ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 70 - 72

Я.С.Дербенёв

КОЛЛЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОМПЕНСИРОВАННЫХ ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ

Новосибирск

1972

Я.С.Дербенев

КОЛЛЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОМПЕНСИРОВАННЫХ ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ

(Доклад, представленный на III Всесоюзное совещание по ускорителям, Москва, 1972 г.)

АННОТАЦИЯ

Показано, что равновесное состояние системы четырех пучков, с компенсированным взаимодействием в месте встречи, неустойчиво относительно малых мультипольных (в общем случае) возбуждений, нарушающих компенсацию. Неустойчивость имеет динамический резонансный характер и приводит к расслоению пучков, при котором компенсация практически отсутствует. Оценки показывают, что это явление не позволяет получить значительного выигрыша светимости в установках с четырьмя пучками, по сравнению с обычными накопителями.

THE COLLECTIVE INSTABILITY OF THE COMPENSATED COLLIDING BEAMS

Ya.S.Derbenyev

Abstract

It is shown that equilibrium state of the four beam sistem with the compensated interaction at the place of collision is unstable relatively to small multypole (in general case) excitations that break the compensation. Instability has a dynamical resonance charac ter and leads to beam splitting where there is practically no compensation. Estimates show that this phenomenon does not allow to get the considerable luminosity gain in installations with four beams in comparison with conventional storage rings.

Известно, что светимость установок со встречными пучками ограничивается эффектами взаимодействия пучков. Наиболее сильные ограничения, при периодически повторяющейся лобовой встрече коротких сгустков, связаны с резонансами в бетатронном движении частиц, возникающими из-за существенно нелинейного поведения поперечных полей пучков.

С целью компенсации коллективных полей в области встречи, был предложен проект, в котором осуществляется одновременная встреча не двух, а четырех сгустков, так, чтобы поток частиц в каждом направлении был нейтральным / 1 /. При условии, что сопутствующие сгустки (с противоположными знаками зарядов частиц) имеют в месте встречи одинаковые плотности распределения частиц, коллективное взаимодействие полностью компенсируется.

Такое состояние, однако, может реализоваться лишь в том случае, если оно будет устойчиво относительно коллективных возбуждений, при которых компенсация оказывается нарушенной. Устойчивость можно исследовать традиционными методами линейной теории коллективных колебаний.

Пусть $F_{st}(\vec{p},\vec{r},t) = F_{st}(\vec{p},\vec{r},t+T)$ – плотность стационарного распределения частиц в фазовом пространстве, описывающая невозбужденное состояние пучков ($T = 2\pi/\omega_0$ – период обращения), в котором встречное взаимодействие точно компенсировано. Перейдем от переменных $\vec{p}$, $\vec{r}$ к каноническим переменным действий $I_\alpha(\vec{p},\vec{r},t) = I_\alpha(\vec{p},\vec{r},t+T)$ и фаз $\phi_\alpha(\vec{p},\vec{r},t) = \phi_\alpha(\vec{p},\vec{r},t+T) - 2\pi\nu_\alpha$, описывающим колебания частиц около равновесной траектории. В стационарном состоянии $\dot{I}_\alpha = 0$, $\dot{\phi}_\alpha = \nu_\alpha\omega_0$, а гамильтониан $\mathcal{H} = [(\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A})^2 + m^2]^{1/2} + eA^0$ и функция распределения не зависят от фаз: $\mathcal{H}_{st} = \mathcal{H}(I)$, $F_{st} = F(I)$.

