25

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 38 - 72

А.М.Шалагин

АПЕРТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНЫ С ГАЗОВОЙ СРЕДОЙ

Новосибирск

1972

А.М.Шалагин

АПЕРТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНЫ С ГАЗОВОЙ СРЕДОЙ

АННОТАЦИЯ

В работе анализируются распределение возбужденных атомов по скоростям и характеристики "провала" Лэмба в газе низкого давления при учете угловой раходимости световой волны. Показано, что пространственная неоднородность, вызванная угловой расходимостью волны, приводит к зависимости характеристик "провала" Лэмба от существенно иных параметров, чем в случае пространственной неоднородности, обусловленной лишь изменением амплитуды поля. Отмечается, однако, что в реальных системах апертурные эффекты проявляются весьма слабо и ими, за исключением специальных случаев, можно пренебречь. Обсуждается вопрос о сдвиге "провала" Лэмба относительно частоты атомного перехода.

1. Введение

При решении ряда лазерных задач необходимо учитывать изменение электромагнитного поля на длине свободного пробега активной частицы (малые давления, долгоживущие системы). Этот вопрос в общем виде был рассмотрен [redacted] в работах /1,2/, однако в конкретных расчетах волновой фронт световой волны считался плоским и учитывалось лишь изменение амплитуды поля. В то же время В.С.Лебоховым /3/ и авторами работы /4/ было указано, что изменение фазы поля, связанное с искривлением волнового фронта, может привести к существенно иным физическим эффектам, чем изменение амплитуды. В работах /3,4/, однако, проведено лишь качественное рассмотрение, недостаточное для анализа реальных систем и практического выбора их параметров. Поэтому в развитие работ /1,2/ ниже дается, по возможности, полный анализ роли искривления волнового фронта. Забегая вперед, отметим, что результаты наших расчетов существенно отличаются от некоторых качественных выводов /3,4/.

Будем исходить из следующих уравнений для элементов матрицы плотности /1/:

$$(\Gamma_j + \vec{v}\nabla)\rho_j = Q_j W(\vec{v}) \pm 2\,\mathrm{Re}\{iGg(\vec{r})\rho_{mn}\}; \quad j = m,n; \qquad (1.1)$$

$$(\Gamma - i\Omega + \vec{v}\nabla)\rho_{mn} = iGg^*(\vec{r})\,(\rho_m - \rho_n); \quad \Omega = \omega - \omega_{mn};$$

$$\rho_j = \rho_{jj}; \quad G = E d_{mn}/2\hbar; \quad \rho_{mn} = \rho e^{-i\Omega t}.$$

Здесь функция $g(\vec{r})$ задает пространственную конфигурацию внешнего поля, которое мы выбрали в виде монохроматической волны, с амплитудой E и частотой ω. Временная зависимость выделена в явном виде. d_{mn}, ω_{mn} –матричный элемент дипольного момента и частота перехода $m \to n$. Возбуждение будем считать максвелловским и однородным в пространстве.

Определим характерные параметры, входящие в задачу. Для этого достаточно ограничиться линейным (по G) приближением. При разложении $g^*(\vec{r})$ по плоским волнам поляризация, наведенная в атоме (точнее, недиагональный матричный элемент $\rho^{(1)}$), имеет вид

$$\rho^{(1)}(\vec{r},\vec{v}) = iGN\int d\vec{K}' \frac{e^{i\vec{K}'\vec{r}}\, g(\vec{K}')}{\Gamma - i(\Omega - \vec{K}'\vec{v})} W(\vec{v}) =$$

$$= iGN\int_0^\infty e^{-(\Gamma - i\Omega)\tau} g^*(\vec{r}-\vec{v}\tau)\, d\tau\, W(\vec{v}); \tag{1.2}$$

$$g(\vec{K}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\vec{K}'\vec{r}} g^*(\vec{r})\, d\vec{r}\ ; \quad N = Q_m/\Gamma_m - Q_n/\Gamma_n .$$

Для плоской бегущей волны $g(\vec{K}') = \delta(\vec{K}'-\vec{K})$. Если же амплитуда поля изменяется в пространстве или волновой фронт искривлен, то возникает спектр пространственных гармоник, и $g(\vec{K}')$ отлична от δ -функции. В этом пункте изменение амплитуды и фазы поля проявляются одинаково.

Выделим в $g(\vec{r})$ амплитудный и фазовый множитель

$$g(\vec{r}) = A(\vec{r})\, e^{i\varphi(\vec{r})};$$

$$\rho^{(1)}(\vec{r},\vec{v}) = iGNW(\vec{v})\int_0^\infty e^{-\Gamma\tau} A(\vec{r}-\vec{v}\tau)\, e^{i[\Omega\tau - \varphi(\vec{r}-\vec{v}\tau)]}\, d\tau. \tag{1.3}$$

Очевидно, что $\varphi(\vec{r}) = const$ -уравнение, определяющее волновой фронт, а $\nabla\varphi(\vec{r})$ суть локальный волновой вектор $\vec{K}$, перпендикулярный фронту (рис.1). Предположим, что фаза поля меняется значительно быстрей, чем амплитуда и множитель затухания. Тогда основной вклад в интеграл (1.3) дает обл сть вблизи точки $\vec{r}_m$, где

$$\Omega + \vec{v}\nabla\varphi\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_m} = 0\ , \tag{1.4}$$

т.е. там, где локальный допплеровский сдвиг и Ω компенсируют друг друга. Если $\Omega = 0$, то траектория частицы в этой точке касается волнового фронта. Разложим фазу в ряд в окрестности $\vec{r}_m$ и ограничимся квадратичным членом:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_m) - \vec{v}\nabla\varphi\Big|_{\vec{r}_m}(\tau-\tau_m) + \frac{v^2}{2}(\tau-\tau_m)^2\frac{d^2\varphi}{ds^2}\Big|_{\vec{r}_m}; \qquad (1.5)$$

$$\rho(\vec{r},\vec{v}) = iG\mathcal{N}W(\vec{v})\int\limits_0^\infty e^{-\Gamma\tau}A(\vec{r}-\vec{v}\tau)\exp\left\{i\left[\Omega - \frac{v^2}{2}(\tau-\tau_m)\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right](\tau-\tau_m)\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\{i[\vec{k}\vec{v}\tau - \varphi(\vec{r}_m)]\}d\tau; \quad \nabla\varphi\Big|_{\vec{r}_m} \equiv \vec{k}; \quad \vec{r}_m = \vec{r} - \vec{v}\tau_m;$$

$$ds = |\vec{v}|d\tau.$$

Величина $d^2\varphi/ds^2$ есть значение второй производной вдоль траектории частицы, вычисленное в точке $\vec{r}_m$. Отличие от нуля этой величины свидетельствует об искривлении волнового фронта. Действительно, из начал векторного анализа следует

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\nabla\varphi; \quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{1}{|\vec{v}|^2}\vec{v}\nabla(\vec{v}\nabla\varphi) = \qquad (1.6)$$

$$= \frac{1}{|\vec{v}|^2}\vec{v}\nabla(\vec{v}\vec{n}|\nabla\varphi|),$$

где $\vec{n}$ -единичный вектор нормали к волновому фронту. Для монохроматической волны $|\nabla\varphi| = |\vec{k}| = \omega/c = const$, поэтому

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{|\nabla\varphi|}{|\vec{v}|^2}\vec{v}\nabla(\vec{v}\vec{n}) = \frac{k}{|\vec{v}|^2}\vec{v}\left[\vec{\tau}\frac{\partial}{\partial s_\tau}(\vec{v}\vec{n}) + \vec{n}\frac{\partial}{\partial s_n}(\vec{v}\vec{n})\right] =$$

$$= \frac{k}{|\vec{v}|^2}\vec{v}\vec{\tau}\frac{\partial}{\partial s_\tau}(\vec{v}\vec{n}) = k\frac{v_\tau^2}{|\vec{v}|^2}\frac{1}{R};$$

$$R = \left|\frac{\partial\vec{n}}{\partial s_\tau}\right| = \left|\frac{\partial\vec{\tau}}{\partial s_\tau}\right|; \quad v_\tau = \vec{v}\vec{\tau}. \qquad (1.7)$$

Здесь $\vec{\tau}$ — единичный вектор вдоль касательной к волновому фронту, а R имеет смысл радиуса кривизны волнового фронта.

Из (1.5) следует, что искривление волнового фронта можно интерпретировать как изменение частоты атомного осциллятора или частотную модуляцию, которая в приближении (1.5) соответствует линейному изменению частоты со временем. Характерный масштаб изменения экспоненты $exp\{-i\frac{v_\tau^2}{2}(\tau-\tau_m)^2 d^2\varphi/ds^2\}$ в (1.5) определяется соотношением

$$\frac{v_\tau^2 k}{R}(\tau-\tau_m)^2 \sim 2\pi ; \quad v_\tau(\tau-\tau_m) \sim \sqrt{2R/k} = \sqrt{2\lambda R} = b. \quad (1.8)$$

т.е.значение экспоненты существенно изменяется при прохождении частицей такого расстояния, на котором набег фазы за счет искривленного фронта становится $\sim 2\pi$.Это расстояние (b) есть размер первой зоны Френеля при наблюдении вдоль $\vec{k}$ из бесконечности.

Итак, мы имеем четыре характерных пространственных масштаба: среднюю длину свободного пробега $\ell = \bar{v}/\Gamma$, характерный масштаб (a) изменения амплитуды поля, радиус R кривизны волнового фронта и размер (b) первой зоны Френеля. Соотношение между этими параметрами и будет определять специфику пространственной неоднородности задачи. Мы будем предполагать $R \gg a, b, \ell$. Вопрос о преимущественном влиянии частотной либо амплитудной модуляции связан, очевидно, с соотношением между размерами a и b, если, разумеется, длина свободного пробега ℓ достаточно велика (долгоживущие системы).

2. Бегущая сферическая волна

Во многих случаях задачи с частотной и амплитудной модуляцией неразделимы; однако, для выяснения характерных особенностей частотной модуляции будем считать амплитуду поля постоянной. Эта схема соответствует условию малости длины свободного пробега по сравнению с диаметром светового пучка и радиусом кривизны волнового фронта. Световую волну в этом случае можно считать сферической.

Для большей простоты анализа рассмотрим вначале бегущую волну (расходящуюся или сходящуюся). Из соображения симметрии достаточно исследовать характеристики среды в одной точке пространства, характеризующейся радиусом-вектором $\vec{r}_0$ и удаленной на расстояние r_0 от центра волны (рис.2). Через эту точку проведем ось z, параллельную волновому вектору $\vec{K}$. Функцию $g(\vec{r})$ из (1.1) в окрестности $\vec{r}_0$ можно представить в виде:

$$g(\vec{r}) = e^{-i\left[Kz + K(x^2+y^2)/2r_0\right]}, \tag{2.1}$$

где использовано разложение (1.5) для фазы $\varphi(\vec{r})$, означающее замену сферического фронта параболическим. Кроме того, мы пренебрегли изменением амплитуды поля и радиуса кривизны (r_0) вдоль $\vec{K}$. Это (а также приближение (2.1)) вполне оправдано в рамках принятого условия

$$\ell = \bar{v}/\Gamma \ll r_0. \tag{2.2}$$

Уравнения (1.1) будем решать методом последовательных приближений (по параметру G), предполагая условия стационарными.

