1

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 39 - 72

Б.Г.Конопельченко

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛНОЙ КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ

Новосибирск

1972

Б.Г.Конопельченко

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛНОЙ КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ

А Н Н О Т А Ц И Я

Построены неприводимые представления полной конформной группы, редуцирующиеся на конечномерные или вырожденные унитарные бесконечномерные представления собственной конформной группы.

B.G.Konopelchenko

IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF THE FULL CONFORMAL GROUP

A b s t r a c t

Irreducible representations of the full conformal group are investigated. It is shown that there exist four types of reflections. The irreducible representations of the full conformal group which reduces to the irreducible finite-dimensional representations or irreducible degenerate unitary representations of the proper conformal group are constructed.

В последнее время проявляется значительный интерес к группе конформных преобразований в пространстве Минковского и к изоморфной ей группе $SO(2,4)$. Этот интерес связан в основном с использованием конформной группы в трех аспектах: во-первых, в качестве приближенной группы симметрии взаимодействий при высоких энергиях (см. например, /1-5/), во-вторых, в качестве динамической группы атома водорода и адронов /6-9/ и в третьих -для описания безмассовых частиц /10,11,12/.

В большинстве работ по конформной группе используется группа непрерывных (собственных) преобразований. Однако, уже при описании безмассовых полей выяснилось, что существует два класса полей. Уравнения полей первого класса инвариантны относительно только собственной конформной группы (спинорные поля) /13/. Уравнения полей второго класса инвариантны также относительно отражений (электромагнитное поле /10/. Кроме того, недавно был обнаружен ряд важных свойств дискретных преобразований /14/, /15/.

В связи с этим представляет интерес задача построения представлений полной конформной группы - группы непрерывных преобразований, дополненной дискретными преобразованиями.

Цель настоящей работы и состоит в построении неприводимых представлений полной конформной группы.

Поскольку отсутствует полная классификация представлений собственной конформной группы, мы ограничимся построением неприводимых представлений полной группы, которые редуцируются на конечномерные или унитарные вырожденные представления собственной группы. В нашем построении мы будем использовать классификацию конечномерных и вырожденных унитарных представлений группы непрерывных конформных преобразований, полученную в фундаментальной работе Яо /16/.

В части 1 рассматриваются полная конформная группа,полная группа $SO(2,4)$, полная группа $SU(2,2)$ и доказывается их изоморфизм. Во второй части выясняются трансформационные свойства операторов Казимира и базисов представлений собственной группы относительно отражений. В части III непосредственно строятся неприводимые конечномерные и неприводимые вырожденные унитарные бесконечномерные представления полной конформной группы.

Группа конформных преобразований пространства Минковского – 15-параметрическая группа, оставляющая инвариантными углы между линиями и содержащая (см., например, /17/).

1) лоренцевские вращения

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

2) сдвиги

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

3) специальные конформные преобразования

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} + c^{\mu}(x,x)}{1 + 2(c,x) + (c,c)(x,x)}$$

4) дилатацию

$$x'^{\mu} = e^{-\sigma} x^{\mu}$$

где x^{μ} ($\mu=0,1,2,3$) координаты пространства Минковского, $(x,x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ и $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}, a^{\mu}, c^{\mu}, \sigma$ -параметры соответствующих преобразований.

Генераторы $J_{\mu\nu}$, P_{μ}, K_{ν}, D (генераторы лоренцевских преобразований, сдвигов, специальных конформных преобразований и дилатации) конформной группы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned}
&[J_{\mu\nu}, J_{\rho\tau}] = i(g_{\mu\tau}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\tau} - g_{\mu\rho}J_{\nu\tau} - g_{\nu\tau}J_{\mu\rho}),\\
&[J_{\mu\nu}, P_{\rho}] = i(g_{\rho\nu}P_{\mu} - g_{\rho\mu}P_{\nu}),\\
&[J_{\mu\nu}, K_{\rho}] = i(g_{\rho\nu}K_{\mu} - g_{\rho\mu}K_{\nu}), \qquad (1.1)\\
&[P_{\mu}, K_{\nu}] = 2i(g_{\mu\nu}D + J_{\mu\nu}),\\
&[P_{\sigma}, D] = -iP_{\sigma}, \qquad [K_{\sigma}, D] = iK_{\sigma},\\
&[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0, \quad [K_{\mu}, K_{\nu}] = 0, \quad [J_{\mu\nu}, D] = 0.
\end{aligned}$$

где $g_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$.

Известно /10,17/, что конформную группу удобно изучать в шестимерной модели пространства Минковского. В этой модели рассматривается шестимерное пространство с метрикой $g_{AB} = (1,-1,-1,-1,-1,1)$ ($A, B = 0,1,2,3,5,6$).

Соответствие между шестимерным пространством и пространством Минковского устанавливается следующим образом: каждой образующей гиперконуса $y_A y_A = 0$ в шестимерном пространстве по формуле

$$x^{\mu} = \frac{y^{\mu}}{y_5 + y_6} \qquad (\mu = 0,1,2,3) \qquad (1.2)$$

сопоставляется точка x^{μ} пространства Минковского. Формула (1,2) позволяет установить соответствие между нелинейными конформными преобразованиями в пространстве Минковского и линейными преобразованиями в шестимерном пространстве /18/. Это соответствие является следствием изоморфизма конформной группы и группы $SO(2,4)$. Изоморфизм алгебр соответствующих групп легко установить следующим образом. Генераторы L_{AB} группы $SO(2,4)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[L_{AB}, L_{CD}] = i(g_{AD}L_{BC} + g_{BC}L_{AD} - g_{AC}L_{BD} - g_{BD}L_{AC}), \qquad (1.3)$$

где $g_{AB} = (1,-1,-1,-1,-1,1)$.

Переходя к новому базису

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}=L_{\mu\nu}\,,\ P_\mu=L_{5\mu}+L_{6\mu},\ K_\mu=L_{5\mu}-L_{6\mu},\ \mathcal{D}=L_{56} \tag{1.4}$$

убеждаемся, что генераторы $\mathcal{J}_{\mu\nu}$, P_μ, K_ν, $\mathcal{D}$ удовлетворяют соотношениям (1.1), что и доказывает изоморфизм алгебр.

Кроме соответствия между непрерывными преобразованиями, можно также установить соответствие между дискретными преобразованиями / 13 /. Используя формулу (1.2) и равенство $y_A y_A=0$, получаем

	y – пространство	x – пространство
T:	$y^{0\prime}=-y^0,\ y^{i\prime}=y^i,\ y^{5\prime}=y^5,\ y^{6\prime}=y^6$	$x^{0\prime}=-x^0,\quad x^{i\prime}=x^i,$
P:	$y^{0\prime}=y^0,\ y^{i\prime}=-y^i,\ y^{5\prime}=y^5,\ y^{6\prime}=y^6$	$x^{0\prime}=x^0,\quad x^{i\prime}=-x^i$
$\mathcal{L}$:	$y^{\prime\mu}=y^\mu,\ y^{5\prime}=-y^5,\ y^{6\prime}=y^6$	$x^{\prime\mu}=-\dfrac{x^\mu}{(x,x)}$
R:	$y^{\prime\mu}=y^\mu,\ y^{5\prime}=y^5,\ y^{6\prime}=-y^6$	$x^{\prime\mu}=\dfrac{x^\mu}{(x,x)}$

(1.5)

где i =1, 2, 3.

