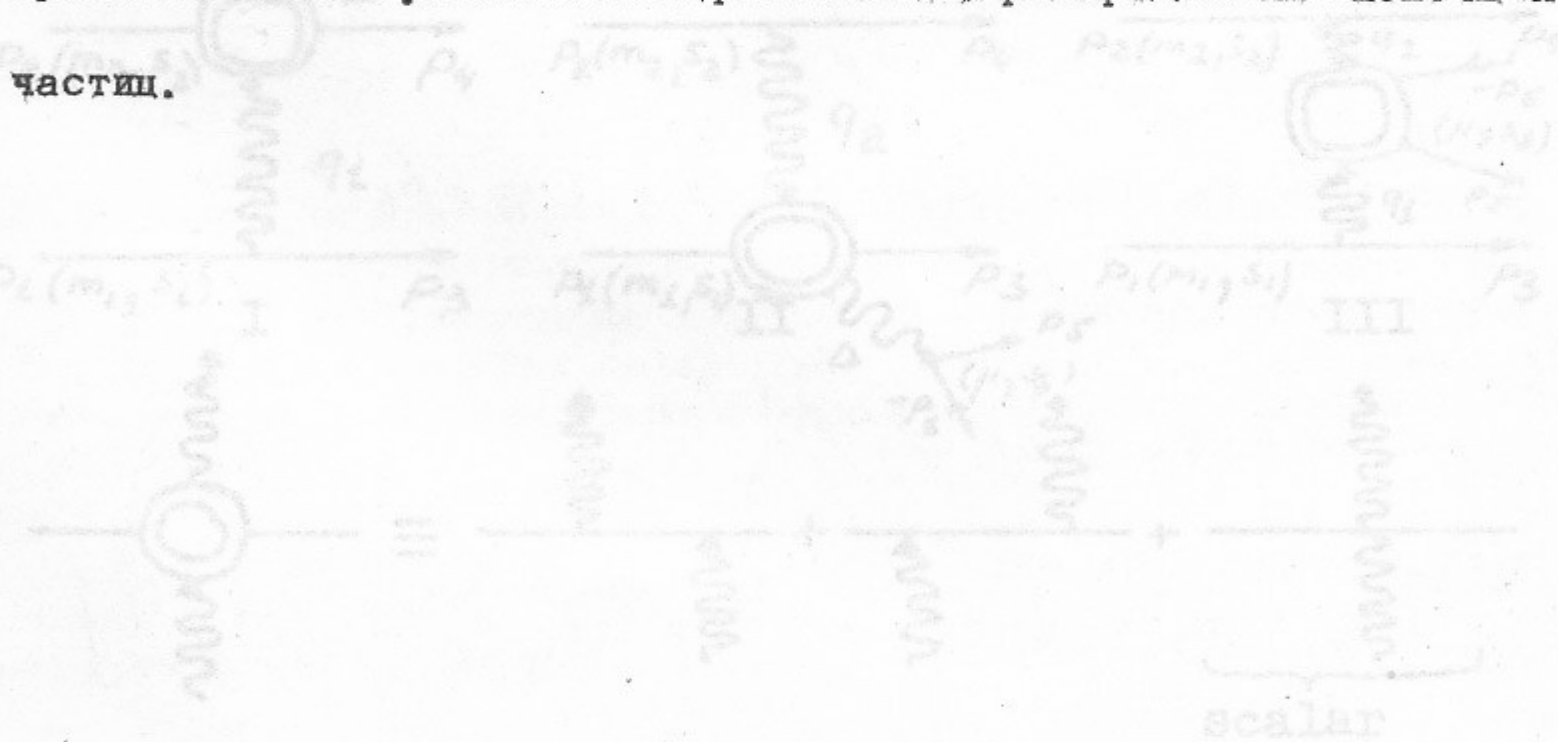


Рис. 1.

# ELECTROPRODUCTION OF PAIR AT HIGH ENERGY

V.N.Baier, V.S.Fadin

## A b s t r a c t

Production of particle pair with spin 0 and  $\frac{1}{2}$  in collision of two charged particles at high energy has been considered. In cross section of this process, which logarithmically increases with energy, terms containing third, second and in some actual cases first degree of logarithm have been found. Besides total cross section differential cross sections has been calculated using which analysis of angular and energy distributions has been made.

1. Сечение образования пары при соударении заряженных частиц (электророждения) логарифмически растёт с энергией и поэтому этот процесс оказывается весьма важным при высоких энергиях. В частности, процесс электророждения  $e^+e^-$  пары на большие углы наблюдался недавно в опытах на электрон-позитронных встречных пучках с энергией  $\mathcal{E} = 500$  Мэв в Новосибирске /1, 2/. При высоких энергиях старшие члены в сечении процесса (типа  $\ln^3 \mathcal{E}/m$  - "трижды логарифмические") могут быть найдены с помощью метода эквивалентных фотонов, что впервые было сделано в известной работе Ландау и Лифшица /3/. Для получения сечений, пригодных при относительно меньших энергиях, необходимо вычислить также члены, содержащие меньшие степени логарифмов. В данной работе найдено сечение электророждения в "дваждылогарифмическом" приближении, а в ряде актуальных случаев и с однологарифмической точностью. Как будет видно из дальнейшего, во всей области практически доступных энергий нельзя использовать сечения с учётом только старших логарифмических членов.

В низшем порядке теории возмущений для разных частиц процесс изображается тремя "блочными" диаграммами (см.рис.1), на

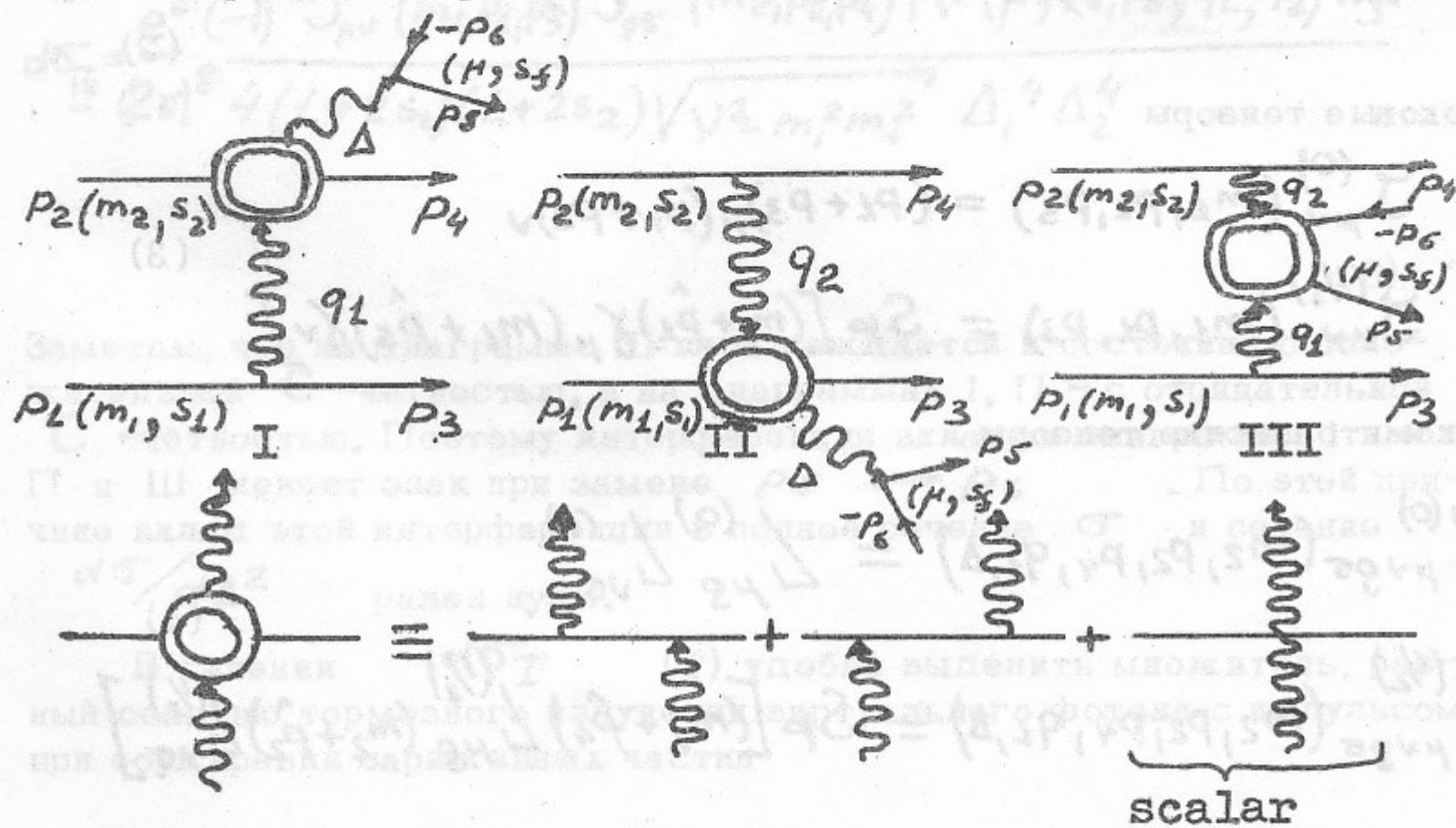


Рис.1.