Вычисление поляризации первого порядка в наиболее интересном предельном случае

$$\Gamma \ll K\bar{v} \tag{2.3}$$

не представляет труда. Действительно, спектр значений $\vec{K}'$ в выражении (1.2) для $\rho^{(1)}(\vec{r},\vec{v})$ сосредоточен вблизи $\vec{K}$, так что при усреднении по скоростям $\vec{v}$ с учетом (2.3) максвелловскую экспоненту можно считать единицей:

$$\langle \rho^{(1)}(\vec{r},\vec{v})\rangle_{\vec{v}} = \frac{iG\mathcal{N}\sqrt{\pi}}{K\bar{v}}\, e^{-(\Omega/K\bar{v})^2} g(\vec{r}). \tag{2.4}$$

Таким образом, поляризация первого порядка в приближении (2.3) "чувствует" локальное значение поля, независимо от соотношения параметров a, b, ℓ, т.е. так же, как и в пространственно однородной задаче. Этот результат есть обобщение вывода, сделанного в /1,2/.

Для выяснения физики явления полезно, однако, проанализировать выражение (1,2), не усредняя по скоростям. Интегрирование (1.2) вдоль траектории частиц, проходящих через точку $\vec{r}_0$, даёт:

$$\rho^{(1)}(v,u;x,z) = -GNW(u)W_M(v)\sqrt{\frac{\pi}{4i}}\,\frac{b}{u}\,e^{i\frac{x^2}{b^2}+ikz-i\left[\xi-i\frac{\Gamma b}{2u}\right]^2}$$

$$\left[1+\Phi\left(\frac{\xi-i\Gamma b/2u}{\sqrt{i}}\right)\right];$$

$$\xi=\frac{x}{b}-\frac{b}{2u}(\Omega-kv)\ ;\ b=\sqrt{2z_0/k}\ ;\ W_M(v)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\bar v}\,e^{-v^2/\bar v^2}. \qquad (2.5)$$

Здесь v –проекция скорости на ось z ; u – величина скорости $\vec{u}$, перпендикулярной оси z ; ось X направлена вдоль $\vec{u}$; значение $x=0$ соответствует нахождению частицы в точке z_0 ; $\Phi(\xi)$ – интеграл вероятности от комплексного аргумента. В соответствии с выбранной нами нормировкой, величина (2,5) есть поляризация среды в некоторой точке ($\vec{z}$), обусловленная ансамблем частиц с заданной скоростью (рис.2). Переменная ξ определяет расстояние по оси X в масштабе b –характерного размера порядка размера первой зоны Френеля. Нетрудно проверить, что $\xi=0$ эквивалентно соотношению (1.4), т.е. в точке с координатами X_m, z_m, обращающими в нуль величину ξ, локальный допплеровский сдвиг компенсируется расстройкой частоты Ω, и, следовательно, взаимодействие с полем в этой точке максимально. Таким образом, ξ есть число зон Френеля (вдоль оси X), отделяющих частицу в данный момент от места, где наиболее эффективно взаимодействие с полем.

Исследуем поведение функции (2,5) в зависимости от различных входящих в неё параметров. Прежде всего заметим, что при $\Gamma b/u \gg 1$ (медленные частицы или большие константы Γ)

$$\rho^{(1)}(v,u;x,z) = iGNW(u)W_M(v)\,\frac{\exp[ix^2/b^2+ikz]}{\Gamma-i[\Omega-kv+kux/z_0]} =$$

$$= iGNW(u)W_M(v)\,\frac{g(x,z)}{\Gamma-i(\Omega-\vec{k}\vec{v})}, \qquad (2.6)$$

в полном соответствии с тем, что в данном приближении частица должна "чувствовать" локальное значение поля. Здесь $\vec{k}, \vec{v}$ – волновой вектор в точке с координатами x, z и полная скорость.

С точки зрения эффектов частотной модуляции более интересным является обратный предельный случай

$$\Gamma b/u \ll 1 \tag{2.7}$$

на котором мы и остановимся подробней. В точке $\xi = 0$ (радиус-вектор $\vec{r}_m$, координаты x_m, z_m; рис.2) имеем

$$\rho^{(1)}(u,v;x_m z_m) = -G\sqrt{\frac{\pi}{4i}}\, N W(u) W_M(v)\, \frac{b}{u}\, e^{i\frac{x_m^2}{b^2} + ikz_m} \tag{2.8}$$

Экспоненциальный фазовый множитель здесь такой же, как и в (2.6), однако, предэкспонента, во-первых, сдвинута по фазе на $\pi/4$ и, во-вторых, по модулю значительно меньше, чем в (2.6) (при условии $\Omega = \vec{k}\vec{v}$). В этом проявляется эффект "раскачки" атомного осциллятора. А именно, частица реагирует на значение поля не сразу, а с некоторым запозданием, так,что при пролете области взаимодействия с полем поляризация не успевает полностью "раскачаться". Об этом же говорит и наличие множителя $1/u$ в (2.8): чем больше скорость частицы, тем в меньшей степени она поляризована в точке с координатами x_m, z_m.

В предельном случае $\xi \gg 1$ из (2.5) следует

$$\rho^{(1)}(v,u;x,z) = -2G\sqrt{\frac{\pi}{4i}}\, e^{ikz_m + i\frac{x_m^2}{b^2} - (\Gamma - i\Omega) b\xi/u};$$

$$x_m = \frac{b^2}{2u}(\Omega - kv); \quad z - z_m = (x - x_m)v/u. \tag{2.9}$$

Если все еще $|\Gamma - i\Omega| b\xi/u \ll 1$, то значение (2,9) превышает (2.8) в 2 раза. С дальнейшим ростом поляризация релаксирует с постоянной распада Γ и одновременно осциллирует с частотой Ω. В сторону $\xi < 0$ величина $\rho^{(1)}$ быстро затухает (на интервале $|\xi| \sim 1$).

Таким образом, в рамках условия (2.7) при пролете частиц через точку $\xi = 0$ их поляризация накапливается на расстоянии порядка размера нескольких зон Френеля (причем значение поляризации при $\xi = 0$ примерно в два раза меньше максимального значения), а затем медленно релаксирует на протяжении $\Delta\xi \sim u/\Gamma b$ (или $\Delta X \sim u/\Gamma$). Эффективное взаимодействие с полем происходит на участке накопления ("раскачки") поляризации.

Обратимся теперь к эффектам насыщения в распределении заселенностей по скоростям. Поправка к заселенности уровня j ($j = m, n$) за счет поля имеет вид (для частиц, траектории которых проходят через выбранную точку $\vec{r}_0$):

$$\Delta\rho_j = \mp 2G^2 N W(u) W_M(v) \frac{b^2}{u^2} Re \int\limits_0^\infty \frac{e^{i\tau^2 - [\Gamma b/u + 2i\xi]\tau}}{\Gamma_j b/u - 2i\tau} d\tau \;;$$

$$\xi = \frac{X}{b} - \frac{b}{2u}(\Omega - kv). \qquad (2.10)$$

Это значение отнесено к точке, смещенной вдоль траектории и имеющей координату X . Ось X , по-прежнему, направлена вдоль поперечной скорости $\vec{u}$, а v есть проекция скорости на ось z . При $X = 0$ выражение (2.10) описывает изменение заселенности в точке $\vec{r}_0$ (рис.2). Зависимость $\Delta\rho_j$ от радиальной (v) и касательной (u) скоростей существенно разная. Нетрудно убедиться ($X = 0$), что интеграл в (2.19) вместе с множителем $1/u^2$ как функция u имеет максимум при $u = 0$, независимо от значения комбинации $\Omega - kv$. Как функция v формула (2.10) описывает "провал" Беннета, положение минимума (максимума) которого зависит от значения частоты Ω . Обсудим детально структуру этого "провала". Для большей наглядности положим Ω =0.

Для медленных частиц ($\Gamma b/u, \Gamma_j b/u \gg 1$) формула (2.10) переходит в известную формулу локальной задачи (X =0):

$$\Delta\rho_j = \mp 2 G^2 N W(u) W_M(v) Re \frac{1}{\Gamma - i(\Omega - kv)} . \qquad (2.11)$$

В общем случае интеграл (2.10) через известные функции не выражается, однако, при условии $\Gamma b/u, \Gamma_j b/u \ll 1$ можно получить два его предельных значения, а именно:

$$\Delta\rho_j = \mp G^2 N \frac{\pi b^2}{4u^2} W(u) W_M(v) \qquad \text{при} \quad \xi = 0 \quad ;$$

(2.12)

$$\Delta\rho_j = \mp G^2 N \frac{\pi b^2}{u^2} e^{-\Gamma_j \xi b/u} W(u) W_M(v) \qquad \text{при} \quad \xi \gg 1 .$$

График функции $\Delta\rho_j(\xi)$ в этом случае показан на рис. 3. Универсальная переменная ξ может интерпретироваться здесь либо как пространственная переменная (при фиксированной скорости v), либо как "скоростная" переменная (при фиксированном X). В первом случае $\Delta\rho_j(\xi)$ прослеживает изменение заселенности уровня j вдоль траектории движения. Объяснение этого графика в свете сказанного выше относительно поляризации уже не вызывает затруднений. А именно, в точке $\xi = 0$ траектория касается волнового фронта ($\Omega = 0$). В окрестности (размером порядка b) этой точки заселенности изменяют свое значение, причем максимальное изменение может, как видно из (2.12), в четыре раза превышать изменение в точке $\xi = 0$. После того, как частицы пролетают эту область, взаимодействие с полем прекращается и заселенности по экспоненциальному закону приходят к равновесному ненасыщенному значению. В качестве константы релаксации фигурирует, по вполне понятным причинам, не Γ , а Γ_j . Информация о взаимодействии с полем (в смысле изменения заселенностей) может проникать, таким образом, на расстояние $\Delta X \sim u/\Gamma_j$ по оси X , т.е. на длину свободного пробега со скоростью u по отношению к тушению уровня j .

При фиксированном значении X график рис.3 передает форму провала" Беннета в распределении по v . В рассматриваемой точке $\vec{r}_0$ значение X равно нулю, так что при $\Omega = 0$ величина ξ пропорциональна v . В структуре "провала" Беннета имеется качественное различие между разными частями его. Действительно, крутая часть "провала" шириной $\sim 2u/bk$ в окрестности $v = 0$ определяет насыщение частиц, которые взаимодействуют с полем в окрестности точки $\vec{r}_0$ (при $v = 0$ в точке $\vec{r}_0$ траектория касается волнового фронта). При больших v, на медленно спадающей части функции $\Delta\rho_j$ изменение заселенности в точке $\vec{r}_0$ обусловлено другими частицами, а именно теми, которые провзаимодействовали с полем в точках, удаленных от $\vec{r}_0$, и принесли сюда информацию в виде измененных заселенностей. Естественно, эти частицы взаимодействовать с полем в $\vec{r}_0$ уже не могут.

Асимптотический вид (2.12) функции $\Delta\rho_j(\xi)$ позволяет оценить ширину "провала" Беннета Δv для фиксированной скорости $u \gg \Gamma b, \Gamma_j b$:

$$\Delta v \sim 2u^2/b^2\Gamma_j K. \tag{2.13}$$

Тот же результат можно получить из следующих наглядных рассуждений. Максимальное расстояние по оси X, с которого может прийти в точку $\vec{r}_0$ информация о взаимодействии с полем (в виде измененной заселенности) есть $X_{max} \sim u/\Gamma_j$. Для того, чтобы в этой максимально удаленной точке произошло касание волнового фронта, частица должна лететь под определенным углом к оси z, т.е. иметь определенную скорость v. Для её определения необходимо X_{max} подставить в выражение для ξ (при $\Omega = 0$) и положить $\xi = 0$. Отсюда без труда получим $\Delta v \sim 2u^2/b^2\Gamma_j K$, что согласуется с (2.13). Эти рассуждения иллюстрирует рис.4.

Характерно, что ширина "провала" оказывается разной для верхнего и нижнего уровней, если различны константы релаксации ($\Gamma_m \neq \Gamma_n$). Эта разница остается и после усреднения по скоростям u.