Из таблицы (1.5) видно, что в пространстве Минковского T и P – обычные отражения времени и координат, R –инверсия относительной единичной гиперсферы и $\mathcal{L}$ –инверсия с одновременным изменением знака всех координат. Очевидно, что остальные дискретные преобразования являются комбинациями T , P , $\mathcal{L}$ и R.

Перестановочные соотношения операторов дискретных преобразований с генераторами непрерывных преобразований следуют из формул (1.5) и имеют вид

1) x – пространство

$$T:\ I_T\mathcal{J}_{i0}I_T=-\mathcal{J}_{i0},\ I_T\mathcal{J}_{ik}I_T=\mathcal{J}_{ik}$$

$$I_T P_0 I_T=-P_0,\ I_T P_i I_T=P_i,\ I_T K_0 I_T=-K_0,\ I_T K_i I_T=K_i,\ I_T\mathcal{D}I_T=\mathcal{D};$$

$$P:\ I_P\mathcal{J}_{i0}I_P=-\mathcal{J}_{i0},\ I_P\mathcal{J}_{ik}I_P=\mathcal{J}_{ik},$$

$$I_P P_0 I_P=P_0,\ I_P P_i I_P=-P_i,\ I_P K_0 I_P=K_0,\ I_P K_i I_P=-K_i,\ I_P\mathcal{D}I_P=\mathcal{D};$$

$$\mathcal{L}:\quad I_{\mathcal{L}}\mathcal{J}_{\mu\nu}I_{\mathcal{L}}=\mathcal{J}_{\mu\nu},$$

$$I_{\mathcal{L}}P_\mu I_{\mathcal{L}}=-K_\mu,\ I_{\mathcal{L}}K_\mu I_{\mathcal{L}}=-P_\mu,\ I_{\mathcal{L}}\mathcal{D}I_{\mathcal{L}}=-\mathcal{D}; \tag{1.6}$$

$$R:\quad I_R\mathcal{J}_{\mu\nu}I_R=\mathcal{J}_{\mu\nu},$$

$$I_R P_\mu I_R=K_\mu,\ I_R K_\mu I_R=P_\mu,\ I_R\mathcal{D}I_R=-\mathcal{D}.$$

2) y – пространство

$$T:\ I_T L_{0A} I_T=-L_{0A},\ I_T L_{AB} I_T=L_{AB}\quad (A,B=1,2,3,5,6),$$

$$P:\ I_P L_{iA} I_P=-L_{iA},\ I_P L_{ik} I_P=L_{ik},\ I_P L_{AB} I_P=L_{AB}\ (A,B=0,5,6)(i,k=1,2,3)$$

$$\mathcal{L}:\ I_{\mathcal{L}}L_{5A}I_{\mathcal{L}}=-L_{5A},\ I_{\mathcal{L}}L_{AB}I_{\mathcal{L}}=L_{AB}\quad (A,B=0,1,2,3,6) \tag{1.7}$$

$$R:\ I_R L_{6A} I_R=-L_{6A},\ I_R L_{AB} I_R=L_{AB}\quad (A,B=0,1,2,3,5).$$

Совокупность перестановочных соотношений (1.1) и (1.6) определяет полную конформную группу в пространстве Минковского, а перестановочные соотношения (1.3) и (1.7) – полную группу $SO(2.4)$. Мы уже отмечали выше, что группа собственных конформных преобразований изоморфна $SO(2.4)$. Но кроме этого, нетрудно показать, что соотношения (1.6) и (1.7) переходят друг в друга при замене (1.4).

Таким образом, полная конформная группа изоморфна полной группе $SO(2.4)$.

Для того, чтобы иметь дело с однозначными представлениями группы $SO(2.4)$ перейдем к её накрывающей $SU(2,2)$. Генераторы $J_\pm, J_3, K_\pm, K_3, P_\pm, Q_\pm, S_\pm, T_\pm, \Lambda$ некомпактной группы $SU(2.2)$ удобно выразить через генераторы A^α_β ($\alpha, \beta = 1,2,3,4$) компактной группы $SU(4)$ /16/

$$
\begin{aligned}
&J_+ = A^2_1, \quad J_- = A^1_2, \quad J_3 = \tfrac{1}{2}(A^1_1 - A^2_2),\\
&K_+ = A^4_3, \quad K_- = A^3_4, \quad K_3 = \tfrac{1}{2}(A^3_3 - A^4_4),\\
&P_+ = iA^3_1, \quad P_- = iA^1_3, \quad Q_+ = iA^4_2, \quad Q_- = iA^2_4,\\
&S_+ = iA^4_1, \quad S_- = iA^1_4, \quad T_+ = iA^3_2, \quad T_- = iA^2_3,\\
&\Lambda = \tfrac{1}{2}(A^1_1 + A^2_2 - A^3_3 - A^4_4).
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Выразим генераторы группы $SU(2,2)$ через генераторы L_{AB} группы $SO(2,4)$. Используя (1,3), (1.8) и перестановочные соотношения $[A^\alpha_\beta, A^\gamma_\delta] = \delta^\alpha_\delta A^\gamma_\beta - \delta^\gamma_\beta A^\alpha_\delta$ получаем

$$
\begin{aligned}
&J_\pm = \tfrac{1}{2}\left[(L_{23} + L_{15}) \pm i(L_{31} + L_{25})\right],\\
&K_\pm = \tfrac{1}{2}\left[(L_{23} - L_{15}) \pm i(L_{31} - L_{25})\right],\\
&J_3 = \tfrac{1}{2}(L_{12} + L_{35}),\\
&K_3 = \tfrac{1}{2}(L_{12} - L_{35}),\\
&\Lambda = L_{06},\\
&P_\pm = \tfrac{1}{2}\left[(-L_{56} + L_{03}) \pm i(L_{05} + L_{36})\right],\\
&Q_\pm = \tfrac{1}{2}\left[(-L_{56} - L_{03}) \pm i(L_{05} - L_{36})\right],\\
&S_\pm = \tfrac{1}{2}\left[(L_{01} \pm iL_{02}) \pm i(L_{16} \pm iL_{26})\right],\\
&T_\pm = \tfrac{1}{2}\left[(L_{01} \mp iL_{02}) \pm i(L_{16} \mp iL_{26})\right].
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Группу $SU(2.2)$ как и $SO(2,4)$, можно дополнить дискретные преобразования до полной группы.

