И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

И Я Ф 19 - 72

А.А.Бехтенев, В.М.Панасюк

РАСЧЁТ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КАТУШЕК

Новосибирск

1972

А.А.Бехтенев, В.М.Панасюк

РАСЧЁТ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КАТУШЕК

АННОТАЦИЯ

Описан метод расчёта на ЭВМ аксиально-симметричного магнитного поля круговых цилиндрических катушек, по осевому сечению которых проходит ток плотности $j_p(r')$ зависящий от радиуса. При составлении программы использованы выражения для компонент поля H_r, H_z бесконечно тонкой цилиндрической катушки с $j = const$. Это позволило значительно сократить время машинного счёта и сделать его приемлемым для практического расчёта конфигурации магнитного поля катушек с произвольным профилем обмотки.

Рассмотрены вопросы экономичности и механической прочности соленоидов, которые весьма существенны в случае сильных магнитных полей.

1. Магнитное поле цилиндрической катушки

Расчётная плотность тока

При расчёте магнитного поля многослойной цилиндрической катушки её обмотка условно заменяется однородным телом, по сечению которого проходит ток плотности j_p . Расчётная плотность тока определяется суммарной площадью S_Σ , учитывающей сечение шины и приходящиеся на одну шину сечения изоляции, отверстий охлаждения, креплений, пустот

$$j_p = \frac{I}{S_\Sigma} ,$$

где I – ток шины.

Компоненты магнитного поля H_r, H_z цилиндрической катушки

Чтобы найти конфигурацию магнитного поля (ход силовых линий) аксиально-симметричной цилиндрической катушки необходимо с высокой степенью точности знать компоненты магнитного поля H_r, H_z.

Для определения H_r и H_z проводилось численное интегрирование по r' (рис.1) в пределах от 1 до R выражений для компонент поля бесконечно тонкой катушки конечной длины с плотностью тока $j_p(r')$. Выражения для компонент имеют вид /1, 2/

$$dH_r(r,z,r') = 0{,}4 R_0 j_0\, dr' j_p(r')\, r' \frac{2D(x) - K(x)}{[(r+r')^2 + (z'-z)^2]^{1/2}} \Bigg|_{z_1'}^{z_2'} ; \quad (1)$$

$$dH_z(r,z,r') = 0{,}2 R_0 j_0\, dr' j_p(r') \Bigg[\frac{(z'-z)K(x)}{[(r+r')^2 + (z'-z)^2]^{1/2}} + \quad (2)$$

$$+ K(x)E(\varphi,x') + K(\varphi,x')\big(E(x) - K(x)\big) \Bigg] \Bigg|_{z_1'}^{z_2'} ,$$

где $K(x)$, $E(x)$, $D(x)$ – полные и $K(\varphi,x')$, $E(\varphi,x')$ –

– неполные эллиптические интегралы (см.приложение),

$$x = \frac{4rr'}{(r+r')^2+(z'-z)^2}, \quad x' = 1-x,$$

$$\varphi = \arcsin\frac{(z'-z)\,\mathrm{sign}(r'-z)}{[(r'-r)^2+(z'-z)^2]^{1/2}}, \quad [H]=э,\ [j_0]=а/см^2,\ [R_0]=см.$$

Координаты (r , z) выражены в единицах внутреннего радиуса катушки R_0; j_0 – плотность тока на радиусе R_0, $j_p(1)=1$.