Наличие множителя u^{-2} в (2.12) также отражает эффект "раскачки" атомного осциллятора. Он показывает, что вклад в насыщение довольно резко уменьшается с ростом скорости u. Уменьшение u ведет к сужению "провала" Беннета за счет медленно спадающей части (член $\exp[-\Gamma_j b\xi/u]$ в (2.12), а также к резкому возрастанию в максимуме. В предельном случае малых скоростей ширина "провала", в соответствии с (2.11), есть $\sim \Gamma/K$, а значение в максимуме в $\Gamma u^2/2\pi b^2$ раз больше, чем в приближении (2.12).

Полное распределение заселенности (например верхнего уровня m при усилении) при произвольной Ω и при условии $u \gg \Gamma b, \Gamma_j b$ имеет вид, показанный на рис. 5 сплошной линией.

На основе полученных результатов можно уже сделать некоторые заключения о ширине "провала" Лэмба, появляющегося при наличии двух встречных волн. В этом случае, при отличной от нуля отстройке частоты Ω, в распределении по скоростям появляется второй "провал" Беннета (показан пунктиром на рис. 5) и с каждой из волн взаимодействуют разные частицы. При сканировании частоты "провалы" могут перекрыться, в результате чего одна частица может взаимодействовать с обеими волнами (одновременно либо последовательно). Это приводит к увеличению насыщения и, как следствие, появлению "провала" Лэмба в графике работы поля как функции Ω. Перекрытие "провалов" Беннета осуществляется в интервале

$$\Delta\Omega \sim \Delta v / K, \qquad (2.14)$$

где Δv – ширина "провала". Используя (2.13), можно оценить ширину "провала" Лэмба $\Delta\Omega$ для быстрых частиц (по отношению к уровню j)

$$\Delta\Omega \sim \frac{u}{\Gamma_j b}\left(\frac{u}{b}\right). \qquad (2.15)$$

В этом пункте эффекты частотной модуляции существенно отличаются от эффектов амплитудной модуляции. В последнем случае для плоского волнового фронта и такого же эффективного размера b области взаимодействия с полем (т.е. диаметра светового пучка) для быстрых частиц выполнялось соотношение /2/ $\Delta\Omega \sim u/b$, что много меньше величины, даваемой формулой (2.15). Таким образом, чисто частотная модуляция может значительно уширить "провал" Лэмба по сравнению с чисто амплитудной модуляцией.

Окончательный вопрос о ширине и форме "провала" может быть решен при учете распределения по скоростям u в члене насыщения для работы поля. Для этого необходимо рассмотреть взаимодействие со стоячей волной.

3. Частотная модуляция. Стоячая сферическая волна

В рамках рассмотренной выше схемы функцию $g(\vec{r})$ для стоячей сферической волны можно представить в виде

$$g(\vec{r}) = \cos k\left(z + \frac{x^2+y^2}{2r_0}\right). \tag{3.1}$$

В результате решения уравнений (1.1) с этой функцией $g(\vec{r})$ получаем следующее выражение для работы поля в единицу времени с учетом первой поправки на насыщение:

$$\mathcal{P}(\vec{r}_0, u) = \hbar\omega \frac{G^2 N\sqrt{\pi}}{k\bar{v}} e^{-(\Omega/k\bar{v})^2} W(u) \Big\{1 -$$

$$- \frac{G^2 b^2}{2u^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \sum_{j=m,n} \frac{e^{i\tau^2 - \sqrt{2}\Gamma b\tau/u}}{\sqrt{2}\Gamma_j b/u - 2i\tau} \left(1 + \cos\frac{\sqrt{2}b}{u}\Omega\tau\right) d\tau \Big\}. \tag{3.2}$$

Величина $\mathcal{P}$ вычислена в интересующей нас точке $\vec{r}_0$ и уже усреднена по продольным скоростям v. Второй член в фигурных скобках определяет насыщение, а косинусная часть его описывает "провал" Лэмба. Для определения структуры "провала" необходимо исследовать интеграл

$$J_j(\Omega) = J_j'(\Omega) + J_j'(-\Omega);$$

$$J_j'(\Omega) = \operatorname{Re} \frac{b^2}{u^2} \int_0^\infty \frac{e^{i\tau^2 - \sqrt{2}(\Gamma + i\Omega)b\tau/u}}{\sqrt{2}\Gamma_j b/u - 2i\tau} d\tau\, W(u). \tag{3.3}$$

Нетрудно заметить, что интеграл $J_j'(\Omega)$ совпадает с интегралом (2.8) с точностью до переобозначения констант. Это означает, в частности, что для быстрых частиц функция $J_j'(\Omega)$ описывается универсальным графиком рис.3, где в качестве переменной ξ выступает величина $\Omega b/\sqrt{2}u$. Значения функции $J(\Omega)$, описывающей "провал" Лэмба, получаются сложением графика рис.3 с ему симметричным относительно точки $\xi = 0$. В результате сложения получаем график рис.6, изображающий "провал".

Структура "провала", как видно из рисунка, получается сложной. Это является новым физическим результатом, характерным для случая частотной модуляции. Возникшая в центре "провала" узкая структура имеет характерную ширину $\Delta\Omega \sim u/b$, которая определяется временем пролета первой зоны Френеля. Контрастность структуры для быстрых частиц может достигать 1/2.

Полная ширина "провала" оценивается из асимптотической формы функции $J_j(\Omega)$ при $\Omega \gg \sqrt{2}u/b$:

$$J_j(\Omega) = \frac{\pi b^2}{2u^2} e^{-\Gamma_j |\Omega| b^2/u^2} W(u). \tag{3.4}$$

Функция $J_j(\Omega)$ убывает в e раз по сравнению со значением в максимуме при

$$\Omega = \left(\frac{u}{\Gamma_j b}\right)\frac{u}{b}, \tag{3.5}$$

следовательно оценка (2.15) была сделана верно.

Увеличение параметров $\Gamma b/u$, $\Gamma_j b/u$ приводит к следующему изменению графика рис.6. Вначале происходит как полное сужение "провала" за счет крыльев, так и сужение узкой структуры. Однако, полная ширина уменьшается быстрее (пропорционально u^2), чем ширина узкой структуры (пропорциональность первой степени u). При $\Gamma b/u$, $\Gamma_j b/u \sim 1$ узкая структура пропадает, и ширина "провала" становится порядка ширины линии Γ. Дальнейшее уменьшение скорости приводит к известной формуле пространственно однородной задачи

$$\mathcal{P} = \hbar\omega \frac{G^2 N\sqrt{\pi}}{k\bar{v}} e^{-\left(\frac{\Omega}{k\bar{v}}\right)^2} W(u)\left\{1 - \frac{G^2}{4\Gamma}\left(\frac{1}{\Gamma_m} + \frac{1}{\Gamma_n}\right)\left(1 + \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \Omega^2}\right)\right\}, \tag{3.6}$$

где "провал" Лэмба имеет обычную лорентцеву форму с параметром Γ.

Выясним причину возникновения узкой структуры в "провале". Для этого вновь обратимся к распределению заселенностей по скоростям v. При $\Omega = 0$ "провалы" Беннета, образованные сходящейся и расходящейся волнами, сливаются в один, часть которого изображена на рис.7а (его форма несколько утрирована по сравнению с истинной). Как указывалось выше, в точке $\vec{z}_0$ взаимодействовать с полем может лишь часть атомов в интервале скоростей $v_1 \div v_2$. В частности, в создании поляризации третьего порядка (по G) участвуют лишь атомы, число которых пропорционально заштрихованной площади. При $\Omega \gtrsim u/b$ "провалы" приходят в положение рис.7б. Взаимодействие со сходящейся волной осуществляется в интервале скоростей $v_1^- \div v_2^-$, с расходящейся – в интервале $v_1^+ \div v_2^+$. При других скоростях взаимодействие с полем возможно лишь в других точках пространства. Поляризация третьего порядка здесь также пропорциональна заштрихованной площади, которая примерно в 2 раза превышает таковую на рис.7а. Это, однако, еще не означает большую степень насыщения в работе поля. Действительно, при $\Omega = 0$ атомы со скоростями $v_1 \div v_2$ взаимодействуют одновременно с обеими волнами, тогда как в положении рис.7б с каждой из волн взаимодействуют разные атомы (напомним, что имеется в виду взаимодействие в точке $\vec{z}_0$). Таким образом, если бы поляризация третьего порядка мгновенно реагировала на изменение заселенности и на локальное значение поля, то степень насыщения в работе поля была бы одинакова для приведенных на рис.7 значений Ω. На самом деле для "раскачки" поляризации требуется определенное время и, кроме того, важно, при каком значении $\Delta\rho_j$ эта "раскачка" начинается. Так при $\Omega = 0$ поляризация третьего порядка "раскачивается" одновременно с "раскачкой" $\Delta\rho_j$, т.к. атомы со скоростями $v_1 \div v_2$ лишь в окрестности $\vec{z}_0$ могут взаимодействовать с полем. В ситуации, изображенной на рис.7б, часть атомов со скоростями $v_1^+ \div v_2^+$ уже изменила заселенность под действием сходящейся волны, поэтому условия для "раскачки" поляризации третьего порядка здесь более благоприятны. В результате степень насыщения в работе поля увеличивается. Это и приводит к появлению "пика" в "провале". Для того, чтобы привести "провалы" Беннета в положение рис.7б, необходимо изменить Ω на величину $\Omega \sim u/b$, что согласуется с результатом, данным выше.

Перейдем к обсуждению формы "провала" Лэмба, получающегося в результате усреднения по всему ансамблю частиц, находящихся в тепловом движении. Для этого в формуле (3.2) необходимо проинтегрировать по поперечным скоростям u. Рассматривать будем наиболее интересный с точки зрения частотной модуляции случай:

$$\Gamma b/\bar{v},\ \Gamma_j b/\bar{v} \ll 1. \tag{3.7}$$

Степень насыщения сильно зависит от скорости частиц u (множитель u^{-2} в (3.2)), поэтому весьма существенен вид распределения $W(u)$. Представляет интерес рассмотреть по крайней мере два случая: одномерное распределение

$$W(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\bar{v}}\, e^{-(u^2/\bar{v}^2)}, \tag{3.8}$$

отвечающее по сути дела цилиндрической волне, и двумерное

$$W(u) = \frac{2u}{\bar{v}}\, e^{-(u^2/\bar{v}^2)} \tag{3.9}$$

характерное для более реальных условий (собственно сферическая волна).

Обсудим вначале первый из них. При интегрировании члена насыщения в (3.2) по скоростям u наличие множителя u^{-2} обеспечивает сходимость интеграла на интервале, значительно меньшим $\bar{v}$, так что максвелловскую экспоненту можно заменить единицей. Эффективный интервал скоростей оказывается порядка Γb и, следовательно ширина "провала" Лэмба определяется шириной линии Γ. Очевидно, что узкой структуры в случае цилиндрической волны "провал" не имеет. Фактическое вычисление даёт:

$$J(\Omega) = \frac{4\bar{\tau}}{\Gamma_j}\, \mathrm{Re}\, \frac{\mathrm{arctg}\, z}{z}\ ; \quad z = \sqrt{\frac{\Gamma - \Gamma_j/2 + i\Omega}{\Gamma_j/2}}\ ; \quad \bar{\tau} = \frac{b}{\bar{v}}. \tag{3.10}$$

В простом случае $\Gamma_m = \Gamma_n = \Gamma$ параметры "провала" γ и ϑ (γ –полуширина на половине глубины, ϑ –относительная вторая производная в центре) имеют значение

$$\gamma \cong 3{,}5\,\Gamma\,, \quad \vartheta \cong 0{,}46/\Gamma^2. \tag{3.11}$$

При амплитудной модуляции /2/ эти параметры равны: $\gamma \cong 2{,}3\,\Gamma$, $\vartheta = 2/3\,\Gamma^2$.

Таким образом, в одномерном случае искривление волнового фронта не приводит к заметным изменениям характеристик "провала" Лэмба из-за определяющего влияния медленных частиц.