которых обозначены импульсы, массы и спины частиц. Мы будем рассматривать только процессы с неполяризованными частицами. После проведения операций усреднения и суммирования по спиновым состояниям вклад диаграммы 1 приобретает вид:

$$d\sigma_I = \frac{e^8 (-1)^{2s_f} J_{\sigma\sigma}^{(s_f)}(\mu; p_6, p_5) J_{\mu\nu}^{(s_1)}(m_1, p_1, p_3) K^{(s_2)}_{\mu\nu\sigma\sigma}(m_2, p_2, p_4, q_L, \Delta) d\mathcal{Q}}{4(1+2s_1)(1+2s_2) \sqrt{v^2 - m_1^2 m_2^2} \Delta_1^4 \Delta^4} \quad (1)$$

где  $s_1, s_2$  - спины начальных,  $s_f$  - спин родившихся частиц ( $s_{1,2,f} = 0$  или  $1/2$ ),

$$d\mathcal{Q} = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6) \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \frac{d^3 p_5}{2E_5} \frac{d^3 p_6}{2E_6},$$

$$\Delta_{1,2}^2 = -q_{1,2}^2, \quad q_{1,2} = p_{1,2} - p_{3,4}, \quad \Delta = p_5 + p_6, \quad v \equiv (p_1 p_2) \quad (2)$$

Токовые тензоры

$$J_{\mu\nu}^{(0)}(m_1, p_1, p_3) = (p_1 + p_3)_\mu (p_1 + p_3)_\nu \quad (3)$$

$$J_{\mu\nu}^{(1/2)}(m_1, p_1, p_3) = \text{Sp} [(m_1 + \hat{p}_1) \gamma_\mu (m_1 + \hat{p}_3) \gamma_\nu]$$

и комптоновские тензоры

$$K_{\mu\nu\sigma\sigma}^{(0)}(m_2, p_2, p_4, q_L, \Delta) = L_{\mu\sigma}^{(0)} L_{\nu\sigma}^{(0)} \quad (4)$$

$$K_{\mu\nu\sigma\sigma}^{(1/2)}(m_2, p_2, p_4, q_L, \Delta) = \text{Sp} [(m_2 + \hat{p}_4) L_{\mu\sigma}^{(1/2)} (m_2 + \hat{p}_2) L_{\nu\sigma}^{(1/2)}]$$

где

$$L_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{(2p_2 + q_1)_\mu (2p_4 + \Delta)_\nu}{(p_2 + q_1)^2 - m_2^2} + \frac{(2p_4 - q_1)_\mu (2p_2 - \Delta)_\nu}{(p_2 - \Delta)^2 - m_2^2} - 2g_{\mu\nu},$$

$$L_{\mu\nu}^{(1/2)} = \gamma_\mu \frac{\hat{p}_2 - \hat{\Delta} + m_2}{(p_2 - \Delta)^2 - m_2^2} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{\hat{p}_2 + \hat{q}_1 + m_2}{(p_2 + q_1)^2 - m_2^2} \gamma_\mu, \quad (5)$$

$$\bar{L}_{\mu\nu}^{(1/2)} = \gamma^0 L_{\mu\nu}^{(1/2)} \gamma^0$$

Вклад диаграммы II получается из (1) заменой  $m_1 \leftrightarrow m_2$ ,  $s_1 \leftrightarrow s_2$ ,  $p_{1,3} \leftrightarrow p_{2,4}$ . Вклад диаграммы III в этих же обозначениях есть

$$d\sigma_{III} = \frac{e^8 (-1)^{2s_1} J_{\mu\nu}^{(s_1)}(m_1, p_1, p_3) J_{\rho\sigma}^{(s_2)}(m_2, p_2, p_4) K^{(s_3)}(\mu_5, p_6, p_5, q_1, q_2) d\Omega}{(2\pi)^8 4(l+2s_1)(l+2s_2) \sqrt{\nu^2 - m_1^2 m_2^2} \Delta_1^4 \Delta_2^4}$$

(6)

Заметим, что на диаграмме III пара рождается в состоянии с положительной  $C$ -четностью, а на диаграммах I, II - с отрицательной  $C$ -четностью. Поэтому интерференция вкладов диаграммы I или II и III меняет знак при замене  $p_5 \leftrightarrow p_6$ . По этой причине вклад этой интерференции в полное сечение  $\sigma$  и сечение

$d\sigma/d\Delta^2$  равен нулю.

В сечении  $d\sigma_I$  (1) удобно выделить множитель, равный сечению тормозного излучения виртуального фотона с импульсом  $\Delta$  при соударении заряженных частиц

$$d\sigma_{SS}^{(\gamma)} = \frac{e^6}{(2\pi)^5} \frac{J^{(s_1)\mu\nu}(m_1, p_1, p_3) K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(s_2)}(m_2, p_2, p_4, q_1, \Delta)}{4(1+2s_1)(1+2s_2) \sqrt{V^2 - m_1^2 m_2^2} \Delta^4} \times \\ \times \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \Delta) \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \frac{d^3 \Delta}{2\Delta_0} \quad (6)$$

Интегрирование по импульсам рождающейся пары при заданном 4-импульсе  $\Delta_\mu$  удобно провести в тензорном виде (ср. /4/) с учётом калибровочной инвариантности

$$(-1)^{2s_f} \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int J_{\mu\nu}^{(s_f)}(m, -p_5, p_6) \delta^4(\Delta - p_5 - p_6) \frac{d^3 p_5}{2E_5} \frac{d^3 p_6}{2E_6} = \\ = - f^{(s_f)}(\Delta^2) \left( g_{\mu\nu} - \frac{\Delta_\mu \Delta_\nu}{\Delta^2} \right) \quad (7)$$

где

$$f^{(0)}(\Delta^2) = \frac{\alpha}{12\pi} \Delta^2 \beta^3, \quad f^{(1/2)}(\Delta^2) = \frac{\alpha}{3\pi} (\Delta^2 + 2m^2) \beta \quad (8)$$

Здесь  $\beta = \sqrt{\frac{\Delta^2 - 4m^2}{\Delta^2}}$ . Тогда сечение  $d\sigma_I$  приобретает вид

$$d\sigma_I = - f^{(s_f)}(\Delta^2) \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} d\sigma_{SS}^{(\gamma)} g^{SS} \quad (9)$$

При вычислении сечения  $d\sigma_{III}$  интегрирование по конечным состояниям родившейся пары можно провести как в § 4 работы /5/ с другой группировкой членов, чтобы при интегрировании сечения  $d\sigma_{III}$  не возникали члены аномально возрастающие с

$\nu = (p_1 p_2)$ . В результате получаем

$$\begin{aligned}
d\sigma_{III} = & \frac{e^8}{(2\pi)^8} \frac{1}{\sqrt{V^2 - m_1^2 m_2^2} \Delta_1^4 \Delta_2^4 D} \left\{ C_1^{(s_f)} [\Delta_1^2 \tilde{b}_L - 2m_1^2 X] [\Delta_2^2 \tilde{b}_L - 2m_2^2 X] + \right. \\
& + (C_2^{(s_f)} + C_3^{(s_f)}) D \left[ 4 \left( V - \frac{2\eta\eta'}{X} \right)^2 + s_1 s_2 \Delta_1^2 \Delta_2^2 \left( 2 + \frac{\Delta_1^2 \Delta_2^2}{X^2} \right) - 2 s_1 \Delta_1^2 \left( m_2^2 + \frac{\Delta_2^2 \eta'}{X} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\Delta_2^2 \eta'^2}{X^2} \right) - 2 s_2 \Delta_2^2 \left( m_1^2 + \frac{\Delta_1^2 \eta}{X} - \frac{\Delta_1^2 \eta^2}{X^2} \right) \right] + C_4^{(s_f)} \tilde{b}_2 [\Delta_1^2 \tilde{b}_L - 2m_1^2 X] + \\
& + C_5^{(s_f)} \tilde{b}_2 [\Delta_2^2 \tilde{b}_L - 2m_2^2 X] + (C_6^{(s_f)} + C_7^{(s_f)}) \Delta_1^2 \Delta_2^2 \left[ \left( V - \frac{2\eta\eta'}{X} \right) (2(\eta + \eta') - \right. \\
& \left. - X - \frac{4\eta\eta'}{X}) - s_1 s_2 \Delta_1^2 \Delta_2^2 \left( 1 - \frac{\Delta_1^2 \Delta_2^2}{X^2} \right) + s_1 \Delta_1^2 \Delta_2^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2\eta'}{X} + \frac{2\eta'^2}{X^2} \right) + \right. \\
& \left. + s_2 \Delta_1^2 \Delta_2^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2\eta}{X} + \frac{2\eta^2}{X^2} \right) \right] + C_8^{(s_f)} \tilde{b}_2 \tilde{b}_2 \left. \right\} \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\eta \equiv (p_1, q_2), \quad \eta' \equiv (p_2, q_1), \quad X \equiv (q_1, q_2), \quad D = X^2 - \Delta_1^2 \Delta_2^2;$$