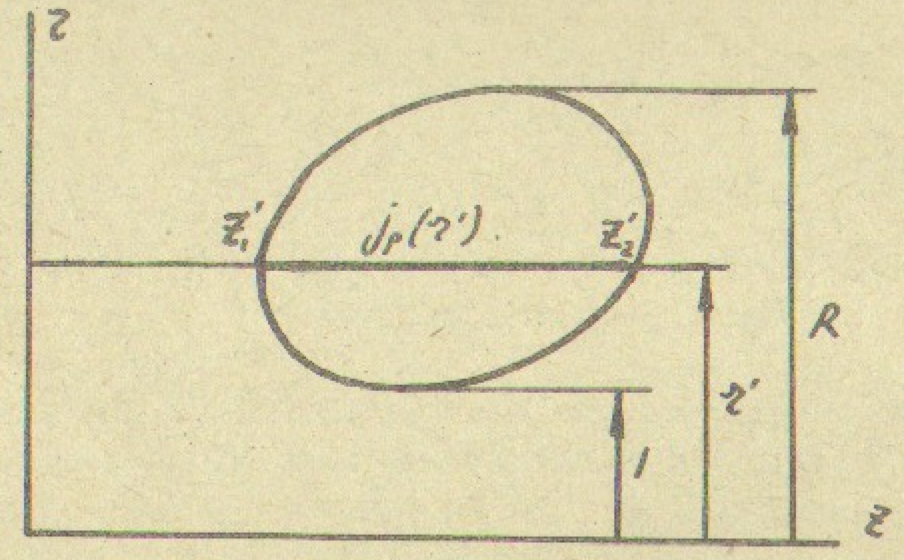

Рис.1.

Приведенная выше схема определения компонент H_r, H_z в сравнении с методом двойного интегрирования по r', z' выражений для кольца с током даёт выигрыш во времени машинного счёта в 20 – 30 раз при точности счёта $10^{-5} - 10^{-6}$.

II. Оптимальное распределение плотности тока $j_p(r')$ по радиусу

Требование к экономичности установки определяет выбор геометрических размеров соленоида и функции плотности тока $j_p(r')$, обеспечивающих максимальную напряженность магнитного поля в заданной точке при постоянстве потребляемой мощности W.

Рассмотрим цилиндрическую катушку прямоугольного сечения с током $j_p(r')$, независящим от z'.

Согласно изопериметрической теореме /3/ H_z как функционал

от $j_p(r')$ имеет условный экстремум в точке (r , z) при дополнительном условии постоянства потребляемой мощности W, если $j_p(r')$ является экстремалью интеграла $H_z + \mu W$, т.е.

$$\delta(H_z+\mu W) = 0, \qquad (3)$$

где $H_z(r,z) = \int_1^R dH_z$

$$W = 2\pi\rho j_0^2 R_0^3 (z_2'-z_1')\int_1^R j_p^2(r')\, r'dr' \equiv const, \qquad (4)$$

ρ – удельное сопротивление,

μ – множитель Лагранжа.

Используя (2) и (4) из (3) получаем выражение для оптимальной функциональной зависимости тока $j_{опт}(r')$, обеспечивающее максимальное значение поля H_z в заданной точке (r , z).

$$j_{опт}(r') \sim \frac{1}{r'}\left\{\frac{(z'-z)K(x)}{[(r+r')^2+(z'-z)^2]^{1/2}} + K(x)E(\varphi,x') + K(\varphi,x')\big(E(x)-K(x)\big)\right\}\Bigg|_{z_1'}^{z_2'}. \qquad (5)$$

Для катушек с длиной $\ell = z_2'-z_1' \gg 1$ оптимальные профили плотности тока для различных точек центральной плоскости $\left(z = \frac{z_2'+z_1'}{2}\right)$ весьма мало отличаются друг от друга.

Наибольший интерес при проектировании представляет значение поля H_0 в центре катушки. Напряженность магнитного поля соленоида можно связать с потребляемой им мощностью соотношением:

$$H_0 = g\left(\frac{W}{\rho R_0}\right)^{1/2},$$

где H_0 – в э, W – в вт, ρ – в ом·см, R_0 – в см, g – формфактор, величина которого зависит от формы обмотки и распределения плотности тока в ней.

При конструировании соленоидов, создающих сильные (~100 кэ) магнитные поля в достаточно больших (~1 м³) объёмах, вес (объём) меди становится определяющим фактором в стоимости катушки.

На рис.2 (а, б) приведены зависимости формфактора g от длины l и объёма $V = R_0^3 \pi l (R^2-1)$ катушки для случаев: $а$ — $j = const$; $б$ — $j = j_{опт}(r')$.

К сожалению, требование простоты конструкции и оптимальности g противоречат друг другу.

Рассмотрим компромиссный вариант: цилиндрический соленоид прямоугольного сечения со ступенчатым распределением плотности тока, которое описывается величинами $\alpha = R_1/R$ и $\beta = j_1/j$, где R_1 — радиус, разделяющий внутренние слои с плотностью j и внешние с плотностью тока j_1.