В двумерном случае дополнительная степень u в распределении $W(u)$ (3.9) приводит к тому, что вклад в насыщение от частиц с большими скоростями становится заметным и пренебрегать максвелловской экспонентой уже нельзя. Эффективный интервал скоростей увеличивается, что ведет к уширению "провала".

В результате усреднения по скоростям в формуле (3.3) получим

$$\begin{gathered} J(\Omega) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{Cos}(\Omega\bar{\tau}t)\,dt\ ; \quad \bar{\tau} = b/\bar{v}\,; \\ f(t) = \frac{1}{2}\frac{\bar{\tau}^2}{t}e^{-\Gamma\bar{\tau}t}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{e^{-x(1-it^2/2)}}{\Gamma_j\bar{\tau}/t - ix}\,dx\,. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Таким образом, контур $J(\Omega)$ получается с помощью Фурье-преобразования функции $f(t)$, которую можно представить в виде

$$\begin{gathered} f(t) = \frac{1}{2}\frac{\bar{\tau}^2}{t}e^{-\Gamma\bar{\tau}t}\left\{\frac{\Gamma_j\bar{\tau}}{t}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\mathrm{Cos}\,\frac{t^2x}{2}}{(\frac{\Gamma_j\bar{\tau}}{t})^2 + x^2}\,dx \,-\right. \\ \left. -\int_0^\infty \frac{x\,e^{-x}\,\mathrm{Sin}\,\frac{t^2x}{2}}{(\frac{\Gamma_j\bar{\tau}}{t})^2 + x^2}\,dx\right\}. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Нетрудно заметить, что первый интеграл в фигурных скобках всегда больше второго. Действительно, если пренебречь экспонентой $exp(-x)$, то их значения в точности равны друг другу. Так как эффективный интервал x во втором интеграле больше, чем в первом, то экспонента уменьшает его значение в большей степени. С увеличением t относительная разность между интегралами уменьшается и стремится к нулю при $t \to \infty$. Следовательно, функция $f(t)$ -монотонно убывающая, асимптотически стремящаяся к нулю. Из общих свойств Фурье-преобразований и указанного характера поведения $f(t)$ следует, что "провал" Лэмба, описываемый функцией $J(\Omega)$ узкой структурой не обладает, а имеет простую гладкую форму. Исчезновение узкой структуры явилось результатом усреднения по скоростям и объясняется все еще большим влиянием медленных частиц.

Для определения характеристик "провала" исследуем более подробно поведение функции $f(t)$ в рамках условия (3.7). В области $\Gamma_j \bar{\tau} \ll t \ll (\Gamma_j \bar{\tau})^{-1}$ из (3.13) легко получить

$$f(t) = \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}^2}{t} e^{-\Gamma \bar{\tau} t} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{t^2}{2} \right]. \tag{3.14}$$

До значений $t \sim 1$ идет медленное спадание по закону t^{-1}, далее вступает в строй $\operatorname{arctg}(t^2/2)$ и при $t \gg 1$ $f(t)$ уменьшается по закону t^{-3}. Еще более далекие t рассматривать не имеет смысла. Вблизи точки $t=0$ ($t \ll \Gamma_j \bar{\tau}$) функция имеет следующее значение:

$$f(t)\Big|_{t \to 0} = \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}}{\Gamma_j}. \tag{3.15}$$

Вычисление $J(\Omega)$ с истинной $f(t)$ связано с большими трудностями, поэтому мы воспользуемся следующей аппроксимацией функции $f(t)$, правильно передающей её ход в характерных областях изменения t:

$$f'(t) = \frac{\pi}{4} \bar{\tau}^2 \left[\frac{1}{t + \Gamma_j \bar{\tau} \pi/2} - \frac{t}{t^2 + 4/\pi} \right] e^{-\Gamma \bar{\tau} t}. \tag{3.16}$$

Вычисляя интеграл (3.12) для $J(\Omega)$ с функцией (3.16), получим:

$$J(\Omega) = \frac{\pi \bar{\tau}^2}{4} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} e^{-\alpha} Ei(\alpha) + \frac{1}{2} e^{\alpha} Ei(-\alpha) - e^{\beta} Ei(-\beta) \right];$$

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\Omega + i\Gamma) \bar{\tau}; \quad \beta = \frac{\pi}{2} \Gamma_j (\Gamma + i\Omega) \bar{\tau}^2. \tag{3.17}$$

$Ei(z)$ – интегральная показательная функция комплексного аргумента. Функция (3.17) состоит из двух частей, отличающихся характерной областью изменения. Первая часть, содержащая член

$$e^{-\alpha} Ei(\alpha) + e^{\alpha} Ei(-\alpha),$$

изменяется существенно при значении $\Omega \sim 1/\bar{\tau}$. Область изменения оставшейся части – значительно больше ($\Omega \sim 1/\Gamma\bar{\tau}^2$). Результирующая функция, тем не менее, в области $0 < \Omega \lesssim 1/\bar{\tau}$ изменяется не сильно, т.к. обе части в значительной мере компенсируют друг друга. Действительно, для $\Omega \ll 1/\bar{\tau}$ имеем

$$J(\Omega) \cong \frac{\pi\bar{\tau}^2}{4}\left[\ln\left(\frac{4}{\pi^{3/2}\Gamma_j\bar{\tau}}\right) + \frac{2\bar{\tau}^2}{\pi}\Omega^2 \ln\sqrt{\frac{4\bar{\tau}^2}{\pi}(\Gamma^2+\Omega^2)}\right], \tag{3.18}$$

а, например, в точке $\Omega = \sqrt{\pi}/2\bar{\tau}$

$$J(\sqrt{\pi}/2\bar{\tau}) \cong \frac{1}{4}\pi\bar{\tau}^2 \ln(2/\pi\Gamma_j\bar{\tau}) \tag{3.19}$$

т.е. от $\Omega = 0$ до $\Omega \sim 1/\bar{\tau}$ функция $J(\Omega)$ практически не меняется. Область характерного изменения $J(\Omega)$, таким образом, больше чем $1/\bar{\tau}$. Несложные оценки дают следующие значения параметров "провала" γ и ϑ:

$$\gamma \cong \frac{1}{\bar{\tau}}\sqrt{2/\pi\Gamma_j\bar{\tau}}\ , \quad \vartheta \cong \frac{4}{\pi}\bar{\tau}^2. \tag{3.20}$$

В задаче с плоским волновым фронтом (амплитудная модуляция) и с диаметром светового пучка $\sim b$ /2/ эти параметры равны:

$$\gamma \cong \sqrt{\Gamma/\bar{\tau}}\ ; \quad \vartheta \cong \left(\Gamma^2 \ln\frac{1}{\Gamma\bar{\tau}}\right)^{-1}.$$

Полученные результаты показывают, что в случае чисто частотной модуляции "провал" Лэмба может быть значительно шире (примерно в $1/\Gamma\bar{\tau}$ раз), чем при чисто амплитудной модуляции и диаметром светового пучка b . Кроме того, выражение (3.20) для ширины "провала" говорит о том, что частица обладает различными спектральными характеристиками в зависимости от того, на каком уровне она находится (величина γ зависит от времени жизни на уровне j , но не от "времени жизни" поляризации, как это имеет место в пространственно однородной задаче). Этот эффект, свойственный частотной модуляции, может отчетливо проявиться в случае, если константы релаксации Γ_m и Γ_n уровней существенно различны. А именно, полный контур в (4.6) будет представлять тогда сумму двух контуров разной ширины, так что в результате может возникнуть эффект типа "провал" в "провале".

В случае амплитудной модуляции отмеченная особенность выражена значительно слабее.

Необходимо отметить, что полученные выше результаты отнюдь не означают, что медленные частицы в случае частотной модуляции перестают играть роль. Напротив, если мы предположим, что основной вклад в насыщение дают частицы со скоростями порядка среднетепловой, то для ширины "провала" Лэмба, в соответствии с (3.5), следовало бы:

$$\gamma \sim \frac{1}{\bar{\tau}} \left(\frac{1}{\Gamma_j \bar{\tau}}\right), \tag{3.21}$$

что в $\sqrt{1/\Gamma_j \bar{\tau}}$ превышает правильное значение (3.20).

Одной из характерных особенностей частотной модуляции является своеобразная зависимость ширины "провала" Лэмба от давления. В соответствии с (3.20), величина γ с ростом давления уменьшается по закону $1/\sqrt{\Gamma_j}$. Это своеобразие связано с особым характером механизма уширения при частотной модуляции. Действительно, увеличение времени жизни на уровне приводит к увеличению эффективной области вокруг точки $\vec{z}_0$, из которой в $\vec{z}_0$ приходит информация о взаимодействии с полем. При этом для больших скоростей u увеличивается эффективный интервал Δv скоростей частиц, изменивших заселенность (например, в точке касания траекторией волнового фронта) и достигших $\vec{z}_0$, не успех отрелаксировать, и, как следствие, уширяется "провал" Лэмба. Влияние этого эффекта остается и после усреднения по скоростям u.

В заключение этого раздела отметим, что при использовании молекулярных пучков с характерным для них распределением $W(u) \sim u^2 \exp[-u^2/\bar{v}^2]$ "провал" в целом еще более уширится (примерно до значения ширины (3.21). И, кроме того, усреднение по скоростям не ликвидирует узкую структуру, так что на фоне довольно широкого "провала" должен наблюдаться сравнительно узкий „пик" в центре (шириной порядка $1/\tilde{\tau} \sim \bar{v}/b$). Это происходит потому, что вклад в насыщение частиц со скоростями $u \lesssim \Gamma b$ становится очень малым, а для скоростей $u \gg \Gamma b$ указанный пик существует.

4. Гауссовы пучки

В настоящем разделе мы обсудим вопрос о структуре "провала" Лэмба, принимая во внимание реальную геометрическую конфигурацию поля светового пучка в резонаторе.

Решение дифракционной задачи для стоячей монохроматической волны в диффузионном приближении дает следующую зависимость поля от координат и времени (так называемый гауссов пучок; рассматривается случай аксиальной симметрии):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t \left[\frac{a^2}{a^2 - i2z/k}\, e^{-ikz - (x^2+y^2)/(a^2 - i2z/k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{a^2 + i2z/k}\, e^{ikz - (x^2+y^2)/(a^2 + i2z/k)} \right]. \tag{4.1}$$

Здесь a –параметр, определяющий минимальный поперечный размер пучка (диаметр "шейки"); E_0 –значение амплитуды поля в начале координат. Ось z совпадает с осью пучка, а начало координат находится в "шейке".

Вопрос о влиянии частотной модуляции тесно связан с вопросом о числе зон Френеля, укладывающихся в поперечном сечении пучка. Характерный поперечный размер пучка d и радиус кривизны волнового фронта R, как видно из (4.1), равны соответственно:

$$d = \sqrt{a^2 + 4z^2/k^2a^2}\,; \quad R = z + \frac{k^2a^4}{4z}. \tag{4.2}$$

Отношение d/b, где $b = \sqrt{2R/k}$ – размер первой зоны Френеля, есть

$$d/b = \sqrt{2z/ka^2} = \sqrt[4]{d^2/a^2-1}\,. \qquad (4.3)$$

В обычно используемых системах d больше a лишь в несколько раз. Если даже $d/a=10$, то $d/b \sim 3$, т.е. в сечении светового пучка укладывается не более трех зон Френеля.

Покажем, что в этом случае искривление волнового фронта практически не влияет на параметры "провала" Лэмба, т.е. основным эффектом является амплитудная модуляция. Для этого обратимся к распределению по продольным скоростям v в некоторой точке (например $z=z_0$, $x=y=0$) при фиксированной поперечной скорости u. Для определенности считаем $\Omega=0$.