Перестановочные соотношения операторов отражений с генераторами группы $SU(2,2)$ вытекают из формул (1.7) и (1.9) и имеют вид

$$
\begin{aligned}
T:\quad &I_T J_\pm I_T = J_\pm, \; I_T J_3 I_T = J_3, \; I_T K_\pm I_T = K_\pm, \; I_T K_3 I_T = K_3,\\
&I_T P_\pm I_T = Q_\mp, \; I_T Q_\pm I_T = P_\mp, \; I_T S_\pm I_T = -T_\mp, \; I_T T_\pm I_T = -S_\mp,\\
&I_T \Lambda I_T = -\Lambda.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

$$\mathcal{P}: \quad I_P J_\pm I_P = K_\pm, \; I_P J_3 I_P = K_3, \; I_P K_\pm I_P = J_\pm, \; I_P K_3 I_P = J_3, \qquad (1.11)$$

$$I_P P_\pm I_P = Q_\pm, \; I_P Q_\pm I_P = P_\pm, \; I_P S_\pm I_P = -S_\pm, \; I_P T_\pm I_P = -T_\pm,$$

$$I_P \Lambda I_P = \Lambda .$$

$$\mathcal{L}: \quad I_L J_\pm I_L = K_\pm, \; I_L J_3 I_L = K_3, \; I_L K_\pm I_L = J_\pm, \; I_L K_3 I_L = J_3, \qquad (1.12)$$

$$I_L P_\pm I_L = -Q_\pm, \; I_L Q_\pm I_L = -P_\pm, \; I_L S_\pm I_L = S_\pm, \; I_L T_\pm I_L = T_\pm,$$

$$I_L \Lambda I_L = \Lambda .$$

$$R: \quad I_R J_\pm I_R = J_\pm, \; I_R J_3 I_R = J_3, \; I_R K_\pm I_R = K_\pm, \; I_R K_3 I_R = K_3, \qquad (1.13)$$

$$I_R P_\pm I_R = -Q_\mp, \; I_R Q_\pm I_R = -P_\mp, \; I_R S_\pm I_R = T_\mp, \; I_R T_\pm I_R = S_\mp,$$

$$I_R \Lambda I_R = -\Lambda .$$

Перестановочные соотношения (1.10–1.13) вместе с перестановочными соотношениями для генераторов непрерывных преобразований и определяют полную группу $SU(2,2)$, изоморфную полной группе $SO(2,4)$.

Для того, чтобы построить неприводимые представления полной группы $SU(2,2)$, мы будем действовать следующим образом. Используя соотношения (1.10–1,13), определяем как преобразуются операторы Казимира и базисы неприводимых представлений собственной группы $SU(2,2)$ при отражениях. Здесь возможны два случая: первый, когда операторы Казимира и базис неприводимого представления переходят сами в себя при отражениях и второй, когда операторы Казимира и базис переходят в операторы Казимира и базис другого, неэквивалентного первоначальному представления. В первом случае неприводимое представление будет одновременно неприводимым представлением и полной группы. Во втором случае, неприводимыми представлениями полной группы будут соответствующие прямые суммы представлений собственной группы.

Обратимся теперь к представлениям собственной группы $SU(2,2)$. Как показал Яо / 16 / полный набор коммутирующих операторов для $SU(2,2)$ состоит из девяти операторов C_2, C_3, C_4, $\vec{J}^2$, $\vec{K}^2$, J_3, K_3, Λ, F_3. Операторы Казимира C_2, C_3 и C_4 определяются формулами.

$$C_2 = 2(\vec{J}^2 + \vec{K}^2) + \Lambda(\Lambda+4) - 2(P_-P_+ + Q_-Q_+ + S_-S_+ + T_-T_+),$$

$$C_3 = -(\Lambda+2)(\vec{J}^2 - \vec{K}^2) +$$

$$+\left\{J_+(P_-T_+ + S_-Q_+) + J_-(T_-P_+ + Q_-S_+) + J_3(P_-P_+ - Q_-Q_+ + S_-S_+ - T_-T_+)\right\} \qquad (2.1)$$

$$+\left\{K_+(S_-P_+ + Q_-T_+) + K_-(P_-S_+ + T_-Q_+) + K_3(P_-P_+ - Q_-Q_+ - S_-S_+ + T_-T_+)\right\},$$

$$C_4 = \frac{1}{2}\Lambda(\Lambda+2)C_2 - \frac{1}{4}\Lambda(\Lambda-2)(\Lambda+2)(\Lambda+4) + 4\vec{\mathcal{J}}^2\cdot\vec{K}^2 -$$

$$- 2(\Lambda+1)F_3 + 4(P_-Q_- - S_-T_-)(P_+Q_+ - S_+T_+) +$$

$$+ 4\Big\{\big[\mathcal{J}_+K_+S_-T_+ + \mathcal{J}_+K_-P_-Q_+ + \mathcal{J}_-K_+Q_-P_+ + \mathcal{J}_-K_-T_-S_+\big] +$$

$$+ \mathcal{J}_3\big[K_+(S_-P_+ - Q_-T_+) + K_-(P_-S_+ - T_-Q_+)\big] + K_3\big[\mathcal{J}_+(P_-T_+ - S_-Q_+) +$$

$$+ \mathcal{J}_-(T_-P_+ - Q_-S_+)\big] + \mathcal{J}_3K_3(P_-P_+ + Q_-Q_+ - S_-S_+ - T_-T_+)\Big\}$$

где $\vec{\mathcal{J}}^2 = \mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + \mathcal{J}_3^2$ и $\vec{K}^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2$.

Оператор F_3 имеет вид

$$F_3 = -(\Lambda+2)(\vec{\mathcal{J}}^2 + \vec{K}^2) + \tag{2.2}$$

$$+ \big\{\mathcal{J}_+(P_-T_+ + S_-Q_+) + \mathcal{J}_-(T_-P_+ + Q_-S_+) + \mathcal{J}_3(P_-P_+ - Q_-Q_+ + S_-S_+ - T_-T_+)\big\}$$

$$- \big\{K_+(S_-P_+ + Q_-T_+) + K_-(P_-S_+ + T_-Q_+) + K_3(P_-P_+ - Q_-Q_+ - S_-S_+ + T_-T_+)\big\}$$

.

Операторы $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$, K_1 , K_2, K_3 , Λ определяются формулами (1.8).