В возбужденном состоянии

$$F = F(I) + \tilde{F}(I,\phi,t)$$

$$\mathcal{H} \approx \mathcal{H}(I) + e(\tilde{A}^0 - \frac{\vec{v}}{c}\tilde{\vec{A}}) \equiv \mathcal{H}(I) - \tilde{\mathcal{L}}(I,\phi,t)$$

где $\tilde{\mathcal{L}}$ – лагранжиан взаимодействия частицы с полями, возбуждаемыми коллективными колебаниями частиц. Малые отклонения от стационарного состояния удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \tilde F}{\partial t} + \omega_0 \nu_\alpha \frac{\partial \tilde F}{\partial \phi_\alpha} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi_\alpha}\frac{\partial F}{\partial I^\alpha} \qquad (1)$$

Явная зависимость от времени в этом уравнении имеет период T; поэтому общее решение его может быть разложено по собственным, обладающим свойством:

$$\tilde F(I,\phi,t) = \lambda \tilde F(I,\phi,t-T)\ ; \qquad (2)$$

если среди них окажутся решения $|\lambda| > 1$, то это будет означать неустойчивость стационарного состояния.

Исследуем устойчивость поперечных возбуждений пучков, пренебрегая продольными силами взаимодействия и синхротронными колебаниями частиц. Лагранжиан взаимодействия частицы 1 с полем короткого встречного сгустка частиц 2 можно представить в виде

$$\mathcal{L}_{12}(\vec r_1,t) = 2e_1e_2\delta_T(ct)\int d\Gamma_1' f_2(\vec p_1', \vec r_1', t)\ln|\vec r_1-\vec r_1'|$$

где $\delta_T(ct)$ – периодическая δ-функция, $\vec p_1$ и $\vec r_1$ – поперечные отклонения от равновесной орбиты, f_2 и $d\Gamma_1$ – функция распределения и элемент объема в фазовом пространстве $\vec p_1$, $\vec r_1$. Рассмотрим максимально простой вариант, приняв следующие предположения:

1) частоты бетатронных колебаний частиц всех четырех пучков одинаковы, а фокусировка однородна.

2) замкнутые орбиты всех частиц в месте встречи совпадают с равновесной.

3) стационарные распределения четырех пучков $F(I)$ тождественны.

Основные результаты не изменяются существенным образом, если эти предположения не выполняются. Невозмущенные колебания частиц описываются уравнениями

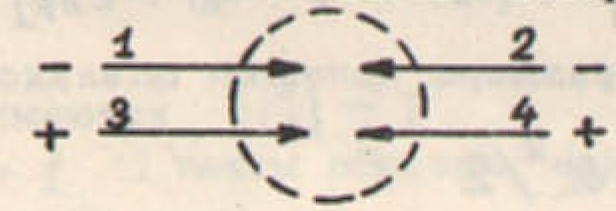
$$\vec r_1 = (x,z)\ ; \qquad x,z = a_{x,z}\cos\phi_{x,z} \qquad ;$$

$$I_{x,z} = p\nu_{x,z}a^2_{x,z}/2R = const$$

$$\dot\phi_{x,z} = \omega_0\nu_{x,z} = const$$

где p – импульс частицы,
$2\pi R$ – периметр орбиты.

Пусть $\tilde F(I,\phi)$ – столбец из 4-х функций распределения $\tilde f_1$, $\tilde f_2$, $\tilde f_3$, $\tilde f_4$ непосредственно перед очередным "соударением" (схема обозначений изображена на рисунке).



Сразу после встречи получим:

$$\tilde F \to \tilde F + \delta\tilde F = \tilde F - 2\frac{e^2}{c}\frac{\partial F}{\partial I^\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi_\alpha}\int d\Gamma_1'\Lambda\tilde F\ln|\vec r_1-\vec r_1'|$$

где Λ – матрица:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Распределение непосредственно после предыдущей встречи есть, очевидно $\tilde F(I,\phi+2\pi\nu)$. Нормальное решение, таким образом, должно удовлетворять уравнению:

$$\lambda\tilde F(I,\phi+2\pi\nu) - \tilde F(I,\phi) = -2\frac{e^2}{c}\frac{\partial F}{\partial I^\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi_\alpha}\int d\Gamma_1'\Lambda\tilde F(I',\phi')\ln|\vec r_1-\vec r_1'| \qquad (3)$$