Как было показано выше, эффективное взаимодействие частиц с полем осуществляется в окрестности точки касания (при $\Omega=0$) траекторией частицы волнового фронта. Частицы, пролетающие через точку ($z=z_0$, $x=y=0$), приносят с собой информацию о взаимодействии с полем (в виде измененных заселенностей) при одновременном выполнении двух условий: во-первых, чтобы касание волнового фронта произошло в пределах светового пучка и, во вторых, чтобы заселенности не успели отрелаксировать до того, как частица прилетит в интересующую нас точку. Для выполнения первого требования необходимо, как показывают простые геометрические соображения, чтобы тангенс угла между траекторией и осью z был не меньше, чем $2R/d = b^2k/d$. При заданном значении u это накладывает условие на величину скорости v, которая может меняться от нуля до

$$v \sim \left(\frac{d}{b}\right)\frac{u}{kb}\,. \qquad (4.4)$$

Это соотношение фактически и определяет ширину "провала" Беннета для быстрых частиц. Второе требование означает просто, что скорость частицы должна быть достаточно большой (быстрые частицы).

Сравнение (4.4) с (2.13) показывает, что конечный диаметр пучка существенно ограничивает проявление частотной модуляции. Более того, значение ширины "провала" Беннета (4.4) для быстрых частиц характерно как раз для случая чисто амплитудной модуляции /2/, так как числовой множитель d/b, как показано выше, изменяется обычно лишь в пределах нескольких единиц.

В пересчете на ширину "провала" Лэмба (4.4) даёт

$$\Delta\Omega \sim \left(\frac{d}{b}\right)\frac{u}{b} \cong u/a, \qquad (4.5)$$

т.е. для быстрых частиц ширина "провала" определяется временем пролета диаметра "шейки". После усреднения по скоростям u параметры "провала" также практически не отличаются от значений, даваемых задачей с плоским волновым фронтом /2/.

Приведенные оценки убеждают в том, что в большинстве практически важных случаев при решении лазерных задач можно не принимать во внимание расходимость светового пучка и пользоваться приближением плоского фронта. Фактический расчет приводит к тому же результату.

В некоторых частных ситуациях может возникнуть необходимость применения сильно сфокусированного пучка (почти концентрические резонаторы) или рассмотрения области, настолько удаленной от шейки, что диаметр пучка становится много больше размера зоны Френеля. В этом случае совместный учет амплитудной и частотной модуляции приводит к следующему выражению для работы поля в единицу времени:

$$\mathcal{P}(u) = \hbar\omega \frac{G^2 \mathcal{N}\sqrt{\pi}}{k\bar{v}} e^{-(\Omega/k\bar{v})^2} W(u)\Big\{1 -$$

$$- \frac{G^2}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2(\beta+\beta^*)}}\, \mathrm{Re}\sum_{j=m,n}\int_0^\infty d\tau\, e^{-\Gamma\tau}(1+\cos\Omega\tau)\cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{\beta\tau^2}{2} + \frac{(\beta\tau+\Gamma_j)^2}{2(\beta+\beta^*)}\right]\left[1-\Phi\left(\frac{\beta\tau+\Gamma_j}{\sqrt{2(\beta+\beta^*)}}\right)\right]\Big\}; \quad \beta = \frac{u^2}{a^2+i2z/k}. \qquad (4.6)$$

Величина $\mathcal{P}$ здесь уже усреднена по продольным скоростям и , кроме того, проведено интегрирование по поперечному сечению пучка. Таким образом, величина $\mathcal{P}$ в (4.6) есть работа поля над ансамблем частиц, имеющем фиксированную поперечную скорость u, максвелловское распределение по продольным скоростям v и распределенным равномерно по объему.

Соотношение между мнимой и вещественной частями величины β определяет относительное влияние частотной и амплитудной модуляций. Формальный переход $Re\,\beta \to 0$ $(a \to 0)$ приводит к формуле, аналогичной (3.2). Однако фактически формула (3.2). справедлива лишь при условии (условие асимптотического разложения интеграла вероятности Φ в (4.6):

$$\Gamma_j \gg 2\sqrt{Re\,\beta} = 2u/d, \tag{4.7}$$

т.е. когда время жизни на уровне много (4.7) меньше времени пролета радиуса пучка. Это приближение рассмотрено в предыдущих разделах, поэтому мы остановимся здесь на другом частном случае.

Будем считать, что время пролета диаметра пучка много меньше времени жизни на уровнях, и кроме того предположим, что $Im\,\beta \gg Re\,\beta$, т.е. диаметр пучка много больше размера зоны Френеля ($d \gg b$). Из этого, в частности, следует, что $d \gg a$. Интеграл в (4.6) при этих условиях берется без труда, и второй член в фигурных скобках приобретает вид:

$$\frac{\pi}{8} G^2 \frac{ad}{u^2}\left[1 + e^{-(\Omega a/u)^2}\right]; \quad d \gg b, \ \Gamma d/u \ll 1. \tag{4.8}$$

Степень насыщения, по-прежнему, пропорциональна u^{-2}, а ширина "провала" Лэмба оказывается равной

$$\Delta\Omega \sim u/a, \tag{4.9}$$

т.е. определяется временем пролета диаметра "шейки" и линейно зависит от скорости. Оценка (4.9) и характер зависимости насыщения от скорости остаются в силе и без предположения $d \gg b$.

Таким образом для реальных конфигураций светового пучка и для быстрых частиц (в том смысле, что их время пролета локального диаметра (d) светового пучка много меньше времени жизни на уровнях) ширина "провала" Лэмба практически не зависит от координаты z, в которой она вычисляется и равна обратному времени пролета диаметра "шейки".

Учитывая тот факт, что зависимость степени насыщения и ширины "провала" от скорости u в рассмотренном случае такая же, как в задаче с плоским фронтом, можно привести окончательные значения параметров "провала", полученного в результате усреднения по поперечным скоростям при выполнении условия

$$\Gamma_j d/\bar{v},\ \Gamma d/\bar{v} \ll 1. \tag{4.10}$$

В двумерном случае с точностью до числовых коэффициентов порядка единицы эти параметры даются соотношениями:

$$\gamma \sim \sqrt{\Gamma \bar{v}/a}\ ;\ \vartheta \sim [\Gamma^2 \ln(\bar{v}/\Gamma a)]^{-1}. \tag{4.10}$$

В одномерном же случае (широкий гауссов пучок) для γ и ϑ остаются в силе соотношения (3.11).

Увеличение констант затухания (при увеличении давления) приводит к следующей модификации "провала" в области сильной расходимости пучка (двумерный случай: $d \gg b$). До тех пор, пока выполнено условие (4.10), "провал" уширяется по коренному закону $(\sim \sqrt{\Gamma})$. В области давлений, где справедливо условие

$$\bar{v}/d \ll \Gamma_j,\ \Gamma \ll \bar{v}/b, \tag{4.12}$$

необходимо пользоваться формулой (3 20) . Величину γ из (3.20), с учетом соотношений (4.2), (4.3) для реальных пучков, можно представить в виде ($\Gamma_j = \Gamma$):

$$\gamma \cong \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sqrt{\Gamma\bar{v}/a}\left(\frac{\bar{v}}{\Gamma d}\sqrt[4]{d/a}\right). \tag{4.13}$$

Комбинация $(\bar{v}\sqrt[4]{d/a})/\Gamma d$ в силу условия (4.12) может быть значительно меньше единицы, в связи с чем "провал" оказывается намного уже, чем в "шейке". Вообще говоря, этот факт не должен вызывать удивление, т.к. размер b первой зоны Френеля всегда больше диаметра "шейки".

В рамках условия (4.12) ширина "провала" уменьшается с увеличением давления (пропорционально $1/\sqrt{\Gamma}$). В области больших давлений ($\Gamma, \Gamma_j \gg \bar{v}/b$) "провал" имеет обычную дисперсионную форму с полушириной $\gamma = \Gamma$, пропорциональной давлению.

Качественный график изменения ширины "провала" с изменением давления показан на рис.8 (кривая 1). Кривая 2 характеризует изменение ширины "провала" в "шейке". В области малых ($\Gamma d/\bar{v} \ll 1$) и больших ($\Gamma a/\bar{v} \gg 1$) давлений кривые совпадают. Частотная модуляция (в том случае, когда она существенна) приводит к более сложной зависимости ширины "провала" от давления с наличием максимума и минимума. Примечателен тот факт, что в области сильной расходимости пучка "провал" при любом давлении может быть разве лишь у́же, чем в области "шейки". Таким образом, применяемую для целей стабилизации частоты поглощающую ячейку при заданной конфигурации поля в резонаторе выгодней располагать дальше от "шейки", так как в этом случае может быть получен более узкий резонанс в мощности генерации как функции частоты. Эту рекомендацию следует принимать во внимание, однако, лишь в том случае, если по каким-либо причинам используется сильно расходящийся световой пучок.

5. О сдвиге "провала" Лэмба

Системы автоподстройки в схемах стабилизации частоты по "провалу" Лэмба более чувствительны к сдвигу минимума "провала" относительно частоты атомного перехода, чем к его уширению. Поэтому при анализе сдвига "провала" необходимо учитывать более тонкие эффекты, по сравнению с эффектами, приводящими к уширению.

Существенно несимметричная пространственная картина при частотной модуляции заставляет обратиться к вопросу о сдвиге "провала" Лэмба под действием искривления волнового фронта. В рамках приближений, использованных в предыдущих разделах, "провал" оказался симметричным относительно $\Omega = 0$. Этот факт, однако, является общим для случая стоячей волны произвольной пространственной конфигурации$^{*)}$. Действительно, для стоячей волны функцию $g(\vec{r})$ в (1.1) всегда можно выбрать вещественной.

---

*) Мы не рассматриваем, естественно, эффекты, связанные с упругими столкновениями частиц и ограничиваемся моделью трех релаксационных констант. В величину Γ можно включить мнимую часть $i\Delta$. В этом случае следует говорить о симметрии относительно точки $\Omega = \Delta$.

Далее, с помощью замены

$$\rho(\vec{r}) = i R(\vec{r})$$

и интегрирования вдоль траектории, уравнения (1.1) можно свести к следующим эквивалентным интегральным уравнениям:

$$\rho_j(\vec{r}+\vec{v}t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\Gamma_j(t-t')} \vartheta_j(\vec{r}+\vec{v}t')dt' \mp$$

$$\mp 2\int_{-\infty}^{t} \mathrm{Re}\, e^{-\Gamma_j(t-t')} G g(\vec{r}+\vec{v}t') R(\vec{r}+\vec{v}t')dt';$$

$$\mathrm{Re}[R(\vec{r}+\vec{v}t)] = G\int_{-\infty}^{t} e^{-\Gamma(t-t')} g(\vec{r}+\vec{v}t') \cos[\Omega(t-t')]\cdot \tag{5.1}$$

$$\cdot[\rho_m(\vec{r}+\vec{v}t') - \rho_n(\vec{r}+\vec{v}t')]dt'.$$

Отстройка частоты Ω входит здесь только в аргумент косинуса, поэтому как уравнения (5.1), так и их решение инвариантны относительно изменения знака Ω. Из этого следует, в частности, что график работы поля как функции Ω симметричен относительно точки $\Omega = 0$.

В действительности, однако, стоячая волна никогда в чистом виде не реализуется. Из-за потерь в зеркалах резонатора амплитуды встречных бегущих волн оказываются разными, так что в случае частотной модуляции функция $g(\vec{r})$ оказывается комплексной. Это приводит к тому, что в графике работы поля присутствует несимметричный по Ω член. Мы оценим влияние этого члена на сдвиг максимума линии работы поля. Для этой цели выберем $g(\vec{r})$ в виде:

$$g(\vec{r}) = \cos\varphi(\vec{r}) + \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\varphi(\vec{r})}; \quad \varphi(\vec{r}) = kz + \frac{k(x^2+y^2)}{2r_0}. \tag{5.2}$$

Здесь также использовано параболическое приближение с постоянным по z радиусом кривизны r_0. При $\varepsilon=0$ форма (5.2) переходит в (3.1). Параметр ε в общем случае комплексный.