Таким образом, базис представления с фиксированными C_2 , C_3 , C_4 нумеруется шестью числами j , μ ; κ , ν ; λ; α ,которые являются собственными значениями коммутирующих операторов

$$\vec{\mathcal{J}}^2 |j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle = j(j+1)|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle,$$

$$\mathcal{J}_3 |j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle = \mu|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle,$$

$$\vec{K}^2 |j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle = \kappa(\kappa+1)|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle$$

$$K_3 |j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle = \nu|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle \tag{2.3}$$

$$\Lambda |j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle = \lambda|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle$$

$$F_3 |j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle = \alpha|j,\mu;\kappa,\nu;\lambda;\alpha\rangle$$

Для того, чтобы полностью фиксировать представление группы $SU(2,2)$ необходимо задать не только значение операторов Казимира C_2 , C_3 , C_4 , но и спектр величин j , κ , λ , α нумерующих базис представления. Это свойство характерно и для других некомпактных групп (например, группа $SO(2,1)$ /19/, в то время как для компактных групп, представление полностью задается значениями операторов Казимира.

Определим перестановочные соотношения операторов отражений с девятью коммутирующими операторами. Из формул (1.10-1.13) и (2.1-2.2) получаем для T и R -отражений:

$$I\,C_2\,I = C_2\,,\quad I\,C_3\,I = -C_3\,,\quad I\,C_4\,I = C_4\,,$$

$$I\,F_3\,I = F_3\,,\qquad I\,\Lambda\,I = -\Lambda\,, \tag{2.4}$$

$$I\,\vec{\mathcal{J}}^2 I = \vec{\mathcal{J}}^2,\quad I\,\vec{K}^2 I = \vec{K}^2,\quad I\,\mathcal{J}_3\,I = \mathcal{J}_3,\quad I\,K_3\,I = K_3,$$

где I –либо I_T, либо I_R
и для $P, \mathcal{L}$ –отражений

$$
\begin{gathered}
I C_2 I = C_2, \; I C_3 I = -C_3, \; I C_4 I = C_4, \\
I F_3 I = F_3, \quad I \Lambda I = \Lambda,
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

$$
I \vec{J}^2 I = \vec{K}^2, \; I \vec{K}^2 I = \vec{J}^2, \; I J_3 I = K_3, \; I K_3 I = J_3,
$$

где I –либо I_P, либо $I_{\mathcal{L}}$.

Формулы (2.4) и (2.5) дают возможность определить как преобразуются базисы представлений при отражениях. Действительно, учитывая (2.3), можно показать, что элемент базиса $|j,\mu;k,\nu;\lambda;\alpha\rangle$ при T, R отражениях преобразуется следующим образом

$$
|j,\mu;k,\nu;\lambda;\alpha\rangle \to |j,\mu;k,\nu;-\lambda;\alpha\rangle
$$

а при $P, \mathcal{L}$ – отражениях

$$
|j,\mu;k,\nu;\lambda;\alpha\rangle \to |k,\nu;j,\mu;\lambda,\alpha\rangle
$$

Таким образом, некоторое представление $\mathcal{D}$ собственной группы $SU(2,2)$, задаваемое операторами Казимира C_2, C_3, C_4 и спектром величины j, k, λ, α при отражениях переходит в представление $\mathcal{D}'$, для которого $C_2' = C_2$, $C_3' = -C_3$, $C_4' = C_4$ и спектр величин $j', k', \lambda', \alpha'$ получается из спектра первоначального представления заменой для T, R –отражений.

$$
j' = j; \; k' = k; \; \lambda' = -\lambda; \; \alpha' = \alpha \tag{2.6}
$$

и для $P, \mathcal{L}$ –отражений

$$
j' = k; \; k' = j; \; \lambda' = \lambda; \; \alpha' = \alpha. \tag{2.7}
$$

Здесь возможны два случая. Первый, когда $C_3' = C_3$, т.е. $C_3' = -C_3 = 0$ и спектр величин $j', k', \lambda', \alpha'$ совпадает со спектром величин j, k, λ, α и второй, когда $C_3' = -C_3 \neq 0$ (или = 0), а спектр величин $j', k', \lambda', \alpha'$ не совпадает со спектром j, k, λ, α. В первом случае неприводимое представление $\mathcal{D}$ собственной группы является также и неприводимым представлением полной группы. Во втором случае неприводимым представлением полной группы будет прямая сумма представлений $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$ (если, конечно, $\mathcal{D}'$ переходит в $\mathcal{D}$ при отражении).

III

Перейдем к непосредственному построению неприводимых представлений группы $SU(2,2)$, дополненной отражениями.

Мы будем рассматривать как вырожденные, так и невырожденные неприводимые конечномерные представления и только вырожденные унитарные, бесконечномерные неприводимые представления собственной группы $SU(2,2)$. Вырожденными называются те представления группы $SU(2,2)$, в которых при редукции по максимально компактной подгруппе $SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ каждое представление последней возникает не более одного раза. Для вырожденных представлений только один или два оператора Казимира являются независимыми и базис нумеруется величинами $j, \mu; k, \nu, \lambda$, а величина α становится излишней.

Начнем с неприводимых конечномерных представлений. Согласно /6/ эти представления задаются тремя числами j_m, k_m, s_m, которые могут принимать значения

$$
j_m, k_m = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots, \quad s_m = 0,1,2,3 \ldots
$$

Операторы Казимира для представления $\mathcal{D}(j_m, k_m, s_m)$ равны

$$
\begin{gathered}
C_2 = 2 j_m(j_m+1) + 2 k_m(k_m+1) + \lambda_m(\lambda_m+4), \\
C_3 = -(\lambda_m+2)(j_m-k_m)(j_m+k_m+1), \\
C_4 = \tfrac{1}{4}\left[(\lambda_m+2)^2 - 4 j_m(j_m+1)\right]\left[(\lambda_m+2)^2 - 4 k_m(k_m+1)\right] - (\lambda_m+2)^2
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

где $\lambda_m = S_m + j_m + K_m$

Размерность этого представления определяется по формуле

$$D(j_m, K_m, S_m) = \frac{1}{2!\,3!}(2j_m+1)(2K_m+1)(S_m+1)\times$$

$$\times(2j_m+S_m+2)(2K_m+S_m+2)(2j_m+2K_m+S_m+3).$$

Спектр величин $p=j+K,\ q=j-K,\ \lambda$ для различных представлений $\mathcal{D}(j_m, K_m, S_m)$ задается следующими соотношениями:

Вырожденные представления

Класс I. $S_m = 1, 2, 3, \ldots,$

1) $j_m = 0,\ K_m = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots,$

$$\begin{gathered} p = p_m + S, \\ -S_m + S \le q + \lambda \le S_m - S \\ -2p_m - S_m + S \le q - \lambda \le 2p_m + S_m - S \end{gathered} \tag{3,2}$$

где $p_m = j_m + K_m$ и $S = 0, 1, 2, \ldots, S_m$

2) $K_m = 0,\ j_m = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots,$

Спектр j, K, λ получается из (3,2) заменой $q \to -q$

3) $j_m = K_m$

Спектр дается формулами (3,2) с $p_m = 0$ и $q = 0$.

