ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 40 - 72

Б.Г.Конопельченко

ГРУППА $SO(2,4)+R$ И ТАБЛИЦА МЕНДЕЛЕЕВА

Новосибирск

1972

Б.Г.Конопельченко

ГРУППА $SO(2,4)+R$ И ТАБЛИЦА МЕНДЕЛЕЕВА

АННОТАЦИЯ

Показано, что сетка химических элементов таблицы Менделеева содержится в одном неприводимом бесконечномерном унитарном представлении группы $SO(2,4)$, дополненной дискретным оператором R.

Как показано в работе /1/ классификация химических элементов в таблице Менделеева может быть получена из групповых соображений путем привлечения группы $SO(4)$ (группы Фока), точнее её глобальной универсальной накрывающей - группы $Spin(4)$, введенной Брауэром и Вейлем /2/. Для построения таблицы Менделеева используются специальные представления группы $SO(4)$, а именно представления $\mathcal{D}_{SO(4)}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ $(n = 1,2,3,...)$ (рассмотренные в связи с атомом водорода в /3/). Переход от группы $SO(4)$ к группе $Spin(4)$ приводит к требуемому опытом удвоению числа мест в сетке Менделеева.

Мы покажем, что закономерности таблицы Менделеева можно получить, рассматривая группу $SO(2,4)$, дополненную дискретным оператором R, перестановочные соотношения которого с генераторами непрерывных преобразований L_{AB} (A,B=0,1,2,3,5,6) имеют вид /4/

$$I_R L_{A6} I_R = -L_{A6}, \quad I_R L_{AB} I_R = L_{AB} \quad (A,B=0,1,2,3,5) \tag{1}$$

Для наших целей удобно перейти от группы $SO(2,4)$ к локально-изоморфной ей группе $SU(2,2)$. Используя связь между L_{AB} и генераторами A^α_β (α,β =1,2,3,4) группы $SU(2,2)$, а также формулу (1) получаем перестановочные соотношения оператора R с генераторами A^α_β.

$$I_R A^1_1 I_R = -A^2_2, \; I_R A^2_2 I_R = -A^1_1, \; I_R A^3_3 I_R = -A^4_4, \; I_R A^4_4 I_R = -A^3_3 \tag{2}$$

$$I_R A^2_1 I_R = A^2_1, \; I_R A^1_2 I_R = A^1_2, \; I_R A^3_4 I_R = A^3_4, \; I_R A^4_3 I_R = A^4_3$$

(здесь выписаны только те соотношения, которые потребуются в дальнейшем).

Построим представления группы $SU(2,2)$, дополненной оператором R ($SU(2,2)+R$).

Следуя фундаментальной работе Яо /5/ выберем максимально компактную подгруппу $SU_I(2) \oplus SU_{II}(2) \oplus U(1)$ группы $SU(2,2)$ следующим образом:

$$SU_I(2): \; J_1 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^1),\; J_2 = \frac{1}{2i}(A_1^2 - A_2^1),\; J_3 = \frac{1}{2}(A_1^1 - A_2^2),$$

$$SU_{II}(2): \; K_1 = \frac{1}{2}(A_3^4 + A_4^3),\; K_2 = \frac{1}{2i}(A_3^4 - A_4^3),\; K_3 = \frac{1}{2}(A_3^3 - A_4^4), \tag{3}$$

$$U(1): \; \Lambda = \frac{1}{2}(A_1^1 + A_2^2 - A_3^3 - A_4^4)$$

Базис представления максимально компактной подгруппы задается пятью числами $j, \mu; \kappa, \nu; \lambda$, которые определяются следующими соотношениями:

$$(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)\,|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle = j(j+1)\,|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle$$

$$J_3\,|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle = \mu\,|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle$$

$$(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)\,|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle = \kappa(\kappa+1)\,|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle \tag{4}$$

$$K_3\,|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle = \nu\,|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle$$

$$\Lambda\,|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle = \lambda\,|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle$$

Согласно /5/ вырожденные представления группы $SU(2,2)$ задаются тремя операторами Казимира C_2, C_3, C_4 и набором чисел $j,\mu;\kappa,\nu;\lambda$, нумерующих базис.

Рассмотрим неприводимые вырожденные унитарные бесконечномерные представления E_0^+ и E_0^- группы $SU(2,2)$.
Для представления E_0^+

$$C_2 = -3, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = -\frac{3}{4}$$

и величины j, κ, λ нумерующие базиспредставления пробегают значения

$$j = \kappa = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots \qquad \lambda = 1, 2, 3, \dots \tag{5}$$

Для представления E_0^-

$$C_2 = -3, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = -\frac{3}{4} \tag{6}$$

и $\quad j = \kappa = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots, \quad \lambda = -1, -2, -3, \dots$

Из формул (2)-(4) следует, что при R преобразовании $|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda\rangle \to |j,\mu;\kappa,\nu;-\lambda\rangle$. Таким образом, R -преобразование переводит базис представления E_0^+ в базис представления E_0^- и наоборот. Следовательно, неприводимым представлением группы $SU(2,2) + R\,(\sim SO(2,4) + R)$ является прямая сумма представлений $E_0^+ \oplus E_0^-$.

Используя формулы (3)-(6) и перестановочные соотношения $[A_\beta^\alpha, A_\delta^\gamma] = \delta_\delta^\alpha A_\beta^\gamma - \delta_\beta^\gamma A_\delta^\alpha$ можно показать, что представления $E_0^\pm$ при редукции по группе $SO(4) \sim SU_I(2) \otimes SU_{II}(2)$ разлагаются в прямую сумму представлений группы $SO(4)$:

$$\mathcal{D}(E_0^\pm) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus\, \mathcal{D}_{SO(4)}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$

Очевидно, что при редукции представления $\mathcal{D}(E_0^+ \oplus E_0^-)$ число представлений группы $SO(4)$ удваивается

$$\mathcal{D}(E_0^+ \oplus E_0^-) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \oplus\, \mathcal{D}_{SO(4)}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$

Представление $\mathcal{D}_{SO(4)}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ группы $SO(4)$ при редукции по группе $SO(3)$ разлагается в прямую сумму

$$\mathcal{D}_{SO(4)}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) = \sum_{e=0}^{n-1} \oplus\, \mathcal{D}_{SO(3)}(e)$$

При редукции же представлений группы $SO(3)$ по группе $SO(2)$ имеем

$$\mathcal{D}_{SO(3)}(\ell)=\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\oplus\,\mathcal{D}_{SO(2)}(m).$$

В результате получаем

$$\mathcal{D}(E_0^+\oplus E_0^-)=2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\left[\sum_{\ell=0}^{n-1}\oplus\left(\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\oplus\,\mathcal{D}_{SO(2)}(m)\right)\right]\right\}. \qquad (7)$$

Редукция представления $E_0^+\oplus E_0^-$ по группе $SO(2)$, описываемая формулой (7) (где каждому представлению $\mathcal{D}_{SO(2)}(m)$ сопоставляется состояние химического элемента) даёт сетку Менделеева, полученную в /1/ с привлечением группы $Spin(4)$.

Таким образом, вся сетка химических элементов таблицы Менделеева содержится в одном неприводимом бесконечномерном унитарном представлении группы $SO(2,4)+R$.

Автор выражает благодарность Ю.Б.Румеру за полезные обсуждения.

Литература

1. Ю.Б.Румер, А.И.Фет. ТМФ, 9, 203 (1971).

2. R. Brauer, H. Weyl, J. Math., 57, 425(1935)

3. А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А.М.Переломов. Рассеяние реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. "Наука", М., 1971.

4. Б.Г.Конопельченко. ТМФ, 5, 366 (1970).

5. Tsu Yao, J. Math. Phys., 8, 1931, (1967), 9, 1615, (1968).