Прежде всего определим сдвиг максимума линии ненасыщенного усиления (поглощения). Вычисления проводятся, как и прежде, для окрестности некоторой точки, лежащей на оси z. Выражение для работы поля в линейном по G^2 приближении имеет вид (двумерный случай):

$$\mathcal{P}=\hbar\omega\frac{G^2}{2}\mathcal{N}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty d\tau\left[\frac{\exp[-(\Gamma-i\Omega)\tau-(k\bar{v}\tau/2)^2]}{1+i(\bar{v}\tau/b)^2}+\right.$$

$$\left.+|1+\varepsilon|^2\frac{\exp[-(\Gamma-i\Omega)\tau-(k\bar{v}\tau/2)^2]}{1-i(\bar{v}\tau/b)^2}\right];\quad b=\sqrt{2r_0/k}. \tag{5.3}$$

Во всей эффективной области изменения подинтегральной функции мнимые части знаменателей в (5.3) малы по сравнению с единицей. Поэтому можно воспользоваться разложением дроби в ряд по малому параметру $(\bar{v}\tau/b)$. Используя условие $\Gamma\ll k\bar{v}$ и оставляя главные члены, получаем следующее выражение для $\mathcal{P}$ вблизи $\Omega=0$:

$$\mathcal{P}=\hbar\omega\frac{G^2}{2}\mathcal{N}\frac{\sqrt{\pi}}{k\bar{v}}\left[1+|1+\varepsilon|^2+(|1+\varepsilon|^2-1)\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{b^2k^2}\left(\frac{\Omega}{k\bar{v}}\right)-\right.$$

$$\left.-(1+|1+\varepsilon|^2)\left(\frac{\Omega}{k\bar{v}}\right)^2\right]. \tag{5.4}$$

Появившийся здесь линейный по Ω член нарушает симметрию линии относительно $\Omega=0$. Нетрудно видеть, что максимум в (5.4) находится в точке

$$\Omega=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\bar{v}}{kb^2}\left(\frac{|1+\varepsilon|^2-1}{|1+\varepsilon|^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\bar{v}}{r_0}\left(\frac{|1+\varepsilon|^2-1}{|1+\varepsilon|^2+1}\right). \tag{5.5}$$

Таким образом, с точностью до коэффициента, определяющего долю бегущего компонента в (5.2), сдвиг максимума линии ненасыщенного усиления (поглощения) определяется средним временем пролета радиуса кривизны волнового фронта (или, что то же самое, допплеровским сдвигом для соответствующего волнового числа $1/r_0$). Для чисто стоячей волны ($\varepsilon=0$) коэффициент при $\bar{v}/r_0$ в (5.5) обращается в нуль (сдвиг отсутствует), для бегущей волны ($\varepsilon \gg 1$) он максимален и по порядку величины равен единице. В реальных условиях ($\bar{v} \sim 10^5$ см/сек, $r_0 \sim$ $\sim 10^2$ см) сдвиг может достигать порядка 10^3 сек$^{-3}$.

Перейдем теперь к оценке сдвига минимума "провала" Лэмба. Конкретные вычисления с использованием естественных приближений дают следующее выражение для функции $\mathcal{J}_j(\Omega)$, аналогичной (3.3):

$$\mathcal{J}_j(\Omega) = Re\int_0^\infty d\tau\Big\{\frac{\exp(-2\Gamma\tau + i2u^2\tau^2/b^2)}{\Gamma_j - 2iu^2\tau^2/b^2}|1+\varepsilon|^2 \cos(2\Omega\tau) + \tag{5.6}$$

$$+\frac{u^2}{b^2}\Omega\left(\frac{2}{k\bar{v}}\right)^3\frac{(|1+\varepsilon|^4-1)}{\Gamma_j^2+\left(\frac{2u^2\tau}{b^2}\right)^2}\Gamma_j\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(k\bar{v}\tau/2)^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{k\bar{v}\tau}{2}\right)\left(1-\Phi\left(\frac{k\bar{v}\tau}{2}\right)\right)\right]\right\}W(u).$$

Первый член в (5.6) с точностью до коэффициента $|1+\varepsilon|^2$ совпадает с (3.3), линейный по Ω член определяет сдвиг "провала". Сдвиг исчезает, как и должно быть, в случае либо $u \to 0$,либо $\varepsilon \to 0$.

Для оценки максимального сдвига можно во втором члене вместо u подставить $\bar{v}$. Вблизи $\Omega = 0$, используя разложение (3.18), нетрудно получить:

$$\mathcal{J}(\Omega) \cong \frac{\pi\bar{\tau}^2}{4}\Big\{\Big[\ln\left(\frac{4}{\pi^{3/2}\Gamma_j\bar{\tau}}\right) - \frac{2\bar{\tau}^2}{\pi}\Omega^2\ln\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma_j\bar{\tau}}\Big]|1+\varepsilon|^2 +$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\bar{v}}{b}\right)^2\left(\frac{2}{k\bar{v}}\right)^3\frac{(|1+\varepsilon|^4-1)}{\sqrt{1+\left(\frac{k\bar{v}}{2}\frac{b^2\Gamma_j}{2\bar{v}^2}\right)^2}}\Omega\Big\}. \tag{5.7}$$

Максимум этой функции лежит в точке

$$\Omega \cong \frac{1}{2}\left(|1+\varepsilon|^4-1\right)\frac{1}{|1+\varepsilon|^2}\,\frac{\bar{v}^4}{b^4}\left(\frac{2}{k\bar{v}}\right)^3 \frac{\left[\ln\left(\sqrt{\pi}/2\Gamma_j\tau\right)\right]^{-1}}{\sqrt{1+\left(\frac{k\bar{v}}{2}\,\frac{b^2\Gamma_j}{2\bar{v}^2}\right)^2}} <$$

$$< \left(\frac{\bar{v}}{r_0}\right)\left(\frac{1}{k r_0}\right) \sim \frac{\bar{v}}{r_0}\,\frac{\lambda}{r_0} . \tag{5.8}$$

Это соотношение показывает, что сдвиг минимума "провала" Лэмба относительно частоты атомного перехода пренебрежимо мал как по сравнению со сдвигом линии ненасыщенного усиления (поглощения), так и по сравнению с шириной "провала" (величина $(\bar{v}/r_0)(\lambda/r_0)$ может составлять лишь малую долю обратной секунды).

Таким образом, основные эффекты частотной модуляции могут быть связаны с уширением "провала" Лэмба, но не с его сдвигом. Сдвиг линии ненасыщенного усиления экспериментально также вряд ли может быть обнаружен из-за существенно большей ширины доплеровского контура.

Автор приносит благодарность С.Г.Раутиану за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные замечания.

Литература

/1/ С.Г.Раутиан, А.М.Шалагин. ЖЭТФ, Письма. 9, 686, 1969.

/2/ С.Г.Раутиан, А.М.Шалагин. ЖЭТФ, 58, 962, 1970.

/3/ В.С.Летохов. Препринт ФИАН, № 19, 1969.

/4/ С.Н.Багаев, Л.С.Василенко, В.П.Чеботаев. Препринт ИФП СО АН СССР, № 15, 1970.

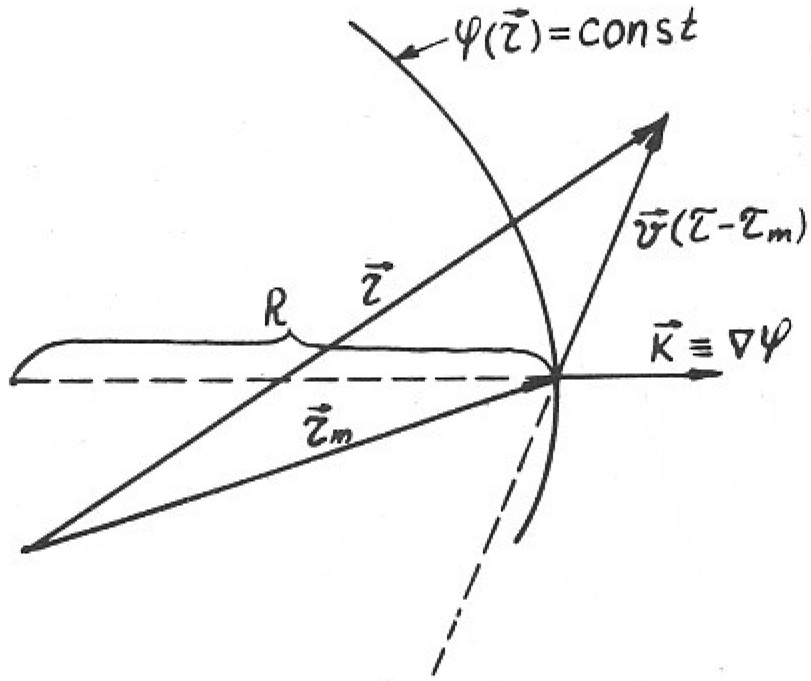

Рис. 1

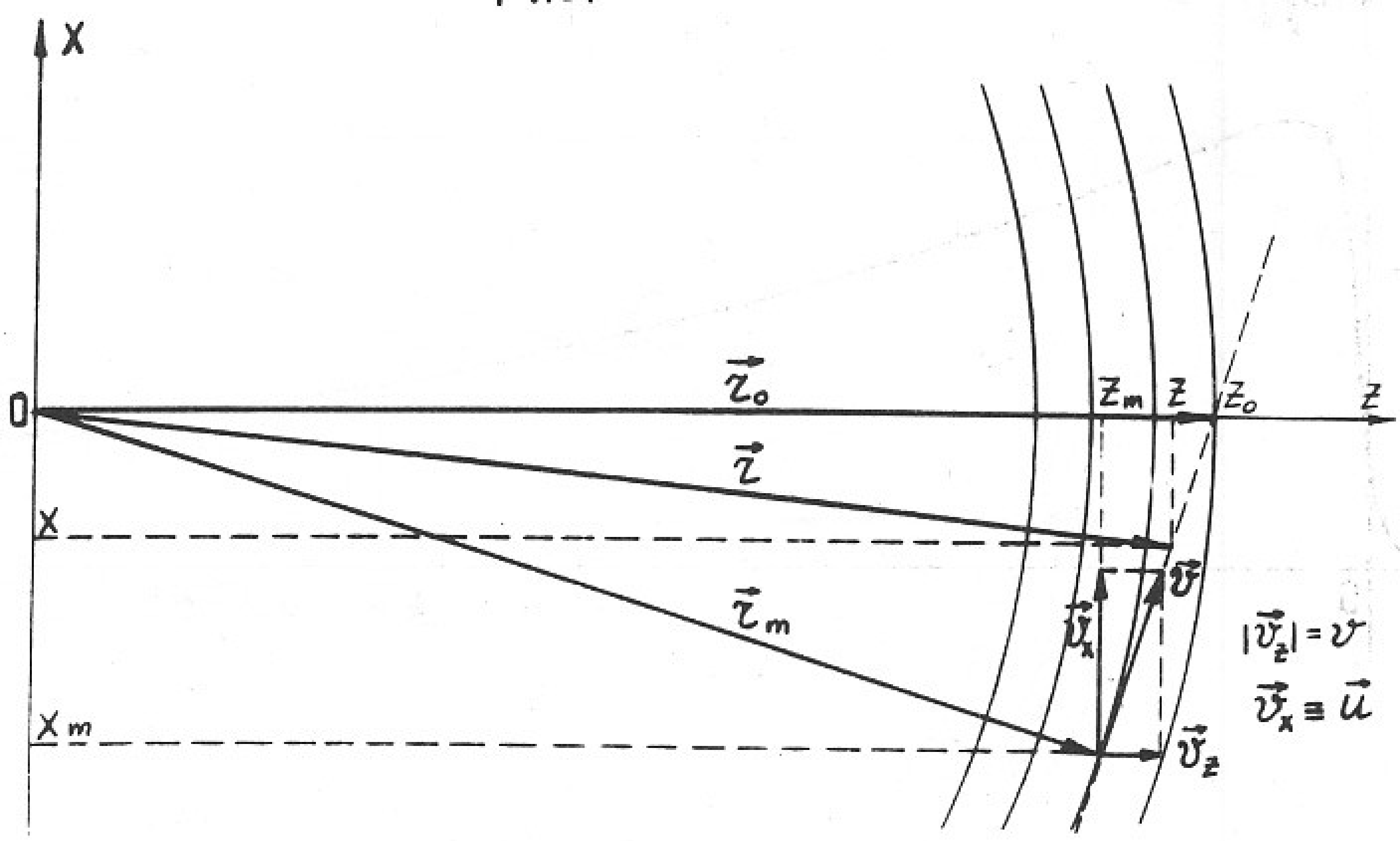

Рис. 2

Рис.1,2. (Пояснения в тексте).