Класс II. $S_m = 0,\ j_m, K_m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots,$

1) $j_m > K_m$

Спектр величин j, K, λ имеет вид

$$\begin{gathered} p = j_m - K_m + \gamma \\ -2(j_m - K_m) - \gamma \le q + \lambda \le 2(j_m - K_m) + \gamma \\ -\gamma \le q - \lambda \le \gamma \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\gamma = 0, 1, 2, \ldots, 2K_m.$

2) $K_m > j_m$

Соотношения (3,3) с заменой $j_m \leftrightarrow K_m$, $q \to -q$

3) $K_m = j_m$

Формула (3,3) с $j_m = K_m$

Невырожденные представления

Класс III. $S_m = 1, 2, 3, \ldots;\ j_m, K_m = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$

1) $j_m > K_m$

$$\left.\begin{gathered} p = j_m - K_m + S \\ -2(j_m - K_m) - S_m - S \le q + \lambda \le 2(j_m - K_m) + S_m + S \\ -S_m - S \le q - \lambda \le S_m + S \\ |q| \le p \end{gathered}\right\} \ldots$$

$$p = j_m + k_m + \gamma$$

$$-(2j_m + s_m) + \gamma \le q + \lambda \le 2j_m + s_m - \gamma$$

$$-(2k_m + s_m - \gamma) \le q - \lambda \le 2k_m + s_m - \gamma \qquad (3.4)$$

$$|q| \le p_m$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots, 2k_m$; $\gamma = 0, 1, \ldots, s_m$.

2) $k_m > j_m$

Соотношения (3,4) с заменой $j_m \leftrightarrow k_m$, $q \to -q$

3) $j_m = k_m$

Соотношения (3.4) с $j_m = k_m$

Поскольку в силу (2.6) и (2.7) при T, R отражениях

$$p \to p, \quad q \to q, \quad \lambda \to -\lambda,$$
$$p_m \to p_m, \quad q_m \to q_m, \quad \lambda_m \to -\lambda_m \qquad (3.5)$$

а при P, L - отражениях

$$p \to p, \quad q \to -q, \quad \lambda \to \lambda,$$
$$p_m \to p_m, \quad q_m \to -q_m, \quad \lambda_m \to \lambda_m \qquad (3.6)$$

мы видим, учитывая (3.1)-(3.4), что при отражениях T, P, L, R представление $D(j_m, k_m, s_m)$ $(j_m \ne k_m)$ переходит в представление $D(k_m, j_m, s_m)$, а представление $D(j_m, j_m, s_m)$ переходит в самое себя.

Таким образом, существует два типа неприводимых конечномерных представлений полной группы $SU(2,2)$. Представление

первого типа совпадают с представлениями $D(j_m, j_m, s_m)$ собственной группы, представления второго типа являются прямыми суммами

$$D(j_m, k_m, s_m) \oplus D(k_m, j_m, s_m) \qquad (j_m \ne k_m)$$

неприводимых представлений собственной группы.

Обратимся теперь к вырожденным неприводимым унитарным бесконечномерным представлениям. Рассмотрим, следуя /16/, все 14 серий вырожденных унитарных представлений.

<u>1 серия</u>.

В этой серии содержится два типа представлений $D(\rho, \pm 2n)$ и $D(\rho, \pm(2n+1))$, для которых операторы Казимира равны

$$C_2 = -4 - \rho^2, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{1}{4}\rho^2 + \rho^4 \qquad (0 < \rho < \infty)$$

и спектр j, k, λ имеет вид.

1) Представление $D(\rho, \pm 2n)$

$$p + \lambda = \pm 2n, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\left.\begin{matrix} p = 2s \\ q = 0 \\ \lambda = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \end{matrix}\right\} \ldots \left.\begin{matrix} p = 2s + 1 \\ q = 0 \\ \lambda = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{matrix}\right\} \qquad (3.7)$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots$ и знак + соответствует представлению $D(\rho, +2n)$, знак (-) - представлению $D(\rho, -2n)$.

2) Представление $D(\rho, \pm(2n+1))$

$$p + \lambda = \pm(2n+1) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\left.\begin{aligned} p &= 2s \\ q &= 0 \\ \lambda &= \pm 1, \pm 3, \ldots \end{aligned}\right\} \ldots \qquad \begin{aligned} p &= 2s+1 \\ q &= 0 \\ \lambda &= 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots$

Из формул (3,5), (3,6) и (3 ,7), (3,8) следует, что при T, R отражениях

$$\mathcal{D}(\rho, \pm 2n) \to \mathcal{D}(\rho, \mp 2n), \mathcal{D}(\rho, \pm(2n+1)) \to \mathcal{D}(\rho, \mp(2n+1)),$$

и при $P, \mathcal{L}$ - отражениях

$$\mathcal{D}(\rho, \pm 2n) \to \mathcal{D}(\rho, \pm 2n), \mathcal{D}(\rho, \pm(2n+1)) \to \mathcal{D}(\rho, \pm(2n+1)).$$

Следовательно, неприводимыми представлениями группы $SU(2,2) \subset P$ или $\mathcal{L}$ отражениями (группы $SU(2,2)+P,\mathcal{L}$) являются представления $\mathcal{D}(\rho \pm 2n)$, $\mathcal{D}(\rho, \pm(2n+1))$ собственной группы. Неприводимыми представлениями группы $SU(2,2)$ с T или R отражениями (группы $SU(2,2)+T,R$) являются прямые суммы представлений

$$\mathcal{D}(\rho, +2n) \oplus \mathcal{D}(\rho, -2n), \quad \mathcal{D}(\rho, +(2n+1)) \oplus \mathcal{D}(\rho, -(2n+1))$$

II серия.

Для двух типов представлений $\mathcal{D}(\sigma, \pm(2n+1))$ этой серии

$$C_2 = -4 + \sigma^2, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{1}{4}\sigma^4 - \sigma^2 \quad (0 \le \sigma < 1)$$

и спектр имеет вид (3.8).

Из формул (3,5) и (3.6) заключаем, что неприводимыми представлениями группы $SU(2,2)+P,\mathcal{L}$ являются представления $\mathcal{D}(\sigma, \pm(2n+1))$ собственной группы, а неприводимыми представлениями группы $SU(2,2)+T,R$ прямые суммы

$$\mathcal{D}(\sigma, +(2n+1)) \oplus \mathcal{D}(\sigma, -(2n+1))$$

III и IУ ($\mathcal{D}^-$ и $\mathcal{D}^+$) серии.

В $\mathcal{D}^-$ серии содержится два типа представлений $\mathcal{D}^-(p_0, \lambda_0, \pm)$ операторы Казимира, которых равны

$$C_2 = 2(p_0-1)(p_0+2) + (\lambda_0+2)^2$$

$$C_3 = \pm(\lambda_0+2) p_0 (p_0+1)$$

$$C_4 = \frac{1}{4}(\lambda_0+2)^4 - (\lambda_0+2)^2(p_0^2+p_0+1)$$

где $p_0 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots,$ и $\lambda_0 = -p_0-2, -p_0-3, -p_0-4, \ldots$

Спектр величин j, k, λ для представления $\mathcal{D}^-(p_0, \lambda_0, +)$ имеет вид

$$p = p_0 + s, \quad q = -p_0 + \gamma, \quad \lambda = \lambda_0 - \gamma - 2t - s, \tag{3.9}$$

где $0 \le \gamma \le 2p_0; \quad s, t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

а для представления $\mathcal{D}^-(p_0, \lambda_0, -)$ спектр дается формулой (3.9) с заменой $q \to -q$.

В $\mathcal{D}^+$ серии также имеется два типа представлений $\mathcal{D}^+(p_0, \lambda_0, \pm)$, для которых

$$C_2 = 2(p_0-1)(p_0+2) + (\lambda_0-2)^2,$$

$$C_3 = \pm(\lambda_0-2) p_0(p_0+1),$$

$$C_4 = \frac{1}{4}(\lambda_0-2)^4 - (\lambda_0-2)^2(p_0^2+p_0+1)$$

где $\rho_0 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ и $\lambda_0 = \rho_0 + 2, \rho_0 + 3, \ldots$

Спектр j, k, λ для представления $\mathcal{D}^+(\rho_0, \lambda_0, +)$ задается соотношениями

$$p = \rho_0 + s, \quad q = -\rho_0 + \gamma, \quad \lambda = \lambda_0 + \gamma + 2t + s \tag{3.10}$$

где $0 \le \gamma \le 2\rho_0$; $s, t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

а для представлений $\mathcal{D}^+(\rho_0, \lambda_0, -)$ формулой (3.10) с заменой $q \to -q$.

Поскольку при T, R отражениях $p \to p,\ q \to q,\ \lambda \to -\lambda$, а при $P, \mathcal{L}$ -отражениях $p \to p,\ q \to -q,\ \lambda \to \lambda$, мы заключаем из формул (3.9) и (3.10), что при T, R отражениях

$$\mathcal{D}^-(\rho_0, \lambda_0, \pm) \to \mathcal{D}^+(\rho_0, -\lambda_0, \pm)\ ;\ \mathcal{D}^+(\rho_0, \lambda_0, \pm) \to \mathcal{D}^-(\rho_0, -\lambda_0, \pm)$$

и при $P, \mathcal{L}$ -отражениях

$$\mathcal{D}^\pm(\rho_0, \lambda_0, \pm) \to \mathcal{D}^\pm(\rho_0, \lambda_0, \mp)$$

Следовательно, неприводимыми представлениями группы $SU(2,2) + T, R$ являются прямые суммы

$$\mathcal{D}^-(\rho_0, \lambda_0, +) \oplus \mathcal{D}^+(\rho_0, -\lambda_0, +)\ ;\ \mathcal{D}^-(\rho_0, \lambda_0, -) \oplus \mathcal{D}^+(\rho_0, -\lambda_0, -),$$

а группы $SU(2,2) + P, \mathcal{L}$

$$\mathcal{D}^\pm(\rho_0, \lambda_0, +) \oplus \mathcal{D}^\pm(\rho_0, \lambda_0, -)$$

<u>У и У1 серии.</u>

В У серии содержится два типа представлений $\mathcal{D}^{\overline{V}}(\rho_0, \pm)$, для которых

$$C_2 = \rho_0^2 - \frac{9}{2}, \quad C_3 = \pm \frac{1}{4}\rho_0, \quad C_4 = \frac{1}{4}\rho_0^4 - \frac{3}{4}\rho_0^2$$

где $\rho_0 = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

и спектр j, k, λ для представлений $\mathcal{D}^{\overline{V}}(\rho_0, +)$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} p &= \rho_0 \\ q &= \gamma \\ \lambda &= \gamma \end{aligned}\right\} \ldots \quad \begin{aligned} &p = \rho_0 + s \\ &q = \gamma \quad , \quad q = \rho_0 + t \\ &-s + \gamma \le \lambda \le s + \gamma\ ,\ -s + \rho_0 + t \le \lambda \le s + \rho_0 - t \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $\gamma = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \rho_0$; $t = 1, 2, \ldots, s$; $s = 1, 2, 3, \ldots$

Спектр j, k, λ для представлений $\mathcal{D}^{\overline{V}}(\rho_0, -)$ дается формулой (3.11) с заменой $q \to -q$.

В У1 серии также имеется два типа представлений $\mathcal{D}^{\overline{VI}}(\rho_0, \pm)$. Операторы Казимира для этих представлений равны

$$C_2 = \rho_0^2 - \frac{9}{2}, \quad C_3 = \pm \frac{1}{4}\rho_0, \quad C_4 = \frac{1}{4}\rho_0^4 - \frac{3}{4}\rho_0^2$$

где $\rho_0 = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

Спектр j, k, λ определяется соотношениями (3.11) с заменой $q \to -q,\ \lambda \to -\lambda$ для представлений $\mathcal{D}^{\overline{VI}}(\rho_0, +)$ и с заменой $\lambda \to -\lambda$ для представлений $\mathcal{D}^{\overline{VI}}(\rho_0, -)$.

Сравнивая операторы Казимира и спектры величин j, k, λ разных представлений, заключаем, что неприводимыми представлениями группы $SU(2,2) + T, R$ являются прямые суммы

$$\mathcal{D}^{\overline{V}}(\rho_0, \pm) \oplus \mathcal{D}^{\overline{VI}}(\rho_0, \mp)$$

а группы $SU(2,2)+P,\mathcal{L}$

$$\mathcal{D}^{\overline{V}}(p_0,+)\oplus\mathcal{D}^{\overline{V}}(p_0,-)\quad;\quad \mathcal{D}^{\overline{VI}}(p_0,+)\oplus\mathcal{D}^{\overline{VI}}(p_0,-).$$

<u>УII и УIII серии.</u>

Два типа представлений $\mathcal{D}^{\overline{VII}}(p_0,\pm)$ $\overline{VII}$ серии и два типа представлений $\mathcal{D}^{\overline{VIII}}(p_0,\pm)$ $\overline{VIII}$ серии имеют операторы Казимира

$$C_2=p_0^2-4,\quad C_3=0,\quad C_4=\frac{1}{4}p_0^4-p_0^2\quad (p_0=1,2,3,\ldots)$$

Спектр величин j,k,λ для представления $\mathcal{D}^{\overline{VII}}(p_0,+)$ имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} p=p_0\\ q=-\gamma\\ \lambda=\gamma\end{array}\right\}\ldots\quad \begin{array}{ll} & p=p_0+s\\ q=-\gamma\ , & q=-(p_0+t)\\ -s+\gamma\le\lambda\le s+\gamma\ , & -s+p_0+t\le\lambda\le s+p_0-t\end{array}\qquad (3.12)$$

где $\gamma=1,2,3,\ldots,p_0\ ;\ t=1,2,\ldots,s\ ;\ s=1,2,3,\ldots$

Спектр j,k,λ для представлений $\mathcal{D}^{\overline{VII}}(p_0,-)$ получается из (3.12) заменой $q\to-q$, для представлений $\mathcal{D}^{\overline{VIII}}(p_0,+)$ заменой $q\to-q,\ \lambda\to-\lambda$ и для представлений $\mathcal{D}^{\overline{VIII}}(p_0,-)$ – заменой $\lambda\to-\lambda$.

Из сравнения спектров для различных представлений следует, что неприводимыми представлениями группы $SU(2,2)+T,R$ являются прямые суммы

$$\mathcal{D}^{\overline{VII}}(p_0,\pm)\oplus\mathcal{D}^{\overline{VIII}}(p_0,\mp)$$

а группы $SU(2,2)+P,\mathcal{L}$

$$\mathcal{D}^{\overline{VII}}(p_0,+)\oplus\mathcal{D}^{\overline{VII}}(p_0,-)\ ;\ \mathcal{D}^{\overline{VIII}}(p_0,+)\oplus\mathcal{D}^{\overline{VIII}}(p_0,-).$$

<u>IX серия.</u>

Для представлений $\mathcal{D}^{\overline{IX}}(p_0)$ этой серии операторы Казимира равны

$$C_2=p_0^2-4\ ,\ C_3=0\ ,\ C_4=\frac{1}{4}p_0^4-p_0^2\quad (p_0=1,2,3,\ldots)$$

и спектр j,k,λ имеет вид

$$p=p_0+s\ ,\quad q=0\ ,\quad -s\le\lambda\le s\ ;\quad s=0,1,2,3,\ldots$$

Следовательно, каждое представление $\mathcal{D}^{\overline{IX}}(p_0)$ является также и неприводимым представлением как группы $SU(2,2)+T,R$, так и группы $SU(2,2)+P,\mathcal{L}$.

<u>X серия.</u>

Эта серия содержит единственное представление, для которого $C_2=-4,\ C_3=0,\ C_4=0$

и спектр j,k,λ имеет вид

$$p=s,\quad q=0,\quad -s\le\lambda\le s\qquad s=0,1,2,3,\ldots$$

Очевидно, что это представление собственной группы является одновременно и неприводимым представлением полной группы.

<u>XI и XII серии.</u> (E^+ и E^- серии).

В каждой из этих серий содержится по два типа представлений $E^{\pm}(p_0,\pm)$, операторы Казимира которых равны соответственно, для представлений $E^+(p_0,\pm)$

$$C_2=3(p_0^2-1),\ C_3=\mp p_0(p_0^2-1),\ C_4=-\frac{3}{4}(p_0^2-1)^2\ (p=0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},\ldots)$$

и для представлений $E^-(p_0,\pm)$

$$C_2 = 3(p_0^2-1),\quad C_3=\pm p_0(p_0^2-1),\quad C_4=-\frac{3}{4}(p_0^2-1)^2 \quad (p_0=0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},\dots)$$

Спектры величин j,k,λ имеют вид: для представлений $E^+(p_0,\pm)$

$$p=p_0+s,\quad q=\pm p_0,\quad \lambda=p_0+s,\quad s=0,1,2,3,\dots$$

и для представлений $E^-(p_0,\pm)$

$$p=p_0+s,\quad q=\pm p_0,\quad \lambda=-p_0-s,\quad s=0,1,2,3,\dots$$

Неприводимыми представлениями группы $SU(2,2)+T,R$ являются, следовательно, прямые суммы

$$E^+(p_0,+)\oplus E^-(p_0,+)\ ;\quad E^+(p_0,-)\oplus E^-(p_0,-)$$

а группы $SU(2,2)+P,\mathcal{L}$

$$E^+(p_0,+)\oplus E^+(p_0,-)\ ;\quad E^-(p_0,+)\oplus E^-(p_0,-)\ .$$

Отметим, что представления $E^{\pm}(p_0,\pm)$ этих двух серий описывают безмассовые частицы со спиральностью $t=\pm p_0$ /16,20/. Представления $E^{\pm}(0)$ содержат весь спектр состояний атома водорода /9/ и могут быть использованы также для построения таблицы химических элементов из групповых соображений /21/.

ХШ серия.

В этой серии имеется два типа представлений $\mathcal{D}(p_0,\rho,\pm)$, для которых

$$C_2=p_0^2-2\rho^2-\frac{9}{2},\quad C_3=\pm p_0\left(\rho^2+\frac{1}{4}\right),\quad C_4=\frac{1}{4}p_0^4+p_0^2\left(\rho^2-\frac{3}{2}\right)$$

где $p_0=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\dots\ ;\quad 0<\rho<\infty$

Спектр j,k,λ для представлений $\mathcal{D}(p_0,\rho,+)$ имеет вид

$$p=p_0+s,\quad -2p_0-s\le q+\lambda\le 2p_0+s,\quad -s\le q-\lambda\le s\quad (s=0,1,2,\dots) \tag{3.13}$$

а для представлений $\mathcal{D}(p_0,\rho,-)$ (3.13) с заменой $\lambda\to-\lambda$.

Из формулы (3.13) следует, что неприводимым представлением как группы $SU(2,2)+T,R$, так и группы $SU(2,2)+P,\mathcal{L}$ является прямая сумма

$$\mathcal{D}(p_0,\rho,+)\oplus\mathcal{D}(p_0,\rho,-)$$

Х1У серия.

Для двух типов представлений $\mathcal{D}(p_0,\sigma,\pm)$ этой серии имеем

$$C_2=p_0^2+2(\sigma-1)(\sigma+2),\quad C_3=\pm p_0\sigma(\sigma+1),\quad C_4=\frac{1}{4}p_0^4-p_0^2(\sigma^2+\sigma+1)$$

где $p_0=1,2,3,\dots\ ;\quad -1<\sigma<0$

Спектр j,k,λ для представлений $\mathcal{D}(p_0,\sigma,\pm)$ совпадает со спектром для $\mathcal{D}(p_0,\rho,\pm)$ с той разницей, что теперь $p_0=0,1,2,3,\dots$

Аналогично с XIII серией получаем, что неприводимыми представлениями полной группы являются прямые суммы

$$\mathcal{D}(p_0,\sigma,+)\oplus\mathcal{D}(p_0,\sigma,-)$$

Таким образом, мы построили неприводимые конечномерные и вырожденные унитарные бесконечномерные представления полной группы $SU(2,2)$, а следовательно, и полной конформной группы. Полученные результаты приведены в таблице.

Отметим в заключении, что неприводимые представления общей конформной группы, т.е. собственной группы дополненной всеми возможными отражениями, также можно построить рассмотренным выше методом. Например, неприводимыми представлениями общей конформной группы, редуцирующимися в представления XI и XII серий собственной группы, являются прямые суммы

$$E^+(\rho_0,+)\oplus E^+(\rho_0,-)\oplus E^-(\rho_0,+)\oplus E^-(\rho_0,-).$$

Автор благодарен Ю.Б.Румеру за полезные обсуждения.

Неприводимые представления $SU(2,2)$	Неприводимые представления $SU(2,2)+T, R$	Неприводимые представления $SU(2,2)+P, L$
1	2	3
0. $\mathcal{D}(j_m, k_m, s_m)$ $(j_m \neq k_m)$ $\mathcal{D}(j_m, j_m, s_m)$	$\mathcal{D}(j_m,k_m,s_m)\oplus\mathcal{D}(k_m,j_m,s_m)$ $\mathcal{D}(j_m, j_m, s_m)$	$\mathcal{D}(j_m,k_m,s_m)\oplus\mathcal{D}(k_m,j_m,s_m)$ $\mathcal{D}(j_m, j_m, s_m)$
1. $\mathcal{D}(\rho, \pm 2n)$ $\mathcal{D}(\rho, \pm(2n+1))$	$\mathcal{D}(\rho,+2n)\oplus\mathcal{D}(\rho,-2n)$ $\mathcal{D}(\rho,+(2n+1))\oplus\mathcal{D}(\rho,-(2n+1))$	$\mathcal{D}(\rho, \pm 2n)$ $\mathcal{D}(\rho, \pm(2n+1))$
2. $\mathcal{D}(\sigma, \pm(2n+1))$	$\mathcal{D}(\sigma,+(2n+1))\oplus\mathcal{D}(\sigma,-(2n+1))$	$\mathcal{D}(\sigma, \pm(2n+1))$
3. $\mathcal{D}^-(\rho_0,\lambda_0,\pm)$ 4. $\mathcal{D}^+(\rho_0,\lambda_0,\pm)$	$\mathcal{D}^-(\rho_0,\lambda_0,\pm)\oplus\mathcal{D}^+(\rho_0,-\lambda_0,\pm)$	$\mathcal{D}^-(\rho_0,\lambda_0,+)\oplus\mathcal{D}^-(\rho_0,\lambda_0,-)$ $\mathcal{D}^+(\rho_0,\lambda_0,+)\oplus\mathcal{D}^+(\rho_0,\lambda_0,-)$
5. $\mathcal{D}^{V}(\rho_0,\pm)$ 6. $\mathcal{D}^{VI}(\rho_0,\pm)$	$\mathcal{D}^{V}(\rho_0,\pm)\oplus\mathcal{D}^{VI}(\rho_0,\mp)$	$\mathcal{D}^{V}(\rho_0,+)\oplus\mathcal{D}^{V}(\rho_0,-)$ $\mathcal{D}^{VI}(\rho_0,+)\oplus\mathcal{D}^{VI}(\rho_0,-)$
7. $\mathcal{D}^{VII}(\rho_0,\pm)$ 8. $\mathcal{D}^{VIII}(\rho_0,\pm)$	$\mathcal{D}^{VII}(\rho_0,\pm)\oplus\mathcal{D}^{VIII}(\rho_0,\mp)$	$\mathcal{D}^{VII}(\rho_0,+)\oplus\mathcal{D}^{VII}(\rho_0,-)$ $\mathcal{D}^{VIII}(\rho_0,+)\oplus\mathcal{D}^{VIII}(\rho_0,-)$

1	2	3
9. $\mathcal{D}^{\overline{IX}}(p_0)$	$\mathcal{D}^{\overline{IX}}(p_0)$	$\mathcal{D}^{\overline{IX}}(p_0)$
10. $\mathcal{D}^{\overline{X}}$	$\mathcal{D}^{\overline{X}}$	$\mathcal{D}^{\overline{X}}$
11. $E^{+}(p_0,\pm)$	$E^{+}(p_0,\pm)\oplus E^{-}(p_0,\pm)$	$E^{+}(p_0,+)\oplus E^{+}(p_0,-)$
12. $E^{-}(p_0,\pm)$		$E^{-}(p_0,+)\oplus E^{-}(p_0,-)$
13. $\mathcal{D}(p_0,s,\pm)$	$\mathcal{D}(p_0,s,+)\oplus\mathcal{D}(p_0,s,-)$	$\mathcal{D}(p_0,s,+)\oplus\mathcal{D}(p_0,s,-)$
14. $\mathcal{D}(p_0,\sigma,\pm)$	$\mathcal{D}(p_0,\sigma,+)\oplus\mathcal{D}(p_0,\sigma,-)$	$\mathcal{D}(p_0,\sigma,+)\oplus\mathcal{D}(p_0,\sigma,-)$.

Неприводимые представления полной группы $SU(2,2)$.

Литература

1. N. F. Bali, D. D. Coon, A. Katz, J. Math. Phys., 10, 1939 (1969).
2. D. J. Gross, J. Wess, Phys. Rev., D2, 753 (1970).
3. K. G. Wilson, Phys. Rev., D2, 1478 (1970).
4. А.М.Поляков, ЖЭТФ, 59, 542 (1970).
5. D. G. Boulware, L. S. Brown, R. D. Peccei, Phys. Rev., D3, 1750 (1971).
6. M. Bander, C. Itzykson, Rev. Mod. Phys., 38, 330, 346 (1966).
7. Y. Nambu, Phys. Rev., 160, 1171 (1967).
8. H. M. Kleinert, Fort. Phys., 16, 1 (1968)
9. И.А.Малкин, В.И.Манько, ЯФ, 9, 184 (1969).
10. P. A. M. Dirac, Ann. Math., 37, 429 (1936)
11. B. Kursunoglu, J. Math. Phys., 8, 1694 (1967)
12. G. Mack, I. Todorov, J. Math. Phys., 10, 2078 (1969).
13. Б.Г.Конопельченко, ТМФ, 5, 366 (1970).
14. H. A. Kastrup, D. H. Mayer, J. Math. Phys., 11, 1041 (1970).
15. E. J. Schreir, Phys. Rev., D3, 480 (1971).
16. Tsu Yao, J. Math. Phys., 8, 1931 (1967), 9, 1615 (1968).
17. G. Mack, A. Salam, Ann. Phys. (N.Y), 53, 174 (1969).

18. W. H. Klink, J. Math. Phys., 10, 606 (1969).

19. A.O. Barut, C. Fronsdal, Proc. Roy. Soc., 287, 532 (1965).

20. Tsu Yao, J. Math. Phys., 12, 315 (1971).

21. Б.Г.Конопельченко. Препринт ИЯФ СО АН СССР г.Новосибирск, (1972), (ДАН СССР (в печати)).

Ответственный за выпуск КОНОПЕЛЬЧЕНКО Б.Г.
Подписано к печати 11.5.72. МН10290
Усл. 1,5 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 39. ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, гв