Из структуры матрицы Λ следует, что

$$\tilde{f}_3 = -\tilde{f}_1 \; ; \qquad \tilde{f}_4 = -\tilde{f}_2 \; ;$$

для комбинаций $\tilde{f}_1 \pm \tilde{f}_2 \equiv f^{\pm}$ получаем уравнения

$$\lambda f^{\pm}(I, \phi + 2\pi\nu) = f^{\pm} \mp 4 \frac{e^2}{c} \frac{\partial F}{\partial I^{x}} \frac{\partial}{\partial \phi_x} \int d\Gamma_1' f^{\pm}(I', \phi') \ln |\vec{r}_1 - \vec{r}_1'| \tag{4}$$

Для дальнейшего конкретизируем $F(I)$:

$$F(I) = N\left[4\pi^2 \langle I_x \rangle \langle I_z \rangle \exp\left(I_x / \langle I_x \rangle + I_z / \langle I_z \rangle\right)\right]^{-1} ;$$

для упрощения поперечные размеры положим одинаковыми:

$$\langle x^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \varkappa^2 / 2$$

Применив к уравнению (4) последовательно преобразования

$$f \to \{f_m\}, \quad f = \sum_m f_m \exp(i m_x \phi_x + i m_z \phi_z)$$

$$\{f_m\} \to f_{\vec{k}} = \kappa^{-1} \sum_m \int d\Gamma_1 f_m J_{m_x}(k_x a_x) J_{m_z}(k_z a_z) = \kappa^{-1} \sigma_{\vec{k}}$$

($\sigma_{\vec{k}}$ – Фурье – образ плотности $\sigma(\vec{r}_1)$. J_m – функции Бесселя), можно получить интегральное уравнение:

$$f_{\vec{k}}^{\pm} = \pm 2i \sum_m \frac{m_x \delta_x + m_z \delta_z}{1 - \lambda \exp[2\pi i (m_x \nu_x + m_z \nu_z)]} \int g_m(\vec{k} | \vec{k}') f_{\vec{k}'}^{\pm} d^2 k' \tag{5}$$

где

$$g_m(\vec{k} | \vec{k}') = (k k')^{-1} I_{m_x}(|k_x k_x'|) I_{m_z}(|k_z k_z'|) \exp\left(-\frac{k^2 + k'^2}{2}\right)$$

$I_{m_{x,z}}$ – функция Бесселя мнимого аргумента, параметры $\delta_{x,z} = N r_e R / 2\pi \varkappa^2 \gamma \nu_{x,z}$ численно равны вычисленным по теории возмущений сдвигам частот, вносимым одиночным некомпенсированным пучком. Тот же смысл сохраняется за ними в случае жесткой фокусировки.

Положим $\delta_z \geq \delta_x$ и оценим λ в предельных случаях $\delta_z \gg 1$ и $\delta_z \ll 1$. При $\delta_z \gg 1$ среди решений (5) заведомо имеются $|\lambda| \gg 1$. Действительно, если предположить $|\lambda| \gg 1$, то можно написать

$$\lambda \approx \mp 2 \delta_z C$$

где C – собственные значения уравнения

$$C f_{\vec{k}} = i \sum_m (m_z + m_x \delta_x / \delta_z) e^{-2\pi i (m_x \nu_x + m_z \nu_z)} \int g_m(\vec{k} | \vec{k}') f_{\vec{k}'} d^2 k'$$

среди которых имеются $|C| \sim 1$
Область $\delta_z \gg 1$, таким образом, заведомо недостижима.
При $\delta_z \ll 1$ спектр будет близок к невозмущенному:
$\lambda^{(0)} = \exp[-2\pi i (m_x \nu_x + m_z \nu_z)]$. Ищем решение в виде $\lambda_m = \lambda^{(0)} \exp(-2\pi i \Delta)$, $|\Delta| \ll 1$. Если отвлечься от возможности резонансов $m_x \nu_x + m_z \nu_z \simeq n$, то собственные решения (5) распадаются по отдельным гармоникам f_m ; тогда

$$\Delta = \Delta_m^{(1)} \equiv \pm (m_x \delta_x + m_z \delta_z) C_m / \pi \tag{6}$$

где C_m – собственные значения уравнения

$$C_m f_{\vec{k}} = \int g_m(\vec{k} | \vec{k}') f_{\vec{k}'} d^2 k' \tag{7}$$

которые все положительны в силу симметричности и положительности ядра $g_m(\vec{k} | \vec{k}')$. Вдали от резонансов, таким образом, взаимодействие коллективных возбуждений пучков приводит лишь к поправкам частот.

Пусть теперь для какой-либо комбинации (m_x , m_z , n) $m_x \nu_x + m_z \nu_z - n = \varepsilon \sim \Delta_m^{(1)}$. Тогда, учитывая в сумме по $m_{x,z}$ в (5) также член ($-m_x$, $-m_z$), получаем

$$\Delta = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon \Delta_m^{(1)}} \quad ; \tag{8}$$

при $|\varepsilon| < 2|\Delta_m^{(1)}|$ имеем неустойчивость с инкрементом

$$\tau_m^{-1} \approx \omega_0 \left| \frac{2}{\pi}(m_x \nu_x + m_z \nu_z - n)(m_x \delta_x + m_z \delta_z) C_m \right|^{1/2} = \sqrt{2|\varepsilon \Delta_m^{(1)}|}\, \omega_0$$

Из двух мод $f_m^{\pm}$ неустойчивой вблизи резонанса оказыва - ется та, для которой сдвиг $\Delta_m^{(1)}$ смотрит в сторону резонанса.

Существенно отметить, что ширины резонансов $|2\Delta_m^{(1)}|$, а вместе с ними и инкременты, медленно (не по экспоненте) убывают с ростом номеров возбуждений. Для суммы собственных значений уравнения (7) находим:

$$\sum_i C_m^i = \int g_m(\vec{k}|\vec{k})\, d^2 k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\ln (m_x/m_z)^2}{m_x^2 - m_z^2} \, ; \quad |m_{x,z}| \gg 1$$

Следует ожидать, что $(C_m)_{max}$ убывает также по степенному закону.

При наличии неустойчивостей пучки будут релаксировать к таким устойчивым состояниям, в которых возбуждены когерентные колебания относительно равновесной орбиты. Приведем пример устойчивого состояния, когда сгустки движутся по орбитам, замыкающимся через 2 оборота (орбит с периодичностью в один оборот при совпадающих частотах колебаний не существует). При этом в месте встречи:

$$x_{1,2,3,4} = 0$$

$$z_3 = -z_1 \qquad (z_1 \pm z_2)^2 = 4\pi \varkappa^2 \delta_z \begin{cases} \dfrac{1 \pm \cos 2\pi\nu_z}{\sin 2\pi\nu_z}, & \operatorname{tg}\pi\nu_z > 0 \\[2ex] \dfrac{-1 \pm \cos 2\pi\nu_z}{\sin 2\pi\nu_z}, & \operatorname{tg}\pi\nu_z < 0 \end{cases}$$

$$z_4 = -z_2$$

Формулы имеют смысл при $(z_1 \pm z_2)^2 > \varkappa^2$.

Практически устойчивое состояние с компенсированным взаимодействием может быть реализовано лишь в области $\delta_{x,z} \ll 1$, где от резонансов низких мультипольностей можно уходить, подбирая рабочие частоты ; резонансы достаточно высоких порядков будут подавляться разбросом частот и радиационным трением. Предельная светимость по порядку величины, по-видимому, не может значительно отличаться от достижимой в накопителях с двумя пучками.

R E F E R E N C E S

I. The Orsay Storage Ring Group, VIIIth. INTERNATIONAL CONFERENCE ON HIGH ENERGY ACCELERATORS, CERN, Geneva, 1971.