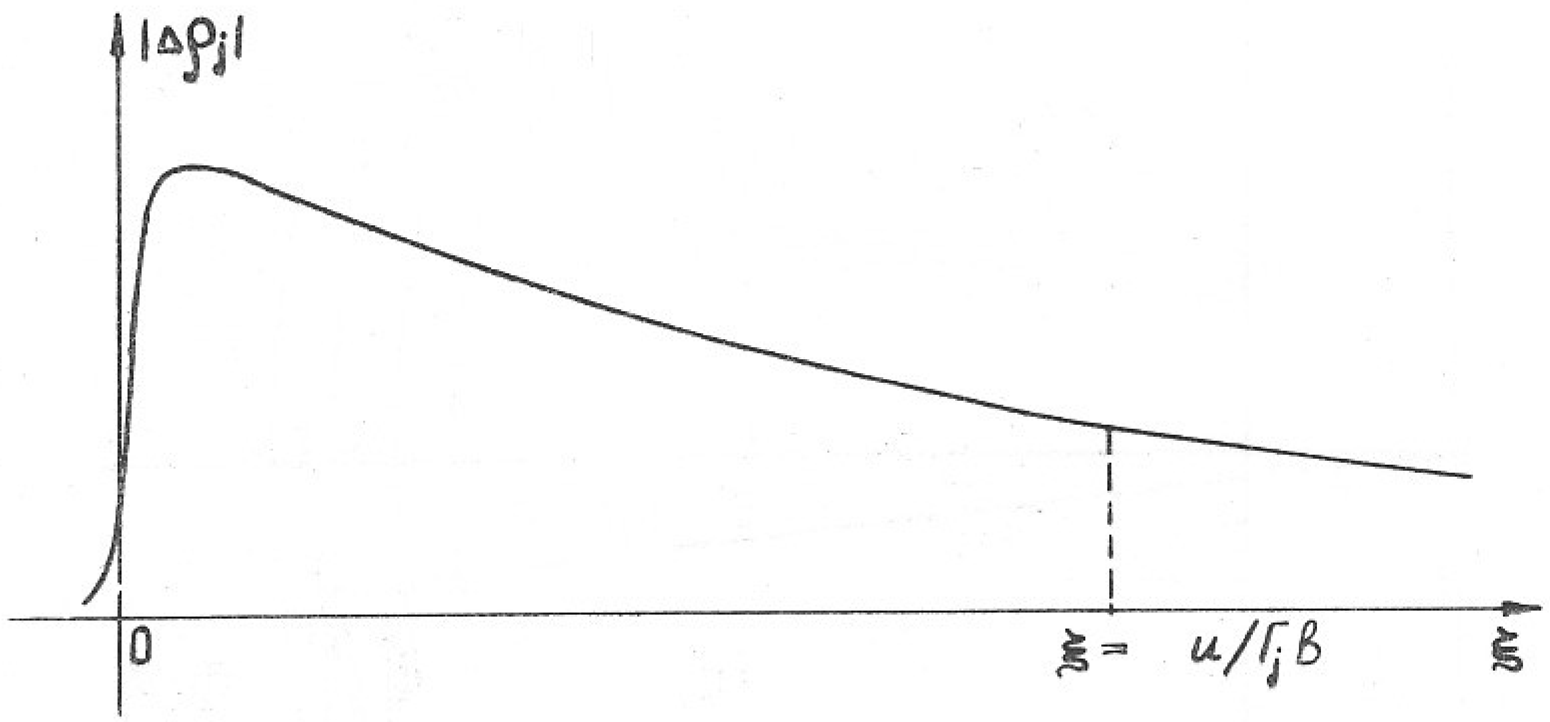

Рис.3. Зависимость $|\Delta\rho_j|$ от величины ξ ($\Gamma B/u \ll 1$).
При $x = 0$ этот график изображает "провал" Беннета.

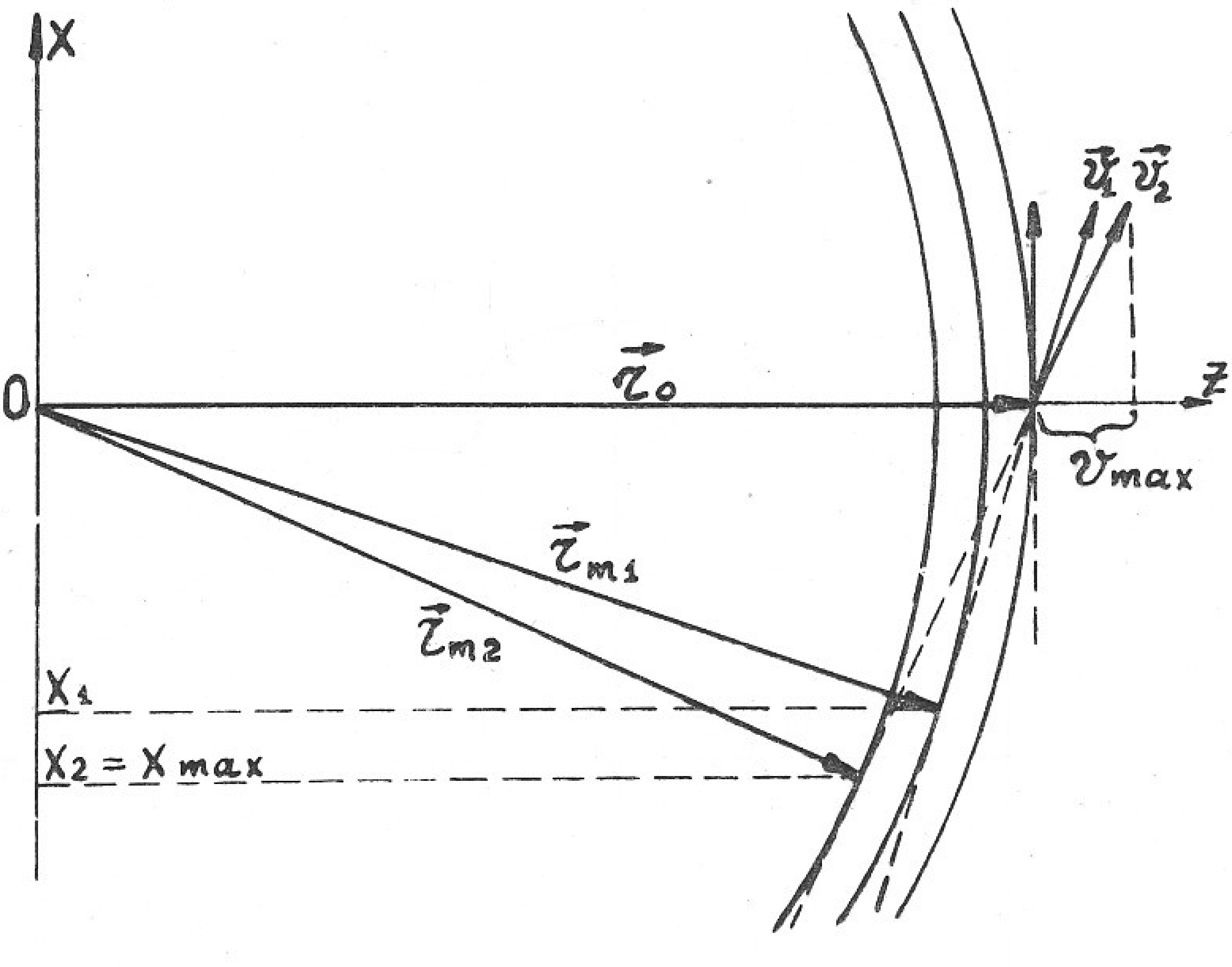

Рис.4. Иллюстрация к оценке ширины "провала" Беннета ($\Omega = 0$). X_1 , X_2 – ординаты точек касания траекторией частицы волнового фронта.

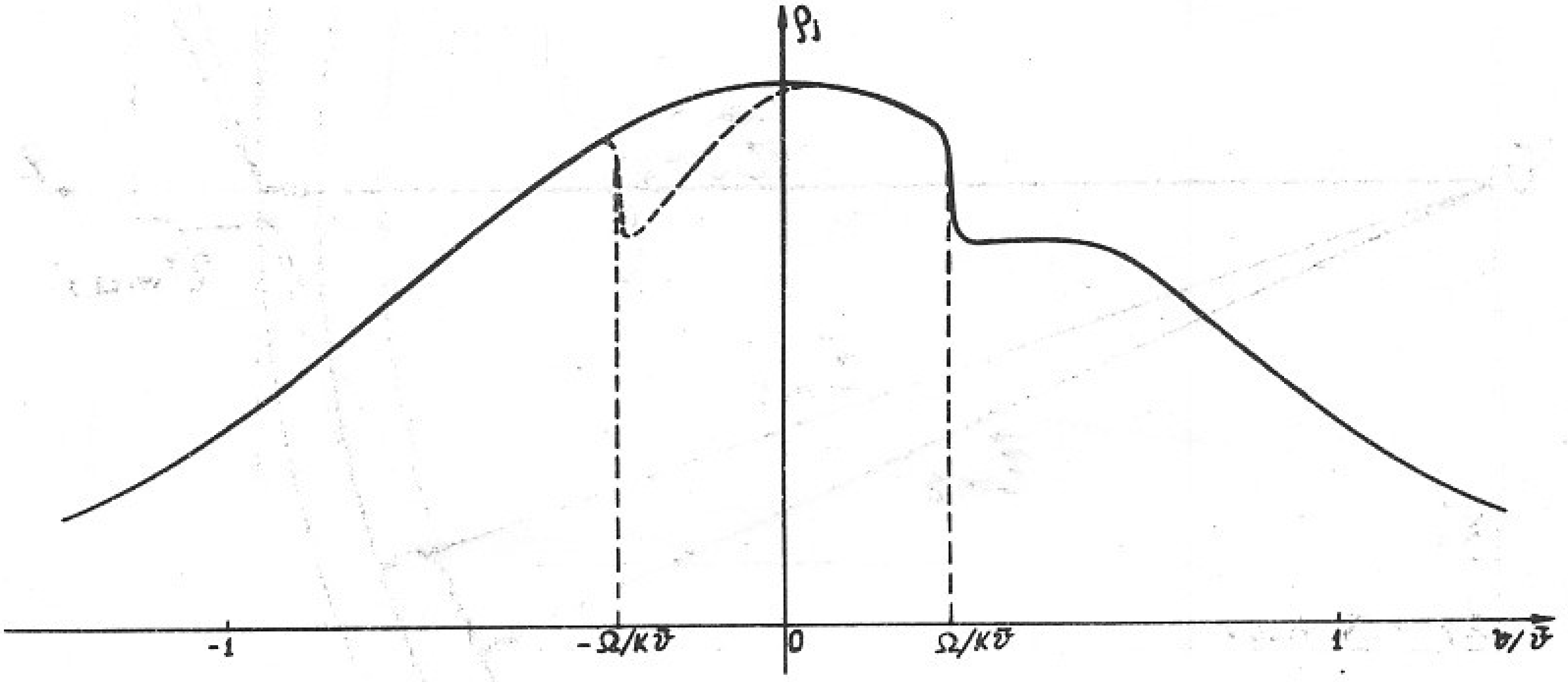

Рис. 5. Распределение по скоростям v полной заселенности уровня j при заданной скорости $u \gg \Gamma_j \, b, \Gamma b$ и $\Omega \neq 0$. Пунктиром показан "провал" Беннета, появляющийся при наличии встречной волны.