На рис.3 сплошными линиями изображены максимальный формфактор g и соответствующие ему значения α, β, l в зависимости от V катушки со ступенчатым профилем тока. Для сравнения пунктиром показаны максимальные формфакторы для $j = const$ и $j = j_{опт}(r')$. Заметим, что при значениях формфактора в пределах от 0,16 до 0,179 выбор ступенчатого распределения тока позволяет существенно сократить расход меди по сравнению с $j = const$.

Ш. Механические напряжения, возникающие под действием пондеромоторных сил F_r, F_z.

Рассмотрим цилиндрический соленоид, представляющий собой монолит с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона σ.

В зависимости от конструктивного исполнения напряженное состояние соленоида вблизи центральной плоскости, где $F_r \gg F_z$ можно рассматривать как плоскую деформацию (см. /4/ § 7) или как плоское напряженное состояние (см. /4/ § 13).

При плоской деформации компоненты тензора деформации $U_{zz} = U_{zr} = U_{z\varphi} \equiv 0$, т.е. рассматривается часть соленоида удерживается при постоянной длине. В этом случае получаются следующие выражения для главных напряжений:

$$\sigma_{rr/\varphi\varphi} = \frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\left\{\frac{1}{1-2\sigma}\left[C_1 - \frac{1}{2}\int_1^r F_r dr\right] \mp \frac{1}{r^2}\left[C_2 + \frac{1}{2}\int_1^r F_r r^2 dr\right]\right\}; \quad (6)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma\left(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}\right),$$

где C_1 и C_2 — $const$, определяемые из граничных условий.

Плоское напряженное состояние характеризуется однородной вдоль z деформацией, при которой будучи равными нулю на границах компоненты тензора напряжений $\sigma_{zz}, \sigma_{zr}, \sigma_{z\varphi}$ приближенно равны нулю на всем протяжении малой толщины рассматриваемой части соленоида (вблизи центральной плоскости).

Путем формальной замены $\sigma \to \frac{\sigma}{1+\sigma}$ выражение (6) для $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{rr} переходит в формулу для $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{rr} в случае плоского напряженного состояния (обратный переход $\sigma \to \frac{\sigma}{1-\sigma}$ /4/).

Рассмотрим плоскую деформацию при следующих граничных условиях $\sigma_{rr}(1) = \sigma_{rr}(R) = 0$.

$$\sigma_{\varphi\varphi/rr} = \frac{1}{1-\sigma}\left\{C_1 - \frac{1}{2}\int_1^r F_r dr \pm \frac{1}{r^2}\left[C_1 + \frac{1}{2}(1-2\sigma)\int_1^r F_r r^2 dr\right]\right\}, \quad (7)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\,\frac{R^2\int_1^R F_r dr + (1-2\sigma)\int_1^R F_r r^2 dr}{R^2-1},$$

$\sigma_{\varphi\varphi}$ имеет наибольшее значение при $r = 1$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(1) = \frac{1}{1-\sigma}\,\frac{R^2\int_1^R F_r dr + (1-2\sigma)\int_1^R F_r r^2 dr}{R^2-1}$$

Для бесконечно длинного соленоида

$$\int_1^R F_r dr = \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad \int_1^R F_r r^2 dr = \frac{H_0^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi}\int_1^R H^2 r dr,$$

из чего видно, что для увеличения механической прочности следует выбирать быстро спадающее по радиусу распределение плотности тока, т.е. уменьшать магнитную энергию. Заметим, что оптимальное распределение тока, если нас интересует максимум H при заданной мощности в центральной плоскости, также является спадающим:

$$\frac{1}{r} \text{ при } l \gg 1, \quad \frac{1}{r^2} \text{ при } l \ll 1.$$

Значение $\sigma_{\varphi\varphi}(1)$ для соленоида с объёмным током $j(r)$, создающим поле H_0, лежит в интервале $\sigma_{\varphi\varphi}|_{I_1} \div \sigma_{\varphi\varphi}|_{I_R}$, где $\sigma_{\varphi\varphi}|_{I_1}$ $(\sigma_{\varphi\varphi}|_{I_R})$ – тангенциальное напряжение на радиусе 1 в случае, когда поле H_0 создаётся поверхностным током I_1 (I_R) на внутреннем (внешнем) радиусе, что соответствует толстостенной трубе, испытывающей давление $H_0^2/8\pi$ изнутри (снаружи). При $R = 2,5$ имеют место следующие соотношения:

$$\sigma_{\varphi\varphi}|_{I_1} : \sigma_{\varphi\varphi}|_{j\sim 1/2} : \sigma_{\varphi\varphi}|_{j=const} : \sigma_{\varphi\varphi}|_{I_R} = 1,16 : 1,66 : 1,69 : 2.$$

При $R \to \infty$

$$\sigma_{\varphi\varphi}|_{I_1} : \sigma_{\varphi\varphi}|_{j\sim 1/2} : \sigma_{\varphi\varphi}|_{j=const} : \sigma_{\varphi\varphi}|_{I_R} = 1 : 1,5 : 1,58 : 2.$$

Для оценки механических напряжений, по-видимому, разумно рассматривать соленоид как толстостенную трубу, испытывающую давление $H_0^2/8\pi$ снаружи.

На рис.4 приведены распределения механических напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} в случае плоской деформации: сплошными линиями – для напряжений в центральной плоскости соленоида прямоугольного сечения с $R = 2,5$ и $\ell = 2$ со ступенчатым распределением плотности тока $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,6$; пунктирными линиями – для напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ толстостенной трубы с $R = 2,5$ испытывающей давление $H^2/8\pi$ изнутри и снаружи (значение поля H взято в центральной плоскости катушки с $R = 2,5$, $\ell = 2$, $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,6$ на радиусе 1).

Авторы выражают благодарность В.И.Волосову за помощь в работе и ценные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Эллиптические интегралы $K(x)$, $E(x)$, $K(\varphi,x)$, $E(\varphi,x)$ имеют следующие представления в виде рядов (см./5/ стр.919-920).

$$K(x) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^2 + \ldots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 x^n + \ldots\right\}. \quad (\text{П.1})$$

$$E(x) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{2^2}x - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}x^2 - \ldots - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 \frac{x^n}{2n-1} - \ldots\right\}. \quad (\text{П.2})$$

$$K(\varphi,x) = \frac{2}{\pi}K(x)\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\left(a_0 + \frac{2}{3}a_1\sin^2\varphi + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}a_2\sin^4\varphi + \ldots\right), \quad (\text{П.3})$$

где $a_0 = \frac{2}{\pi}K(x) - 1$; $a_n = a_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 x^n$.

$$E(\varphi,x) = \frac{2}{\pi}E(x)\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\left(b_0 + \frac{2}{3}b_1\sin^2\varphi + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}b_2\sin^4\varphi + \ldots\right), \quad (\text{П.4})$$

где $b_0 = \frac{2}{\pi}E(x) - 1$; $b_n = b_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 \frac{x^n}{2n-1}$.

При составлении программы для улучшения сходимости рядов были использованы следующие рекурентные формулы (см./5/ стр.922)

$$K(\varphi_n, x_n) = (1 + x_{n+1}^{1/2})K(\varphi_{n+1}, x_{n+1}), \quad (\text{П.5})$$

$$E(\varphi_n, x_n) = \frac{1}{1+x_{n+1}^{1/2}}\left[2E(\varphi_{n+1}, x_{n+1}) - (1-x_{n+1})K(\varphi_{n+1}, x_{n+1})\right] +$$

$$+ \left(1+\sqrt{1-x_n}\right)\cos\varphi_n \sin\varphi_{n+1}, \qquad (\text{П.6})$$

где $x_{n+1} = \left[\dfrac{1-\sqrt{1-x_n}}{1+\sqrt{1-x_n}}\right]^2$; $\sin\varphi_{n+1} = \dfrac{1-\sqrt{1-x_n \sin^2\varphi_n}}{\left(1-\sqrt{1-x_n}\right)\sin\varphi_n}$.

Литература

1. Müller K.F. Arch. f. Elektrotech. 17, 347 (1926).
2. Карасик В.Р. Физика и техника сильных магнитных полей, Наука, 1964.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.1У, Физматгиз, 1958.
4. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М., Теория упругости, Наука, 1965.
5. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, Наука, 1971.

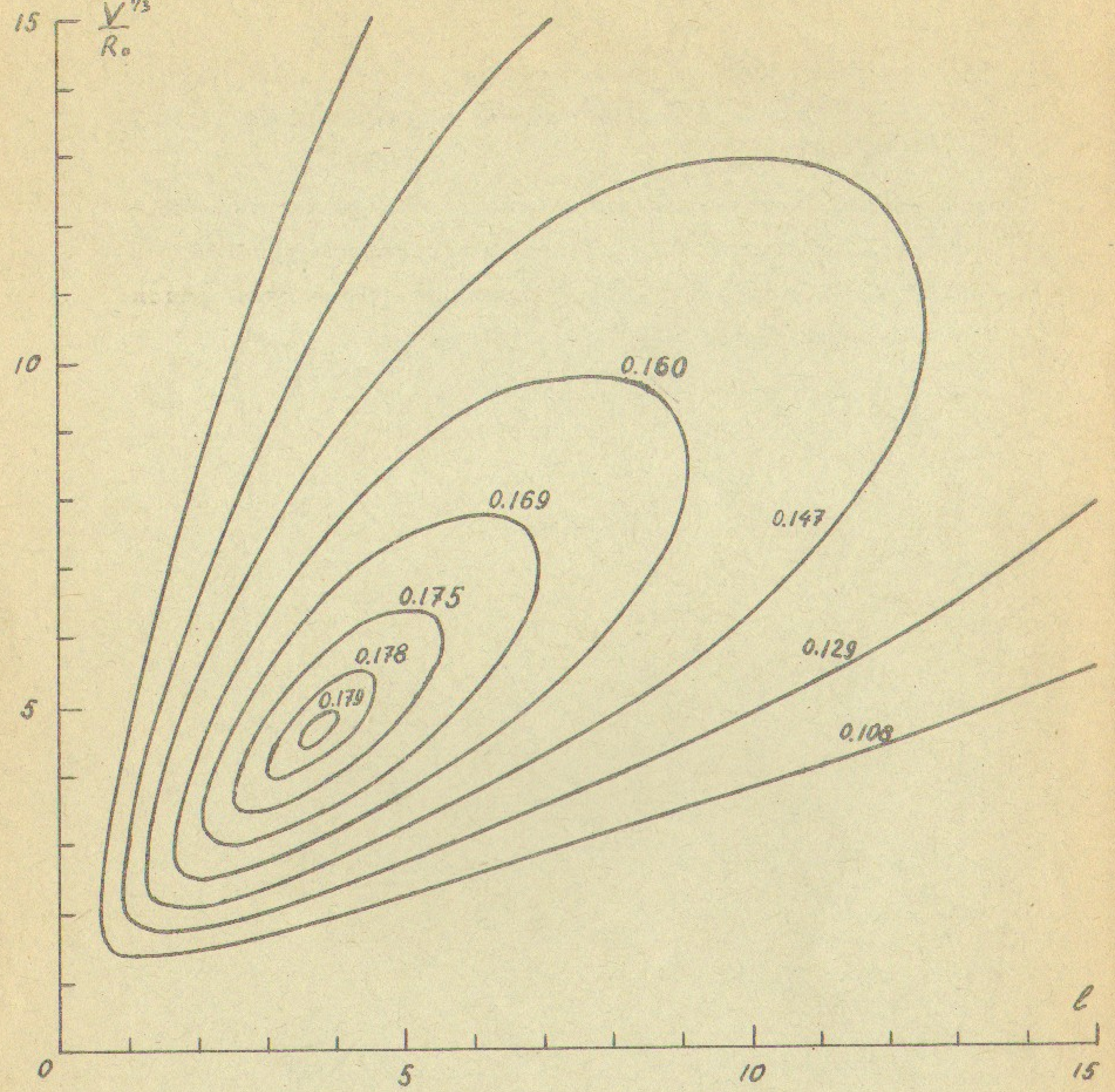

Рис.2а. Семейство кривых $g(\ell, V) = const$ для катушек прямоугольного сечения с постоянной плотностью тока. ℓ – длина и V – объём соленоида.

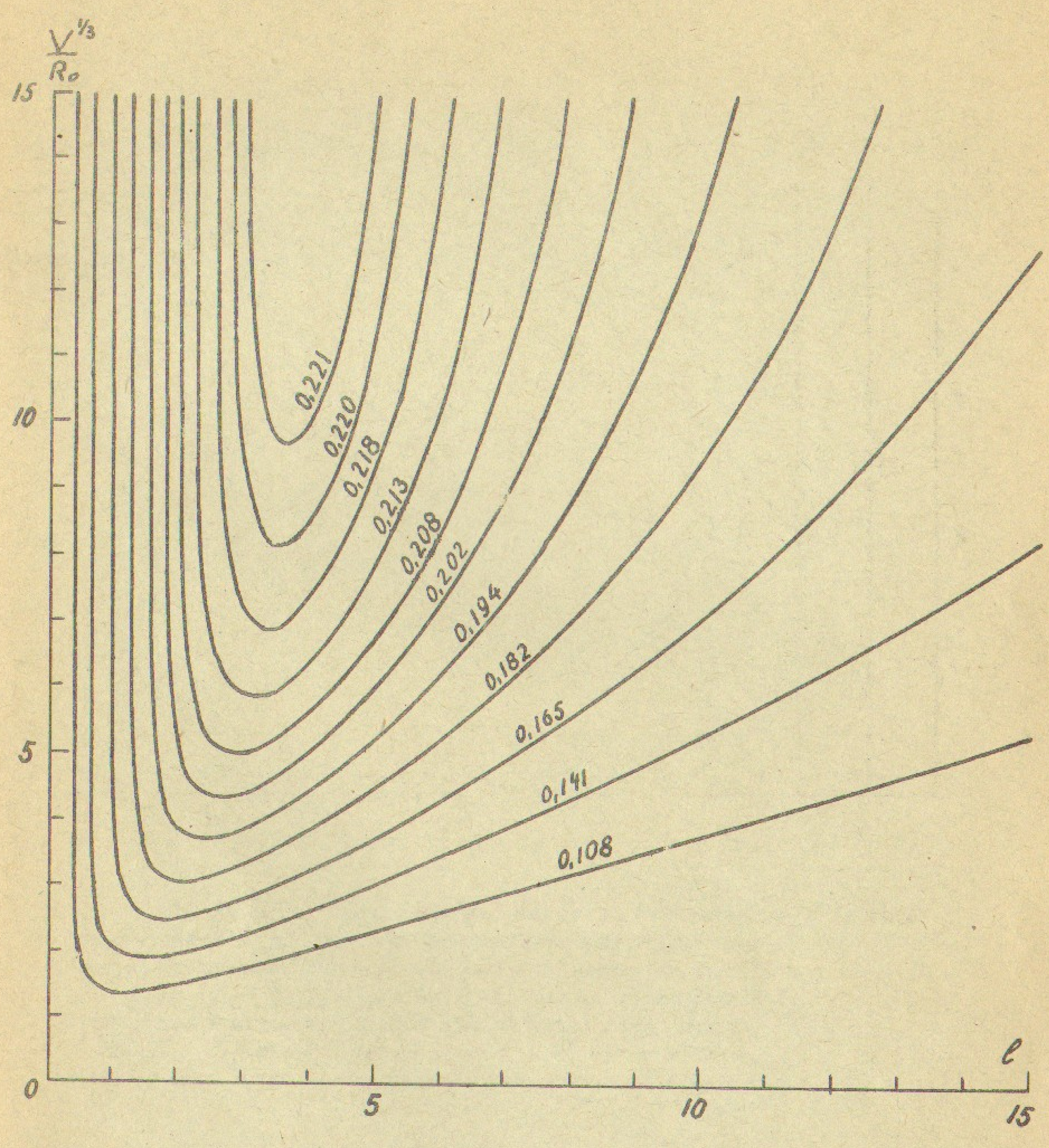

Рис.2б. Семейство кривых $g(\ell, V) = const$ для катушек прямоугольного сечения с $j = j_{опт}(r')$. ℓ = длина и V – объём соленоида.

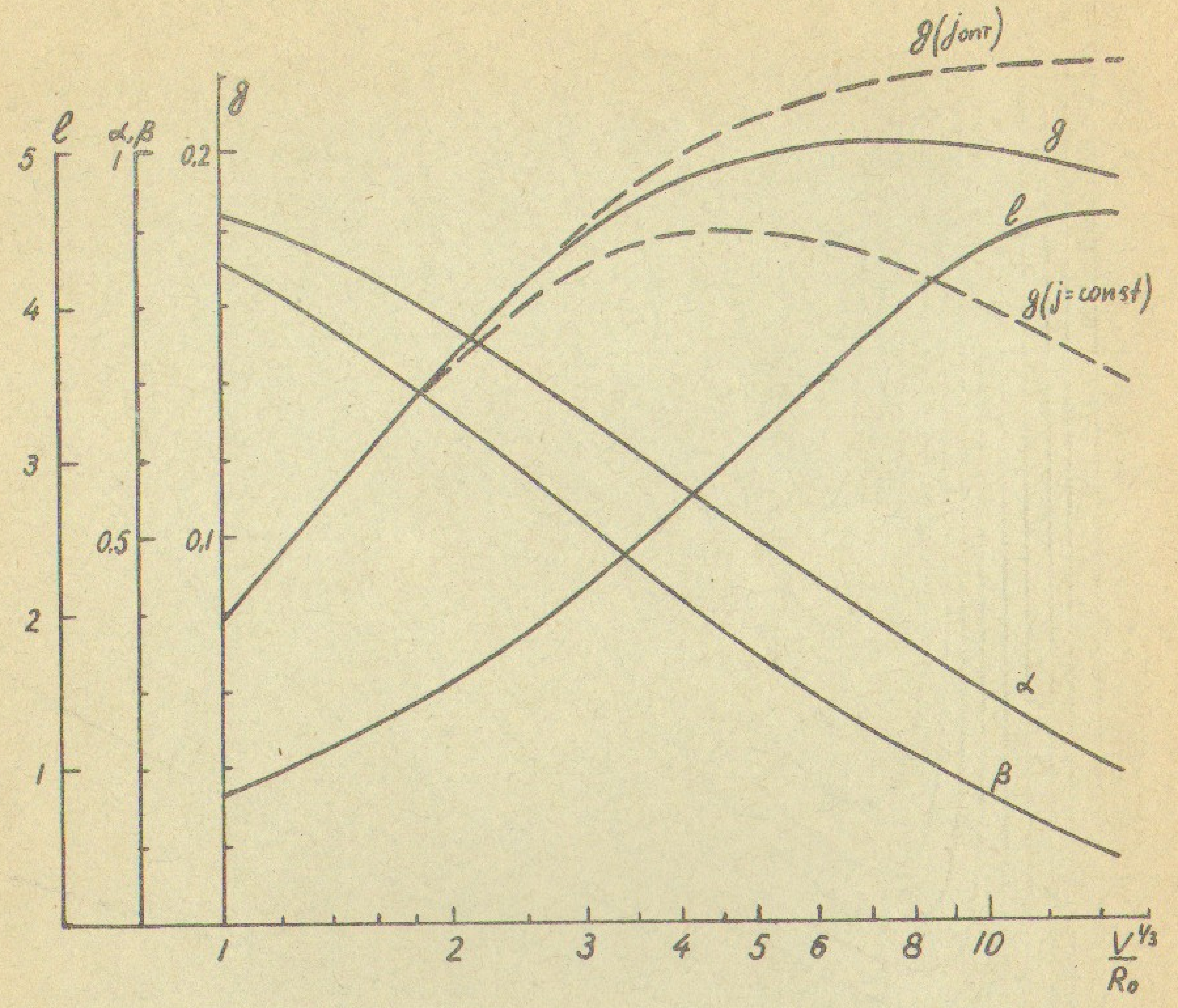

Рис.3. Максимальное значение формфактора $g(\alpha, \beta, \ell)$ и соответствующие ему значения α, β, ℓ в зависимости от объёма V соленоида прямоугольного сечения со ступен – чатым профилем плотности тока. $\alpha = R_1/R$, $\beta = j_1/j$, ℓ – длина катушки, R_1 – радиус, разделяющий внутренние слои с плотностью тока j и внешние с током j_1. Пункти – ром приведены зависимости максимального g для $j = const$ и $j = j_{опт}$ (7').

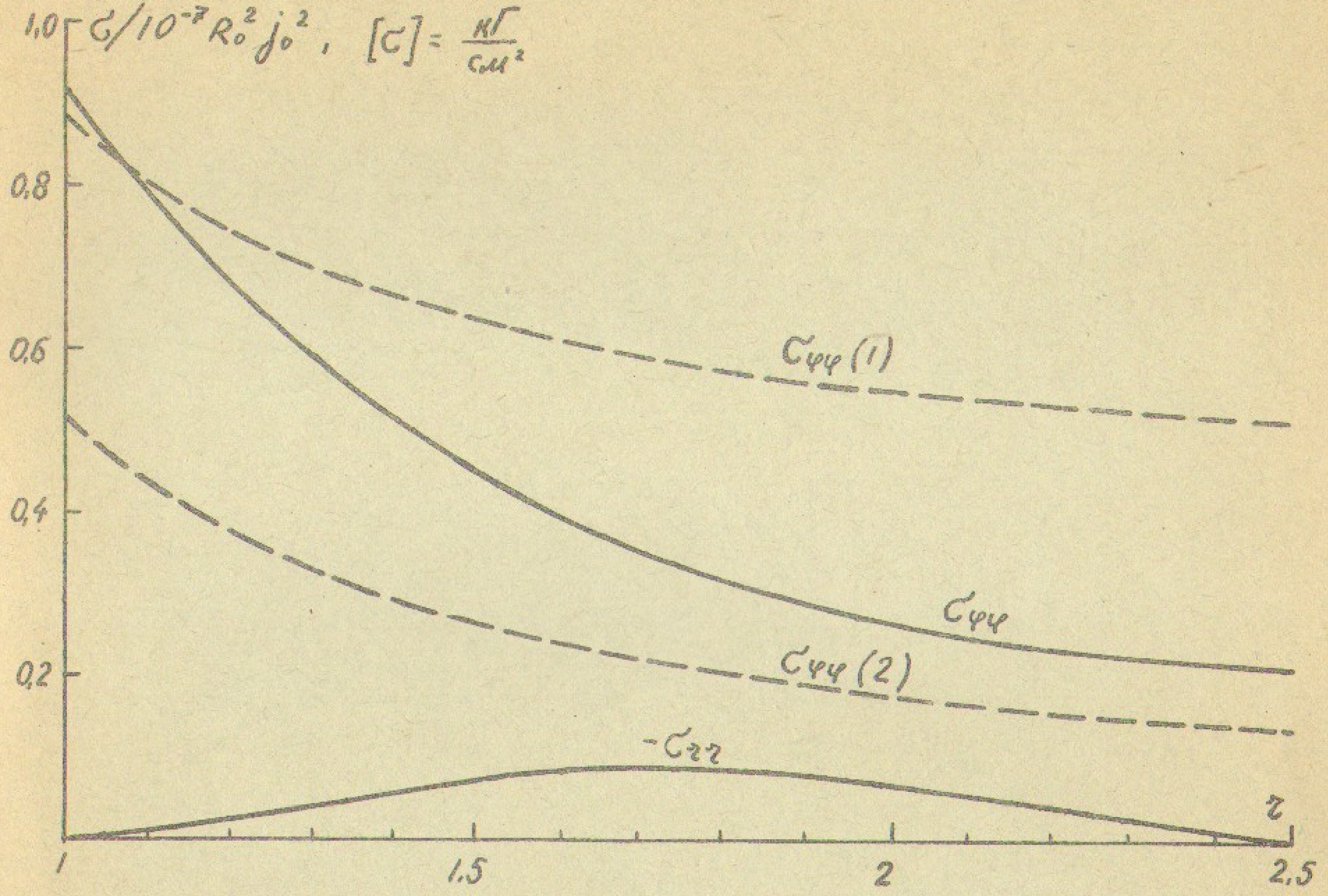

Рис.4. Зависимости механических напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} в случае плоской деформации.

——— для напряжений в центральной плоскости соленоида прямоугольного сечения с R = 2,5 и ℓ = 2 со ступенчатым распределением плотности тока α = 0,7 , β = 0,6.

– – – – для напряжений в толстостенной трубе с R = 2,5 испытывающей давление $H^2/8\pi$ изнутри(2), снаружи(1). Значание поля H взято в центральной плоскости катушки с R = 2,5 , ℓ = 2, α = 0,7, β = 0,6 на радиусе 1.

Ответственный за выпуск А.А.Бехтенев
Подписано к печати 24/III,72г. МН10213
Усл. 0,4 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № 18 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.