$$\tilde{b}_L = 2\eta \left( \frac{\eta}{X} - 1 \right) + s_1 X \left( 2 + \frac{\Delta_1^2 \Delta_2^2}{X^2} \right), \quad \tilde{b}_2 = \tilde{b}_L (\eta \rightarrow \eta', s_1 \rightarrow s_2);$$



$$b_2 = \Delta_1^2 \left[ 2m_1^2 - \left( 3s_1 - \frac{1}{2} \right) \Delta_1^2 \right], \quad \tilde{b}_2 = b_2 (\Delta_1^2 \rightarrow \Delta_2^2, m_1^2 \rightarrow m_2^2, s_1 \rightarrow s_2);$$

$$c_1 = \frac{1}{8D} \left[ f_1 (3X^2 - 2\Delta_1^2 \Delta_2^2) - (f_2 + f_3) (X^2 - 2\Delta_1^2 \Delta_2^2) - (f_5 \Delta_1^2 + \right. \\ \left. + f_6 \Delta_2^2) (X^2 - 2\Delta_1^2 \Delta_2^2) + 2(f_6 + f_7) X (X^2 - 6\Delta_1^2 \Delta_2^2) + \right. \\ \left. + f_8 (39\Delta_1^2 \Delta_2^2 X^2 - 2X^4 - 2\Delta_1^4 \Delta_2^4) \right];$$

$$c_2 = \frac{1}{8} \left[ -f_1 + 3f_2 - f_3 + f_4 \Delta_2^2 + f_5 \Delta_1^2 - 6f_6 X + \right. \\ \left. + 2f_7 X + f_8 (2X^2 - \Delta_1^2 \Delta_2^2) \right]; \quad (11)$$

$$c_3 = \frac{1}{8} \left[ -f_1 - f_2 + 3f_3 + f_4 \Delta_2^2 + f_5 \Delta_1^2 + 2f_6 X - \right. \\ \left. - 6f_7 X + f_8 (2X^2 - \Delta_1^2 \Delta_2^2) \right];$$

$$c_4 = \frac{1}{8D} \left[ (f_1 + f_2 + f_3) X \Delta_1^2 - X [f_4 (4X^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2) + 5f_5 \Delta_1^4 \right. \\ \left. + 10(f_6 + f_7) X \Delta_1^2 - f_8 \Delta_1^2 (30X^2 + 5\Delta_1^2 \Delta_2^2) \right];$$

$$c_5 = \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} \left( c_4 + \frac{\chi}{2} f_4 \right) - \frac{\chi}{2} f_5 ;$$

$$c_6 = 2c_2 - f_6 \chi + f_8 \chi^2 ;$$

$$c_7 = 2c_3 - f_7 \chi + f_8 \chi^2 ;$$

$$c_8 = c_1 + \frac{3}{2} c_6 + c_7 - \frac{1}{2} (f_2 - 3\chi f_6) ;$$

Здесь не выписан явно индекс  $s_f$  ( $c_n^{(s_f)}, f_n^{(s_f)}$ ), один и тот же в левой и правой части

$$f_n^{(s_f)} = R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(n)} (-1)^{2s_f} \int K^{(s_f)}_{(\mu, -p_6, p_5, q_1, -q_2)} \chi$$

$$\times \delta(\Delta - p_5 - p_6) \frac{d^3 p_5}{2\epsilon_5} \frac{d^3 p_6}{2\epsilon_6}, \quad n = 1 \dots 8; \quad (12)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(n)} = \left( g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}, g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}, g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}, \frac{1}{D} g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} g_{\lambda\delta} g_{\lambda\delta}, \right. \\ \left. \frac{1}{D} g_{\rho\sigma} g_{\lambda\mu} g_{\lambda\nu}, \frac{1}{D} g_{\mu\rho} g_{\lambda\sigma} g_{\lambda\nu}, \frac{1}{D} g_{\mu\sigma} g_{\lambda\rho} g_{\lambda\nu}, \frac{1}{D^2} g_{\lambda\rho} g_{\lambda\sigma} g_{\lambda\mu} g_{\lambda\nu} \right)$$

Свертки  $f_n^{(s_f)}$  (12) вычисляются непосредственно, мы не приводим их здесь вследствие громоздкости.

При вычислении полного сечения  $\sigma_{III}$  можно перейти к ковариантным переменным

$$\frac{d^3 p_3}{2\varepsilon_3} \frac{d^3 p_4}{2\varepsilon_4} = \frac{\pi}{2} \frac{d\eta d\Delta_2^2}{\sqrt{V^2 - m_1^2 m_2^2}} \frac{d\Delta^2 d\Delta_1^2 d\varphi}{8\sqrt{\eta^2 + m_1^2 \Delta_2^2}} \quad (13)$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостями  $(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$  и  $(\vec{p}_1, \vec{q}_2)$  в системе, где векторы  $\vec{p}_1, \vec{q}_2$  коллинеарны. Входящие в (13) инвариантные переменные изменяются в пределах:

$$\Delta_{1-}^2 \leq \Delta_1^2 \leq \Delta_{1+}^2, \quad \Delta_{2-}^2 \leq \Delta_2^2 \leq \Delta_{2+}^2, \quad (14)$$

$$(m_1 + \sqrt{\Delta^2})^2 \leq \omega^2 \leq (\sqrt{(p_1 + p_2)^2} - m_2)^2,$$

$$4m^2 \leq \Delta^2 \leq (\sqrt{(p_1 + p_2)^2} - m_1 - m_2)^2,$$

где

$$\omega^2 = (p_1 + q_2)^2 = 2\eta + m_1^2 - \Delta_2^2,$$

$$\Delta_{1\pm}^2 = -2m_1^2 + \frac{1}{2\omega^2} \left\{ (\omega^2 + m_1^2 + \Delta_2^2)(\omega^2 + m_1^2 - \Delta_2^2) \pm \sqrt{[(\omega^2 - m_1^2 + \Delta_2^2)^2 + 4m_1^2 \Delta_2^2][(\omega^2 - m_1^2 - \Delta_2^2)^2 - 4m_1^2 \Delta_2^2]} \right\} \quad (15)$$

а  $\Delta_{2\pm}^2$  получается из  $\Delta_{1\pm}^2$  заменой  $\omega^2 \rightarrow (p_1 + p_2)^2$ ,

$$\Delta_2^2 \rightarrow -m_2^2, \quad m_1 \rightarrow m_2, \quad \Delta^2 \rightarrow \omega^2.$$

Приведенные выражения для сечений  $d\sigma_I$  (9) и

$d\sigma_{III}$  (10) являются точными. Теперь мы перейдем к рассмотрению сечений при больших энергиях, когда  $\nu \gg \mu^2, m_1, m_2, m_1\mu, m_2\mu$ .

2. Начнем с вычисления сечения  $d\sigma_{III}$ . Обсудим существенную область изменения переменных (14). 1) Поскольку сечение фотопроцесса (превращения двух фотонов в пару) падает степенным образом с ростом энергии, то  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$ . 2) Сечение виртуального фотопроцесса степенным образом убывает при  $\Delta_{1,2}^2 \gg \Delta^2$ , поэтому  $\Delta_{1,2}^2 \lesssim \Delta^2$ . 3) Переменная  $\eta$  есть энергия фотона  $\eta_2$  в системе, где  $\vec{p}_1 = 0$ . Сечение фоторождения пары на частице не зависит степенным образом от энергии фотона. Поэтому вклад даёт вся область изменения  $\eta$ , за исключением случая, когда  $m_2 \gg \mu$ , поскольку тогда при  $\eta \sim \nu\mu/m_2$  величина  $\Delta_2^2$  сравнивается с  $\mu^2$ , что эффективно обрезает интегралы по  $\eta$ .

Мы будем искать сечение  $\sigma_{III}$  с "дваждылогарифмической" точностью, т.е. сохранять в сечении члены, содержащие произведения трех и двух больших логарифмов (большими могут быть как логарифмы отношения энергии к массе, так и логарифмы отношения масс), причём вычисление будем вести так, чтобы последнее интегрирование велось по  $\Delta^2$ . Следует учесть следующие обстоятельства. 1) Искомые логарифмические члены возникают при интегрировании по  $\Delta_1^2, \Delta_2^2, \eta$ . Поэтому можно положить  $D = X^2$ , поскольку при разложении по степеням  $\Delta_1^2 \Delta_2^2 / X^2$  выпадают сразу два логарифма. По этой же причине в фигурных скобках в сечении (10) можно опустить члены  $\Delta_1^4 \Delta_2^4$ . II) Можно положить  $\eta' = \nu X / \eta$  повсюду, кроме комбинации  $(\nu - \eta\eta'/X)^2$ , внутри которой имеет место компенсация, причём с нужной точностью

$$\int d\varphi \left( \nu - \frac{\eta\eta'}{X} \right)^2 = \frac{\pi}{X^2 \eta^2} \left[ \sqrt{(\nu - \eta)\Delta_2^2 - m_2^2 \eta^2} \right] \left[ \sqrt{\eta(\eta - X)\Delta_1^2 - m_1^2 X^2} \right] \quad (16)$$

с учётом этого видно, что сечение (10) не содержит членов, аномально растущих с  $\sqrt{\nu}$ , поскольку коэффициенты  $C_n$  (11)  $\sim 1$ .  
 III) Из формул (10), (13) вытекает, что в фигурных скобках в (10) следует оставить члены  $\sim \sqrt{\nu}^2$ . В членах, куда величина  $\sqrt{\nu}^2$  не входит явно, она может возникнуть при интегрировании по  $\nu$  ( $\Delta_1^2$ ) (вклад верхнего (нижнего) предела), при этом, однако, выпадает соответствующий логарифм. Нужно также учесть, что

$\int d\Delta_2^2/\Delta_2^2 \left( \int d\Delta_1^2/\Delta_1^2 \right)$  даёт "большой" логарифм в области больших (малых)  $\nu$  только в случае  $m_2(m_1) \ll \mu$ .

На основании сказанного выше в сечении (10) можно опустить члены  $C_n$  ( $n \geq 4$ ), а также существенно упростить оставшееся выражение:

$$d\sigma_{III} = \frac{\alpha^4}{8\pi^2} d\Delta^2 \frac{d\nu}{\nu} \frac{d\Delta_2^2}{\Delta_2^4} \frac{d\Delta_1^2}{\Delta_1^4} \frac{1}{x^2} \left\{ f_2^{(s_f)} \left[ \Delta_1^2 \Delta_2^2 \left( 1 - \frac{\nu}{\sqrt{\nu}} - \frac{x}{\nu} + s_1 \frac{x^2}{\nu^2} + s_2 \frac{\nu^2}{\sqrt{\nu}^2} \right) - m_2^2 \Delta_1^2 \frac{\nu^2}{\sqrt{\nu}^2} - m_1^2 \Delta_2^2 \frac{\Delta^4}{4\nu^2} \right] - 3 \left( f_4^{(s_f)} \Delta_2^2 + f_5^{(s_f)} \Delta_1^2 \right) \Delta_1^2 \Delta_2^2 \right\} \quad (17)$$

где с принятой точностью

$$f_2^{(0)} = \pi\beta \left\{ 4 + \frac{\Delta^2}{x^2} (4\mu^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2) - \left[ 2(4\mu^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2) - \frac{1}{x} (8\mu^4 + 6\mu^2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + \Delta_1^4 + \Delta_2^4) \right] \nu/x \right\};$$

$$f_2^{(1/2)} = -8\pi\beta \left\{ 1 + \frac{\Delta^2}{2x^2} (2\mu^2 - \Delta_1^2 - \Delta_2^2) + \left[ 2\mu^2(\mu^2 - x) - \right. \right.$$

$$-x^2 + \frac{\Delta^2}{2} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) \Big] \ell_0 / x^2 \Big\} ;$$

$$f_4^{(0)} = f_5^{(0)} = \frac{\pi\beta}{x^2} [3\Delta^2 - (2\mu^2 + \Delta^2)\ell_0]; \quad (18)$$

$$f_4^{(1/2)} = f_5^{(1/2)} = \frac{4\pi\beta}{x^2} (-\Delta^2 + 2\mu^2\ell_0);$$

Здесь

$$\ell_0 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2}} \quad (19)$$

С принятой точностью пределы (14) можно положить равными:

$$\frac{m_1^2 \Delta^4}{4\eta^2} \leq \Delta_1^2 < \infty$$

$$\frac{m_2^2 \eta^2}{\sqrt{2}} \leq \Delta_2^2 < \infty \quad (20)$$

$$\sqrt{\Delta^2} \left( m_1 + \frac{\sqrt{\Delta^2}}{2} \right) \leq \eta \leq \sqrt{\Delta^2}$$

После сделанных упрощений интегралы по  $\Delta_1^2, \Delta_2^2$  берутся элементарно. В результате получаем:

$$d\sigma_{III} = \frac{4\alpha^4}{\pi} \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} \frac{d\eta}{\eta} \beta \left\{ d_2^{(s_f)} \left[ 1 - \frac{\eta}{v} - \frac{\Delta^2}{2\eta} + s_1 \frac{\Delta^4}{4\eta^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + s_2 \frac{\eta^2}{v^2} \right] l_1 l_2 + (d_2^{(s_f)} - d_2^{(s_f)}) \left( l_2 + \frac{l_1}{1 + \frac{m_2^2 \eta^2}{\Delta^2 v^2}} \right) \right\} \quad (21)$$

где

$$d_2^{(0)} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{4\mu^2}{\Delta^2} - \frac{4\mu^2}{\Delta^2} \left( 1 - \frac{2\mu^2}{\Delta^2} \right) l_0 \right], \\ d_2^{(1/2)} = -1 - \frac{4\mu^2}{\Delta^2} + \left( 1 + \frac{4\mu^2}{\Delta^2} - \frac{8\mu^4}{\Delta^4} \right) l_0, \quad (22)$$

$$d_2^{(0)} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{11}{3} - \frac{22\mu^2}{3\Delta^2} + \left( \frac{2}{3} + \frac{10\mu^2}{\Delta^2} - \frac{44\mu^4}{3\Delta^4} \right) l_0 \right],$$

$$d_2^{(1/2)} = \frac{11}{3} + \frac{22\mu^2}{3\Delta^2} - \left( \frac{5}{3} + \frac{10\mu^2}{\Delta^2} - \frac{44\mu^4}{3\Delta^4} \right) l_0,$$

$$l_1 = \ln \frac{4\eta^2}{m_1^2 \Delta^2}, \quad l_2 = \ln \left( \frac{m_2^2 \eta^2 + \Delta^2 v^2}{m_2^2 \eta^2} \right)$$

Отметим, что величина  $\frac{4\alpha^2 \pi \beta}{\Delta^2} d_2^{(s_f)} = \sigma_{\gamma\gamma}^{(s_f)}$  есть сечение превращения двух фотонов в пару частиц, а член, содержащий  $l_1 l_2$  в сечении (21) может быть получен с помощью полюсного приближения (метода эквивалентных фотонов).

Выполняя интегрирование по  $\eta$  в пределах (20) получаем

$$d\sigma_{III} = \frac{8\alpha^4}{\pi} \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} \beta \left\{ d_2^{(s_f)} \left[ \frac{1}{3} \ln^3 \frac{2v}{m_1 m_2} - \ln \frac{2v}{m_1 m_2} \left( \ln^2 \left( 1 + \frac{\Delta}{m_1} \right) + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \ln^2\left(1 + \frac{\Delta}{m_2}\right) + \frac{2}{3} \left( \ln^3\left(1 + \frac{\Delta}{m_1}\right) + \ln^3\left(1 + \frac{\Delta}{m_2}\right) \right) - \\
& - \ln \frac{2\nu}{m_1 m_2} \ln \frac{\nu}{(m_1 + \Delta)(m_2 + \Delta)} - (2 - s_1) \ln \frac{\nu}{m_2 \Delta} \ln\left(1 + \frac{\Delta}{m_2}\right) - \\
& - (2 - s_2) \ln \frac{\nu}{m_1 \Delta} \ln\left(1 + \frac{\Delta}{m_2}\right) + d_2^{(s_f)} \ln \frac{2\nu}{m_1 m_2} \ln \frac{\nu}{(m_1 + \Delta)(m_2 + \Delta)} \}
\end{aligned} \tag{23}$$

где  $\Delta = \sqrt{\Delta^2}$ ,  $d_{1,2}^{(s_f)}$  — даются формулой (22). Полученное сечение  $d\sigma_{\text{III}}/d\Delta^2$  пригодно при любом соотношении между массами участвующих частиц. Интегральное сечение  $\sigma_{\text{III}}$  имеет разный вид в зависимости от соотношения между массами. В случае, когда  $\mu \gg m_{1,2}$  имеем сечение электророждения с дважды логарифмической точностью (логарифм отношения  $\mu/m_{1,2}$  считается "большим").

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{III}}^{(s_f)}(s_1, s_2) = \frac{\alpha^4}{27\pi\mu^2} \left\{ a_1^{(s_f)} \left[ L^3 - 3L(L_1^2 + L_2^2) + \right. \right. \\
+ 2(L_1^3 + L_2^3) \left. \right] - a_2^{(s_f)} L^2 - a_3^{(s_f)} L(L_1 + L_2) + a_4^{(s_f)} (L_1^2 + L_2^2) + \\
+ a_5^{(s_f)} (s_1 - 2)L_1(L - L_1) + a_5^{(s_f)} (s_2 - 2)L_2(L - L_2) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$L = \ln \frac{2\nu}{m_1 m_2}, \quad L_1 = \ln \frac{\mu}{m_1}, \quad L_2 = \ln \frac{\mu}{m_2},$$



$$\begin{aligned}
a_2^{(c)} &= 4, & a_2^{(1/2)} &= 28; \\
a_2^{(0)} &= 19, & a_2^{(1/2)} &= 178; \\
a_3^{(c)} &= 14, & a_3^{(1/2)} &= 80; \\
a_4^{(c)} &= 33, & a_4^{(1/2)} &= 258; \\
a_5^{(c)} &= 12, & a_5^{(1/2)} &= 84.
\end{aligned} \tag{25}$$

В случае, когда  $m_1 \gtrsim \mu$ ,  $m_2 \gtrsim \mu$  следует в (24) положить  $L_1 = L_2 = 0$ , тогда получим, независимо от спинов  $s_1, s_2$

$$\sigma_{\text{III}}^{(s_1)} = \frac{\alpha^4}{27\pi\mu^2} \left[ a_2^{(s_1)} L^3 - a_2^{(s_1)} L^2 \right] \tag{26}$$

В случае, когда  $m_1(2) \gtrsim \mu$ ,  $\mu \gg m_2(2)$  следует в (24) положить  $L_1(2) = 0$ .

3. Мы получили полное сечение  $\sigma_{\text{III}}$  с дваждылогарифмической точностью при произвольном соотношении между массами. В ряде случаев удастся получить простые формулы для сечений и с однологарифмической точностью. Для этого удобно воспользоваться результатами Кельера / 6, 7 /, который вычислил  $d\sigma_{\text{III}}/d\varepsilon_s d\varepsilon_c$  с точностью до членов  $\sim \mu^2/\varepsilon_{s,6}^2$ ,  $m_2^2/(\varepsilon-\omega)^2$  для рождения пар релятивистской частицей с энергией  $\varepsilon$  и массой  $m_2$  в кулоновском поле. Проводя интегрирование этих сечений получим энергетический спектр родившихся пар  $d\sigma_{\text{III}}/d\omega$  ( $\omega = \varepsilon_s + \varepsilon_c$ )  
Приведем этот спектр для некоторых случаев: I (  $m_2 = \mu$  )

$$\frac{d\sigma_{\text{III}}}{d\omega} = \frac{2\alpha^4}{9\pi\mu^2\omega} \left\{ g_1^{(s_1, s_2)} \ln \frac{2\omega}{\mu} \ln \frac{1}{\omega} + g_2^{(s_1)} \ln \frac{1}{\omega} + \right.$$

$$+ g_3^{(s_1, s_2)} \ln \frac{2\omega}{\mu} + g_4^{(s_1, s_2)} \ln \frac{2\omega}{\mu} \ln(1-\xi) + g_5^{(s_1)} \} \quad (27)$$

где  $\xi = \omega/\varepsilon$  ;

$$g_1^{(1/2, s_2)} = 28\tau + \frac{32}{5}\xi^2, \quad g_2^{(1/2)} = -\frac{218}{3},$$

$$g_3^{(1/2, s_2)} = \frac{8}{5} \left[ \frac{11}{\xi^2} - \frac{22}{\xi} + \frac{43}{4} + \frac{\xi}{4} \right] - 28s_2(1-\xi),$$

$$g_4^{(1/2, s_2)} = 4 \left[ \frac{22}{5\xi^3} - \frac{11}{\xi^2} + \frac{5}{\xi} + \chi(1-\xi) + \frac{8}{5}\xi^2 - s_2(-7\xi^2 + 6\xi - \frac{21}{2} + \frac{\chi}{\xi} + \frac{9}{2(2-\xi)}) \right],$$

$$g_5^{(1/2)} = \frac{\chi\pi^2}{2} - \frac{811}{9};$$

$$g_2^{(0, s_2)} = 4\left(\tau + \frac{\xi^2}{5}\right), \quad g_2^{(0)} = -\frac{26}{3},$$

$$g_3^{(0, s_2)} = \frac{4}{5} \left[ -\frac{11}{\xi^2} + \frac{22}{\xi} - \chi - 4\xi \right] - \chi(1-\xi)(1-2s_2),$$

$$g_4^{(0, s_2)} = -\frac{44}{5\xi^3} + \frac{22}{\xi^2} - \frac{23}{\xi} + \frac{29}{2} - \frac{11}{2}\xi + \frac{4}{5}\xi^2 + s_2 \left( \frac{14}{\xi} - \right. \quad (28)$$

$$\left. -21 + 3\xi + 4\xi^2 \right), \quad g_5^{(0)} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{121}{9}; \quad \tau = (1-\xi + s_2\xi^2).$$

II ( $m_2 \ll \mu$ )

$$\frac{d\sigma_{III}}{d\xi} = \frac{2\alpha^4}{9\pi\mu^2} \frac{1}{\xi} \left\{ h_1^{(s_f, s_2)} \ln \frac{2\omega}{\mu} \ln \frac{(1-\xi)\mu^2}{\xi^2 m_2^2} + \right. \\ \left. + h_2^{(s_f, s_2)} \ln \frac{2\omega}{\mu} + h_3^{(s_f, s_2)} \ln \frac{\mu}{\xi m_2} + g_5^{(s_f)} \right\} \quad (29)$$

где

$$h_1^{(1/2, s_2)} = 7h_1^{(0, s_2)} = 14\pi, \quad h_2^{(1/2, s_2)} = \frac{40}{3}(1-\xi) + \\ + \xi^2 \left(1 + \frac{64}{3}s_2\right), \quad h_3^{(1/2, s_2)} = -\frac{218}{3}\pi, \\ h_2^{(0, s_2)} = \frac{7}{3}(1-\xi) + \xi^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{17}{6}s_2\right), \quad h_3^{(0, s_2)} = -\frac{26}{3}\pi \quad (30)$$

III ( $m_2 \gg \mu$ )

$$\frac{d\sigma_{III}}{d\xi} = \frac{2\alpha^4}{9\pi\mu^2} \frac{1}{\xi} \left\{ e_1^{(s_f)} \ln z \ln \frac{2\varepsilon}{m_2} + e_2^{(s_f)} \ln \frac{2\varepsilon}{m_2} \right. \\ \left. + e_3^{(s_f)} \ln \frac{2\varepsilon}{m_2} \frac{\ln \left( \frac{z + \sqrt{4+z^2}}{2} \right)}{z \sqrt{z^2+4}} + e_4^{(s_f)} \frac{\ln^2 z}{z+z^2} + \right.$$

$$\left. + e_5^{(s_f)} \frac{\ln z}{1+z^2} + \frac{g_5^{(s_f)}}{1+z^2} \right\} \quad (31)$$

где  $z = \frac{m_2}{\mu}$  ;

$$e_1^{(1/2)} = -28 - \frac{32}{5} z^2, \quad e_2^{(1/2)} = \frac{8}{5} \left[ -4 + \frac{11}{z^2} \right],$$

$$e_3^{(1/2)} = \frac{4}{5} \left( -\frac{88}{z^2} + 84 + 51z^2 + 8z^4 \right), \quad e_4^{(1/2)} = 7e_4^{(0)} = -28,$$

$$e_5^{(1/2)} = 86 ; \quad e_1^{(0)} = 4 \left( -1 - \frac{z^2}{5} \right), \quad e_2^{(0)} = -\frac{4}{5} \left( 1 + \frac{11}{z^2} \right),$$

$$e_3^{(0)} = \frac{4}{5} \left( \frac{44}{z^2} + 23 + 7z^2 + z^4 \right), \quad e_5^{(0)} = 11$$

(32)

Эти сечения приведены с точностью до членов, дающих логарифмический вклад в полные сечения и справедливы при  $\omega \gg \mu$ ,

$\varepsilon - \omega \gg m_2$ . Поэтому для вычисления полного сечения необходимо отдельно рассмотреть область  $\omega \sim \mu$ . Эта область даёт однологарифмический вклад, который можно найти с помощью метода эквивалентных фотонов:

$$d\sigma_{\text{III}}(\omega \sim \mu) = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \sigma_{\gamma}^{(s_f)}(\omega) \ln \frac{\varepsilon}{\omega} \quad (33)$$

где  $\sigma_{\gamma}^{(s_f)}(\omega)$  - сечение фоторождения пары на ядре. Такой же вид приобретают при  $\omega \sim \mu$  с логарифмической точностью и (27-32), только в них будут входить  $\sigma_{\gamma}^{(s_f)}(\omega \gg \mu)$ , взятые с точностью до константы. Чтобы избежать сшивки, следует в (33) из

$\sigma_{\gamma}^{(s_f)}(\omega)$  вычесть  $\sigma_{\gamma}^{(s_f)}(\omega \gg \mu)$ , тогда полученное в результате

выражение ведет себя как  $1/\omega^2$  при  $\omega \gg \mu$ . Для получения полных сечений с однологарифмической точностью следует проинтегрировать это выражение в пределах  $2\mu \leq \omega < \infty$  и добавить к нему интегралы от сечений (27-32) в пределах  $2\mu < \omega < \varepsilon$  (нетрудно видеть, что основной вклад даёт область  $\varepsilon - \omega \sim \varepsilon$ , что позволяет использовать формулы (27-32) во всем интервале). В итоге мы приходим к сечению электророждения пары в кулоновском поле. Однако найденные результаты могут быть использованы также и для получения сечений электророждения при столкновении двух частиц. Для того, чтобы убедиться в этом учтем, что отличие реакции в кулоновском поле от реакции на покоящейся частице с массой  $m_1$  состоит в том, что последняя приобретает энергию отдачи, равную  $\Delta_1^2/2m_1$ , причём, как отмечалось выше в существенной области  $\Delta_1^2 \lesssim \mu^2$ . Поэтому ясно, что в случае, когда  $\omega \gg \mu^2/m_1$ ,  $\varepsilon - \omega \gg \mu^2/m_1$ , полученные формулы описывают процесс при столкновении двух частиц. Если ввести и при  $m_1 \neq \infty$   $\omega = \eta/m_1$ , то сечения (27-32) могут быть переписаны в ковариантной форме ( $\varepsilon = \sqrt{m_1}$ ) см. (11) и при  $\eta \gg \mu^2, \mu m_1$  и  $\sqrt{\varepsilon} - \eta \gg \mu^2, m_1 m_2$  эти сечения справедливы для любой массы  $m_1$ .

Обсудим процедуру вычисления полных сечений электророждения при столкновении частиц. В случае  $m_2 = \mu$  это вычисление проводится так же, как в кулоновском поле, только в качестве  $\sigma_{\gamma}^{(4)}(\omega)$  в (33) следует подставить сечение фоторождения на частице с массой  $m_2$  (формула (2.19) работы / 5 /), а в сечениях, полученных из (27-32) проводить интегрирование в пределах  $2\mu(\mu + m_1) \leq \eta \leq \sqrt{\varepsilon}$ . Соответствующая процедура может быть развита и при  $m_2 \ll \mu$ , но этого можно не делать, если учесть, что сечение должно быть симметрично относительно замены ( $p_1, s_1 \leftrightarrow p_2, s_2$ ), что позволяет найти вклад при малых  $\eta$ , воспользовавшись результатами при  $m_2 \ll \mu$ . В результате довольно громоздких вычислений приходим к сечениям в однологарифмическом приближении. Для получения явного вида их следует добавить к сечениям (24-26) следующее выражение:

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}}_{\Pi}^{(s_f)}(s_1, s_2) = \frac{\alpha^4}{27\pi\mu^2} \omega^{(s_f)}(s_1, s_2) \quad (34)$$

где при  $m_1 \gg \mu, m_2 \gg \mu$

$$\omega^{(1/2)} = (7\pi^2 + 370)L, \quad \omega^{(0)} = (\pi^2 + 22)L \quad (35)$$

при  $m_1 \gg \mu, m_2 = \mu$

$$\omega^{(1/2)} = [-21\pi^2 + 232 - s_2(33\pi^2 - 396)]L, \quad (36)$$

$$\omega^{(0)} = \left[-\frac{27}{2}\pi^2 + 100 + s_2(21\pi^2 - 198)\right]L$$

при  $m_1 \gg \mu, m_2 \ll \mu$

$$\omega^{(1/2)} = \left[-7\pi^2 + \frac{223}{3} + 43s_2\right]L + \mathcal{A}_2^{(1/2)}L_2, \quad (37)$$

$$\omega^{(0)} = \left[-\pi^2 - \frac{311}{12} + \frac{11}{2}s_2\right]L + \mathcal{A}_2^{(0)}L_2,$$

$$\mathcal{A}_2^{(1/2)} = -7\pi^2 + \frac{3917}{3} - 303s_2,$$

$$\mathcal{A}_2^{(0)} = -\pi^2 + \frac{2183}{12} - \frac{75}{2}s_2$$

при  $m_1 = \mu, m_2 = \mu$

$$\omega^{(1/2)} = [-49\pi^2 + 94 - (s_1 + s_2)(33\pi^2 - 396)]L$$

$$\omega^{(0)} = [-28\pi^2 + 178 + (s_1 + s_2)(21\pi^2 - 198)]L \quad (38)$$

при  $m_1 = \mu, m_2 \ll \mu$

$$\omega^{(1/2)} = \left[ -35\pi^2 - \frac{191}{3} + 43s_2 - s_1(33\pi^2 - 396) \right] L_1 + A_2^{(1/2)} L_2, \quad (39)$$

$$\omega^{(0)} = \left[ -\frac{31}{2}\pi^2 + \frac{625}{12} + \frac{11}{2}s_2 + s_1(21\pi^2 - 198) \right] L_1 + A_2^{(0)} L_2$$

при  $m_1 \ll \mu, m_2 \ll \mu$

$$\omega^{(1/2)} = \left[ -21\pi^2 - \frac{664}{3} + 43(s_1 + s_2) \right] L_1 + A_2^{(1/2)} L_2 + A_1^{(1/2)} L_1,$$

$$\omega^{(0)} = \left[ -3\pi^2 - \frac{443}{6} + \frac{11}{2}(s_1 + s_2) \right] L_1 + A_2^{(0)} L_2 + A_1^{(0)} L_1, \quad (40)$$

$$A_2^{(s_f)} = A_2^{(s_f)}(s_2 \rightarrow s_1)$$

Использованное выше разложение сечений по степеням логарифмов неприменимо в довольно широкой области у порога. Подобная ситуация хорошо известна в задаче фоторождения / 8 /. Наиболее благоприятным является случай тяжелых начальных частиц, где поправочные члены имеют вид  $(E_t/E)^2 L^5$  ( $E$  - энергия начальной частицы в  $L$ -системе,  $E_t$  - пороговая энергия в этой же системе). В случае же образования частиц с равной массой или  $\mu \gg m_{1,2}$  поправочные члены  $\sim (E_t/E) L^5$ .

4. Обсудим угловое и энергетическое распределение частиц в существенной области вклада диаграммы III. Нетрудно видеть, что

$$\Delta_{L(2)}^2 > \vec{P}_{3(4)L}^2, \quad \text{где } \vec{P}_{3(4)L} - \text{компоненты импульса}$$

перпендикулярные начальному импульсу. В существенной области

$$\Delta_{1/2}^2 \lesssim \Delta^2 \sim 4\mu^2 \quad (\text{это легко видеть из приближенного выражения (17), содержащего фактор } \chi^{-2} = 4(\Delta^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2)^{-2}),$$

откуда следует, что  $|\vec{P}_{3,4L}| \lesssim \mu$ , а значит и поперечный импульс родившейся пары  $|\vec{\Delta}_L| \lesssim \mu$ . Поскольку

$\Delta^2 \sim 4\mu^2$ , то  $|\vec{P}_{S(6)}| \lesssim \mu$ . Из (27-32) видно, что спектр родившихся частиц в  $L$ -системе есть  $d\omega/\omega$ , причём при электророждении легких частиц тяжелыми (31) спектр обрезается при  $\omega \sim \epsilon\mu/m_2$  (см. (31)), т.е. когда скорость частиц пары достигает скорости начальной частицы. Итак, пара вылетает в направлении движения начальной частицы под углом

$\vartheta_{S(6)} \lesssim \mu/\omega$ . Как отмечалось  $\epsilon_4 \sim \epsilon$ , т.е. быстрая налетающая частица отключается на малый угол  $\vartheta_4 \lesssim \mu/\epsilon$  а передача энергии частице отдачи  $\sim \mu^2/m_2$ . Малость поперечного импульса позволяет переходить в другую систему, например, вычислить спектр родившихся частиц при  $\omega \gg \mu$  в  $L$ -системе.

Б. Перейдем к рассмотрению вклада диаграммы I. Сразу отметим, что при  $\mu \ll m_2$  вклад этой диаграммы в полное сечение  $\sim 1/m_2^2$  (сечение тормозного излучения обратно пропорционально квадрату массы излучающей частицы) и, следовательно, пренебрежимо мал по сравнению с вкладом диаграммы III. Поэтому следует рассматривать только случай  $\mu \gtrsim m_2$ , тогда из условия  $\nu \gg \mu^2$  следует, что  $\nu \gg m_2^2$ .

Для получения сечения  $\sigma_T$  вычислим сечение излучения виртуального фотона с массой  $\sqrt{\Delta^2}$   $d\sigma_{S(6)}^{(\gamma)} g^{S(6)}$  (6). Введем ковариантные переменные

$$x = (p_1 + p_2) \Delta - \frac{\Delta^2}{2}, \quad x_2 = (p_2 \Delta) - \frac{\Delta^2}{2}, \quad \Delta_1^2 = -(p_1 - p_3)^2, \quad (41)$$

$$x_4 = p_4 \Delta + \frac{\Delta^2}{2}$$

и будем искать  $d\sigma_{S(6)}^{(\gamma)}/dx g^{S(6)}$ , полагая, что  $x \gg \Delta^2$ ,  $x^2 \gg m_1^2 \Delta^2$ ,  $\nu - x \sim \nu$ . Решение этой задачи аналогично нахождению спектра тормозного излучения в  $L$ -системе / 9 /. После перехода к ковариантным переменным, отбора главных членов и интегрирования по  $x_4, \Delta_1^2$  (в существенной области  $x_4 \sim \Delta^2$ ,  $m_1^2 x_2^2/\nu^2 \lesssim \Delta_1^2 \lesssim \Delta^2$ ) получим независимо от спина  $S_1$ :



$$d\sigma_{95}^{(8)} g^{95} = -\frac{\alpha^3}{\sqrt{3}} \left\{ z_1^{(s_2)} \frac{(\ell_3 - 1)}{\alpha_2^2} + z_2^{(s_2)} \frac{\alpha^2 (v - \alpha)}{\sqrt{\alpha_2^4}} \left[ (m_2^2 \Gamma - \frac{2\alpha_2 v}{\alpha})(\ell_3 - 4) - \frac{2\alpha_2^2 v^2}{m_2^2 \alpha^2 \Gamma} \right] \right\} d\alpha d\alpha_2 \quad (42)$$

где

$$z_1^{(1/2)} = v^2 + (v - \alpha)^2, \quad z_2^{(1/2)} = m_2^2 + \frac{\Delta^2}{2}, \quad (43)$$

$$z_1^{(0)} = 2v(v - \alpha), \quad z_2^{(0)} = m_2^2 - \frac{\Delta^2}{4};$$

$$\ell_3 = \ln \frac{4v^2(v - \alpha)^2}{m_1^2 m_2^2 \alpha^2 \Gamma}; \quad \Gamma = 1 + \frac{\Delta^2 v (v - \alpha)}{m_2^2 \alpha^2}$$

При  $\Delta^2 = 0$  получаем отсюда угловое и энергетическое распределение тормозного излучения (при  $s_2 = 1/2$ ,  $m_1 = m_2 = 1$  формулу (11) работы / 9 /). Пределы интегрирования по  $\alpha_2$  легко определить в системе  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$  (вектор  $\vec{\Delta}$  направлен по и против  $\vec{p}_2$ ), в ковариантных переменных

$$\alpha_{2\pm} = \frac{2\alpha(v + m_2^2) - \Delta^2(v + m_1^2) \pm \sqrt{(v^2 - m_1^2 m_2^2) [(2\alpha + \Delta^2)^2 - 4\Delta^2(v + m_1^2 + m_2^2)]}}{2(2v + m_1^2 + m_2^2)} \quad (44)$$

Интегрирование по  $\alpha_2$  в принятых предположениях можно проводить в пределах

$$\frac{m_2^2 \alpha \Gamma}{2\nu} \leq \alpha_2 < \infty \quad (45)$$

поскольку вклад дают малые углы излучения (см. (42)).

В результате получаем:

$$d\sigma_{\text{ср}}^{(s)} g_{\text{ср}}^{s^5} = - \frac{2\alpha^3 d\alpha}{\sqrt{2} m_2^2 \alpha \Gamma} \left[ z_2^{(s_2)} - \frac{2}{3} z_2^{(s_2)} \frac{\nu(\nu-\alpha)}{m_2^2 \Gamma} \right] (\ell_3 - 1) \quad (46)$$

это сечение при  $\Delta^2 = 0$  переходит в спектр тормозного излучения (ср. / 9/). Пределы интегрирования по  $\alpha$  определяются неравенствами

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2 - \Delta)^2 &= (p_3 + p_4)^2 \geq (m_1 + m_2)^2 \\ (p_1 + p_2 - \Delta)^2 &\leq (\sqrt{(p_1 + p_2)^2} - \sqrt{\Delta^2})^2 \end{aligned} \quad (47)$$

или

$$\sqrt{(\nu + m_1^2 + m_2^2)\Delta^2} - \frac{\Delta^2}{2} \leq \alpha \leq \nu - m_1 m_2 \quad (48)$$

Для получения  $d\sigma_I/d\Delta^2$  следует, взяв интеграл по  $\alpha$  от (46), подставить результат в (9). Видно, что при  $\Delta^2 \ll m_2^2$  величина  $\sigma_{\text{ср}}^{(s)} g_{\text{ср}}^{s^5} \sim 1/m_2^2$ , а значит при  $\mu \ll m_2$   $\sigma_I \sim 1/m_2^2$  (этот случай в дальнейшем не рассматривается). Если  $\mu \gtrsim m_2$ , то из (46) видно, что  $d\sigma_{\text{ср}}^{(s)} g_{\text{ср}}^{s^5}/d\alpha \sim 1/\Delta^2$  и поскольку основной вклад дают  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$  (см. (9)), то  $\sigma_I \sim 1/\mu^2$ . Пусть  $\mu \sim m_2$ , тогда из (46) видно, что существенной областью является  $\alpha \sim \nu$ ,

$\nu - x \sim \nu$ . В случае же  $\mu \gg m_2$  из (46) следует (с учетом того, что  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$ ), что в существенной области  $\nu - x \gtrsim \frac{m_2^2}{\mu^2} \nu \ll \nu$ . Однако сама формула (46) получена в предположении  $\nu - x \sim \nu$ , в то же время используя (44) нетрудно убедиться, что при  $\nu - x \sim \mu^2 m_1^2 / \nu$  она неприменима, т.к. в этом случае

$$\alpha_{2-} = \frac{m_2^2 x}{2\nu} \Gamma_1, \quad \Gamma_1 = Z + \frac{\Delta^2}{m_2^2 x^2} \left[ \nu(\nu - x) + \frac{\Delta^2 m_1^2}{4} \right] \quad (49)$$

Детальный анализ показывает, что сечение (46) применимо при  $\nu - x \gg m_1 m_2$ ,  $\nu - x \gg \mu^2 m_1^2 / \nu$ , следовательно при

$$\frac{m_2^2 \nu}{\mu^2} \lesssim m_1 m_2, \quad \frac{m_2^2 \nu}{\mu^2} \lesssim \frac{\mu^2 m_1^2}{\nu}, \quad \text{т.е. } \mu^2 \gtrsim \frac{m_2 \nu}{m_1}$$

существенные значения  $x$  оказываются вне области применимости. Однако и в этом случае, используя выражение (46), можно получить полное сечение  $\sigma_T$ , правда уже не со степенной, а с логарифмической точностью, если интегрирование по  $x$  проводить до  $\nu - x \sim \frac{\mu^2 m_1^2}{\nu}$ .

В самом деле, из (49) следует, что в этом случае существенны значения  $\nu - x \gtrsim \mu^2 m_1^2 / \nu$ , причём при  $\nu - x \gg \mu^2 m_1^2 / \nu$  справедлива формула (46), а область  $\nu - x \sim \mu^2 m_1^2 / \nu$  не даёт логарифмических вкладов, поскольку в ней логарифм  $\ell_3$  не является "большим". В этом можно убедиться непосредственно:

$$\ell_3 \text{ возникает при интегрировании } \int d\Delta_1^2 / \Delta_1^2, \text{ но при } \nu - x \sim \mu^2 m_1^2 / \nu \text{ имеем } \Delta_{1-}^2 \sim \Delta_{1+}^2 \sim x_2.$$

Проводя с учётом сказанного выше интегрирование по  $x$  (можно в (46) заменить  $\Gamma \rightarrow \Gamma_1$  и интегрировать в пределах  $0 \leq x \leq \nu$ ) получим с однологарифмической точностью, при  $m_2 \leq \mu$ :

$$\begin{aligned}
 d\sigma_I = & \frac{\alpha^3}{\Delta^6} d\Delta^2 f^{(s_1)}(\Delta^2) \left\{ z_1^{(s_2)} \ln \frac{4V^2}{m_1^2 \mu^2} + \right. \\
 & + z_2^{(s_2)} \left[ \ln^2 \left( \frac{\Delta^2}{m_2^2} \right) - \ln^2 \left( 1 + \frac{m_1^2 \Delta^4}{4m_2^2 V^2} \right) \right] + \\
 & \left. + z_3^{(s_2)} \ln \left( \frac{\Delta^2}{m_2^2} \right) + z_4^{(s_2)} \ln \left( 1 + \frac{m_1^2 \Delta^4}{4m_2^2 V^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

(50)

где

$$\begin{aligned}
 z_1^{(1/2)} = & \left( -\frac{4}{3} \frac{\Delta^2}{m_2^2} + 2 \frac{\Delta^4}{m_2^4} - \frac{5}{3} \frac{\Delta^6}{m_2^6} \right) \ln \frac{\Delta^2}{m_2^2} + \left( -\frac{4\Delta^2}{\Delta^2 - 4m_2^2} + \frac{2\Delta^2}{m_2^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{16}{3} \frac{\Delta^4}{m_2^4} + \frac{5}{3} \frac{\Delta^6}{m_2^6} \right) \sqrt{\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - 4m_2^2}} 2 \ln \frac{\sqrt{\Delta^2 + \sqrt{\Delta^2 - 4m_2^2}}}{2m_2} + \\
 & + \frac{8\Delta^2}{\Delta^2 - 4m_2^2} + \frac{\Delta^2}{m_2^2} + \frac{10}{3} \frac{\Delta^4}{m_2^4} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_2^{(0)} = & \left( -\frac{4}{3} \frac{\Delta^2}{m_2^2} + \frac{\Delta^4}{2m_2^4} + \frac{\Delta^6}{3m_2^6} \right) \ln \frac{\Delta^2}{m_2^2} + \left( \frac{\Delta^4}{6m_2^4} - \frac{\Delta^6}{3m_2^6} + \right. \\
 & \left. + \frac{3\Delta^2}{m_2^2} \right) \sqrt{\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - 4m_2^2}} 2 \ln \frac{\sqrt{\Delta^2 + \sqrt{\Delta^2 - 4m_2^2}}}{2m_2} - 2 \frac{\Delta^2}{m_2^2} - \frac{2}{3} \frac{\Delta^4}{m_2^4} ;
 \end{aligned}$$

$$z_2^{(1/2)} = -\frac{2}{3} , \quad z_2^{(0)} = -\frac{1}{6} ; \quad z_3^{(1/2)} = -\frac{4}{3} \ln \frac{\Delta^2}{\mu^2} - 2 ,$$

$$z_3^{(0)} = -\frac{1}{3} \ln \frac{\Delta^2}{\mu^2} ; \quad z_4^{(1/2)} = 2, \quad z_4^{(0)} = 0 \quad (51)$$

причём при  $\Delta^2 \gg 4m_2^2$

$$z_2^{(1/2)} = \frac{4}{3} \ln \frac{\Delta^2}{m_2^2} + \frac{2}{9}, \quad z_2^{(0)} = \frac{1}{3} \ln \frac{\Delta^2}{m_2^2} + \frac{19}{18} \quad (52)$$

Так что существенной является область  $\Delta^2 \sim 4m_2^2$  и интегрировать по  $\Delta^2$  можно в пределах  $4m_2^2 \leq \Delta^2 < \infty$ .

Из (50, 51) следует, что  $\sigma_I$  является дваждылогарифмическим лишь при  $\mu \gg m_2$ . В этом случае с однологарифмической точностью имеем

$$\begin{aligned} \sigma_I = & \frac{2^4}{45\pi\mu^2} b_2^{(s_2, s_f)} \left[ \ln \frac{\mu^2}{m_2^2} \ln \frac{4\nu^2 m_2}{m_1^2 \mu^3} + \frac{1}{2} \ln^2 \left( 1 + \frac{m_1^2 \mu^4}{4m_2^2 \nu^2} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{15} b_2^{(s_2, s_f)} \ln \frac{4\nu^2}{m_1^2 \mu^2} + \\ & \left. + \frac{1}{15} b_3^{(s_2, s_f)} \left( \ln \left( 1 + \frac{m_1^2 \mu^4}{4m_2^2 \nu^2} \right) - \ln \frac{\mu^2}{m_2^2} \right) \right] \quad (53) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_2^{(1/2, 1/2)} = 4, \quad b_2^{(1/2, 0)} = \frac{1}{2}, \quad b_2^{(0, 1/2)} = 1, \quad b_2^{(0, 0)} = \frac{1}{8}; \\ b_2^{(1/2, 1/2)} = 41, \quad b_2^{(1/2, 0)} = \frac{97}{2}, \quad b_2^{(0, 1/2)} = 86, \quad b_2^{(0, 0)} = \frac{187}{2}; \end{aligned}$$

$$b_3^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \frac{199}{2}, \quad b_3^{(\frac{1}{2}, 0)} = \frac{229}{2}, \quad b_3^{(0, \frac{1}{2})} = 77, \quad b_3^{(0, 0)} = 92 \quad (54)$$

При  $m_2 = \mu$   $\sigma_{\underline{T}}$  является однологарифмическим

$$\sigma_{\underline{T}} = \frac{\alpha^4}{81\pi\mu^2} C(s_2, s_3) \ln \frac{2V}{m_1\mu} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} C^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} &= \frac{1}{2} (231\pi^2 - 2198) \\ C^{(\frac{1}{2}, 0)} &= \frac{1}{4} (4169 - 420\pi^2) \\ C^{(0, \frac{1}{2})} &= 611 - 60\pi^2 \\ C^{(0, 0)} &= \frac{1}{4} (425 - 42\pi^2) \end{aligned} \quad (56)$$

Обсудим угловое и энергетическое распределение частиц в существенной области вклада диаграммы I. Из (42) следует, что вклад дают значения  $\vartheta_2$  вблизи нижнего предела, т.е.  $|\vec{\Delta}_\perp| \lesssim \mu$ , и т.к.  $\Delta^2 \sim 4\mu^2$ , то  $|\vec{p}_{5\perp}| \lesssim \mu$ . Поскольку  $\Delta_1^2 \lesssim 4\mu^2$  то  $|\vec{p}_{3\perp}| \lesssim \mu$ , а значит и  $|\vec{p}_{4\perp}| \lesssim \mu$ , т.е. имеет место такая же ситуация, как и для вклада диаграммы III.

Из (46) следует, что угловое и энергетическое распределение частиц родившейся пары в системе  $\vec{p}_1 = 0$  имеет вид

$$d\omega d\vartheta^2 \frac{1}{\varepsilon_2^3 \left[ \vartheta^2 + \frac{m_2^2}{\varepsilon_2^2} + \frac{\Delta^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{\omega}{\varepsilon_2} + \frac{\Delta^2}{4\varepsilon_2^2} \right) \right]^2} \quad (57)$$

где  $\omega$ ,  $\vartheta$  - энергия и угол вылета пары как целого. В этой системе частица отдачи получает энергию  $\sim \mu^2/m_1$ , а энергетический спектр тормозной частицы есть

$$\frac{d\epsilon_4}{\epsilon_4 + \frac{m_2^2 \epsilon}{\mu^2} + \frac{\mu^2}{\epsilon}} \quad (58)$$

б. Сечения  $d\sigma_{II}/d\Delta^2$ ,  $\sigma_{II}$  получаются из (50) - (56) заменой  $m_1 \leftrightarrow m_2$ ,  $s_1 \leftrightarrow s_2$ . Вклады диаграмм I и II не интерферируют, поскольку угловые распределения конечных частиц практически не перекрываются. Поэтому интегральное сечение процесса электророждения при высоких энергиях есть

$$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \quad (59)$$

Эта формула остается справедливой, если начальные частицы являются тождественными, поскольку интерференция прямых и обменных диаграмм пренебрежимо мала, вклады прямых и обменных диаграмм одинаковы, а их сумму следует разделить на 2 вследствие тождественности частиц. В случае соударения частицы и античастицы к диаграммам рис. 1 следует добавить аннигиляционные, однако вклад последних при большой энергии является малым ( $\sim 1/\sqrt{s}$ ) вследствие большой величины передачи импульсов (более подробно см. /5/).

## Л и т е р а т у р а

1. V. E. Balakin, A. Bukin, E. Pachtusova et al. Phys. Lett. ( in print )
2. V. N. Baier, V. S. Fadin. Phys. Lett. ( in print )
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Sov. Phys. 6, 244, 1934.
4. В. Н. Байер, В. А. Хозе. ЖЭТФ, 48, 946, 1965.
5. В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе. ЖЭТФ, 50, 156, 1966.
6. С. Р. Кельнер. ЯФ, 5, 1092, 1967.
7. С. Р. Кельнер. Диссертация, 1967.
8. J. Motz, H. Olsen, H. Koch. Rev. Mod. Phys. 41, 581, 1969
9. В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе. ЖЭТФ, 51, 1135, 1966.



(in print)

1. V. B. Belkin, A. Bukharin, P. B. ...

2. W. ...

3. N. D. ...

4. E. M. ...

5. E. H. ...

6. C. P. ...

7. C. P. ...

8. J. ...

9. B. H. ...

---

Ответственный за выпуск В.С.Фадин  
 Подписано к печати 4 февраля 1971 г.  
 Усл. /3 печ.л., тираж 250 экз.  
 Заказ № /7 , бесплатно. ПРЕПРИНТ

---

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР, нв.