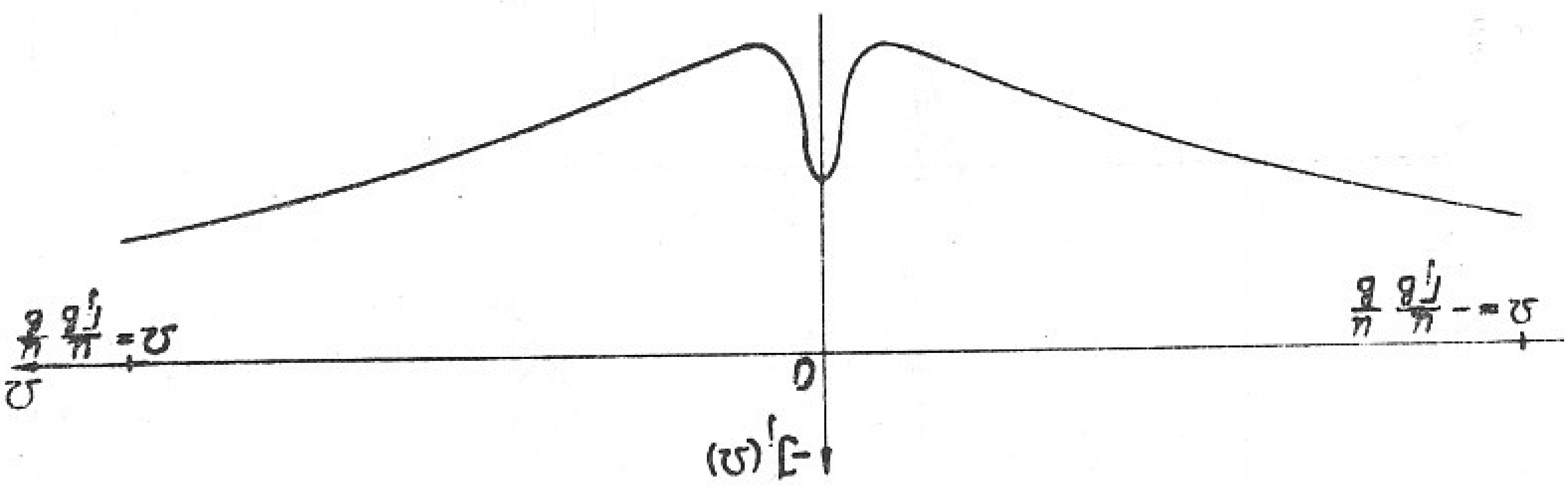

Рис. 6 . Вид "провала" Лэмба для ансамбля частиц с фиксированной скоростью $u \gg \Gamma_j b$ и максвелловским распределением по v . Ширина узкой структуры $\sim u/b$.

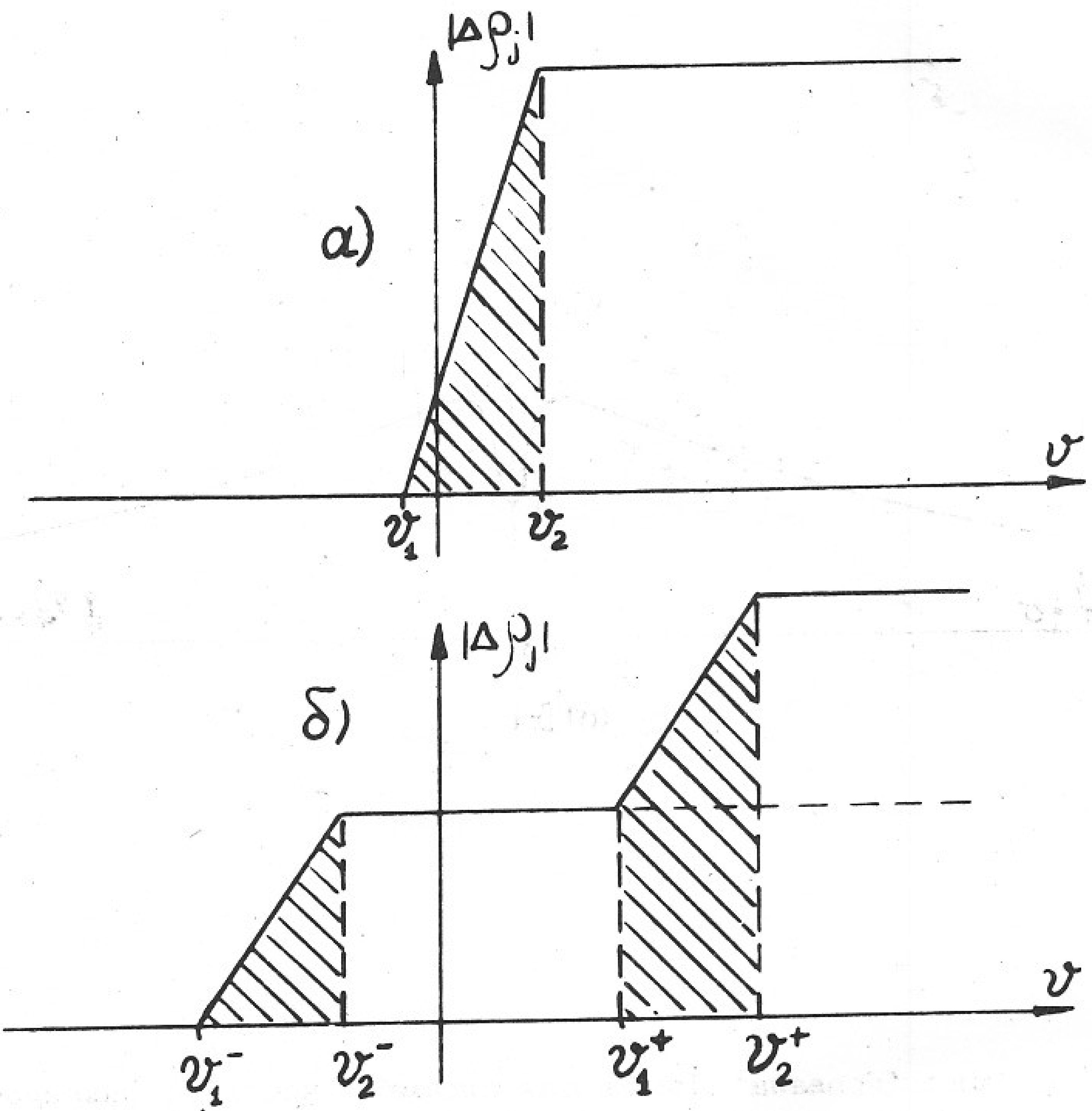

Рис. 7. Иллюстрация к объяснению узкой структуры в "провале" Лэмба. а) $\Omega = 0$; б) $\Omega \neq 0$.

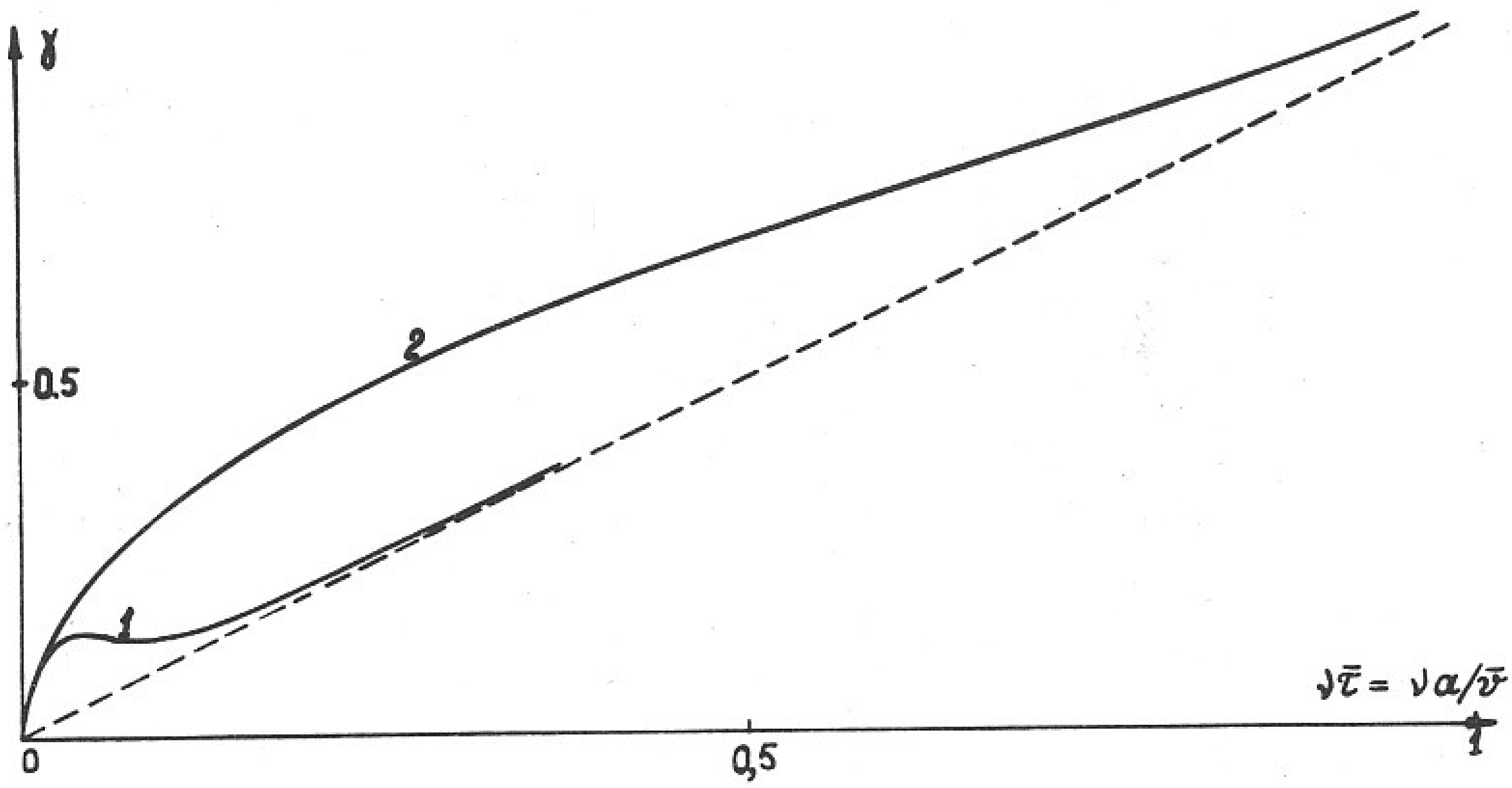

Рис.8. Пример качественных графиков зависимости ширины "провала" Лэмба от давления. Гауссов пучок: кривая 1 относится к области сильной угловой расходимости ($d/b \sim b/a \sim 10$), кривая 2 - к области "шейки". Модель релаксационных констант; $\Gamma_j = \Gamma \cong \nu$; ν -частота столкновений. Пунктиром показана зависимость $\gamma = \nu$.

Ответственный за выпуск Шалагин А.М.
Подписано к печати 10.5.72. МН 10284
Усл. 1,8 печ.л., тираж 200 экз.Бесплатно.
Заказ № 38. ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг.