

К.64

3

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

И Я Ф 44 - 72

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

**КОНФОРМНАЯ ГРУППА В ДВУМЕРНОМ
ПРОСТРАНСТВЕ - ВРЕМЕНИ**

Новосибирск

1972

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

КОНФОРМНАЯ ГРУППА В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ -
- ВРЕМЕНИ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе рассмотрена конформная группа в двумерном пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu} = (1, -1)$. Построены неприводимые унитарные представления собственной и полной конформной группы. Исследована редукция представлений конформной группы

по группе Пуанкаре. Показано, что существуют представления двух классов. В представлениях конформной группы класса I оператор

$\rho^2 = \rho_\mu \rho_\mu$ принимает непрерывные значения, исключая точку $\rho^2 = 0$,

для представлений класса II - $\rho^2 = 0$.

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
Физики СО АН СССР
ИНВ. №

THE CONFORMAL GROUP OF THE TWO-DIMENSIONAL SPACE-TIME

B.G.Konopelchenko, M.Ya.Palchik

Institute of Nuclear Physics

Siberian Division of the USSR Academy of Sciences

Novosibirsk

A b s t r a c t

The conformal group of the two-dimensional space-time (CG(1,1)) is investigated. The irreducible unitary representations of the proper and full conformal group are constructed. The reduction of the irreducible representations of CG(1,1) with respect to the Poincare subgroup is investigated.

The irreducible representations of CG(1,1) are characterized by values of the dimension d and conformal spin ζ which are related to the values of two Casimir operators of CG(1,1). There are representations of two classes. The representations of the first class are characterized by the continuous values of the operator $\rho^2 = P_\mu P_\mu$ excepting $\rho^2 = 0$. The permissible values of the dimensions are also defined. The representations of the second class have $\rho^2 = 0$. These representations describe the massless fields with canonical values of the dimensions $d = |\lambda|$ where λ is the conformal helicity.

The unitary representations of the CG(1,1) which offer an interest for physical applications are discussed. It is shown that only scalar ($\zeta = 0$) and spinor ($\zeta = \frac{1}{2}$) fields might have anomalous values of the dimensions.

1. В в е д е н и е

Вопросы конформной симметрии и её связи с поведением квантованных полей на малых расстояниях широко обсуждаются в последние годы [1,2,3]. В ряде работ вводится гипотеза конформной или только масштабной инвариантности сильных взаимодействий [4,5]. Требование масштабной инвариантности теории предполагает существование унитарного оператора $U(\lambda)$ такого, что

$$U(\lambda)|0\rangle = |0\rangle$$

$$U^{-1}(\lambda)\varphi(x)U(\lambda) = \lambda^d \varphi(\lambda x)$$

где $|0\rangle$ - вакуум и d - масштабная размерность поля. Для двухточечных функций из (1.1) следует (в случае скалярного поля)

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = C[(x-y)^2 - i\epsilon(x_0 - y_0)]^{-d}$$

Требование конформной инвариантности теории является еще более ограничительным. В частности, конформная инвариантность определяет вид трехточечных функций Грина с точностью до некоторого числа констант [6,7]. Для конформно-инвариантной теории поля конформная группа должна определять кинематику теории подобно тому, как релятивистская кинематика определяется группой Пуанкаре. Однако, в виду математической сложности конформной группы в четырехмерном пространстве Минковского выяснить все следствия конформной инвариантности затруднительно. Поэтому представляет эвристический интерес рассмотрение конформной группы в двумерном пространстве - времени. Тем более, что в двумерном пространстве-времени существуют точно решаемые модели теории поля [8,9], обладающие конформной инвариантностью.

Целью данной работы и является исследование конформной группы в двумерном пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu} = (1, -1)$.

В разделе II рассмотрена общая структура конформной группы и доказан её изоморфизм группе $SO(2,2) \sim SO(2,1) \otimes SO(2,1)$.

В III разделе описаны неприводимые унитарные представления группы $SO(2,1)$. В разделе IV построены неприводимые унитарные представления конформной группы и получены соответствующие реализации генераторов. В V разделе собственная конформная группа дополняется дискретными преобразованиями и строятся неприводимые представления полной конформной группы. Редукция представлений конформной группы по группе Пуанкаре рассмотрена в VI и VII разделах. В заключительном VIII разделе проводится аналогия с четырехмерным пространством Минковского и подробно описаны представления конформной группы, которые могут быть использованы для физических приложений.

II. Конформная группа

Шестипараметрическая группа конформных преобразований двумерного пространства-времени оставляет инвариантными углы между линиями и содержит:

1) преобразования группы Пуанкаре

$$X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu} + a^{\mu} \quad (\mu = 0, 1) \quad (2.1)$$

2) специальное конформное преобразование

$$X'^{\mu} = \frac{X^{\mu} + C^{\mu}(x, x)}{1 + 2(C, x) + (C, C)(x, x)} \quad (2.2)$$

3) дилатацию

$$X'^{\mu} = \lambda^{-1} X^{\mu}$$

где Λ^{μ}_{ν} , a^{μ} , C^{μ} , λ , параметры преобразований и $(x, x) = X_0^2 - X_1^2$

Генераторы $M_{\mu\nu}$, P_{β} , K_{ν} , \mathcal{D} конформной группы удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям [10].

$$[M_{\mu\nu}, M_{\beta\gamma}] = i(g_{\mu\beta} M_{\nu\gamma} + g_{\nu\beta} M_{\mu\gamma} - g_{\mu\gamma} M_{\nu\beta} - g_{\nu\gamma} M_{\mu\beta}),$$

$$[M_{\mu\nu}, P_{\beta}] = i(g_{\nu\beta} P_{\mu} - g_{\mu\beta} P_{\nu}),$$

$$[M_{\mu\nu}, K_{\beta}] = i(g_{\nu\beta} K_{\mu} - g_{\mu\beta} K_{\nu}), \quad (2.3)$$

$$[P_{\mu}, K_{\nu}] = 2i(g_{\mu\nu} \mathcal{D} + M_{\mu\nu}),$$

$$[P_{\beta}, \mathcal{D}] = -i P_{\beta}, \quad [K_{\beta}, \mathcal{D}] = i K_{\beta}$$

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0, \quad [K_{\mu}, K_{\nu}] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, \mathcal{D}] = 0.$$

Перейдем к новому базису L_{ab} ($a, b = 0, 1, 2, 3$) определяемому формулами

$$L_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \quad L_{2\mu} = \frac{1}{2}(P_{\mu} + K_{\mu}), \quad L_{3\mu} = \frac{1}{2}(P_{\mu} - K_{\mu}), \quad L_{23} = \mathcal{D} \quad (2.4)$$

Используя формулы (2.3), нетрудно показать, что операторы L_{ab} удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[L_{ab}, L_{cd}] = i(g_{ad} L_{bc} + g_{bc} L_{ad} - g_{ac} L_{bd} - g_{bd} L_{ac}) \quad (2.5)$$

где $g_{ab} = (1, -1, -1, 1)$.

Таким образом, группа конформных преобразований двумерного пространства-времени изоморфна группе $SO(2,2)$.

Указанный изоморфизм дает возможность построить четырехмерную модель двумерного пространства-времени аналогичную шестимерной модели Дирака /11/ четырехмерного пространства Минковского.

Рассмотрим в четырехмерном пространстве с метрикой

$g_{ab} = (1, -1, -1, 1)$ гиперконус

$$y_a y_a = y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$$

Каждой образующей этого гиперконуса по формуле

$$x^\mu = \frac{y^\mu}{y_2 + y_3} \quad (\mu = 0, 1) \quad (2.6)$$

будем сопоставлять точку x^μ двумерного пространства. Проективное отображение (2.6) дает возможность установить соответствие между нелинейными конформными преобразованиями в x -пространстве и линейными преобразованиями в y -пространстве. Действительно, рассмотрим вращение в y -пространстве

$$y'^a = O^a_b y^b \quad (a, b = 0, 1, 2, 3) \quad (2.7)$$

Используя уравнение (2.6) и $y_a y_a = 0$ можно показать, что в x -пространстве преобразованию (1.14) соответствует

$$x'^\mu = \frac{2O^{\mu}_0 x^\nu - (O^{\mu}_2 - O^{\mu}_3) - (O^{\mu}_2 + O^{\mu}_3)(x, x)}{2(O^{\mu}_0 - O^{\mu}_1) x^\nu + K_+ + K_-(x, x)}$$

где $K_{\pm} = O^2_2 \mp O^2_3 - O^3_2 \pm O^3_3$.

Выбирая соответствующую матрицу O^a_b мы получим в x -пространстве соответственно преобразования группы Пуанкаре (2.1) специальное конформное преобразование (2.2) и дилатацию.

Соответствие между двумя пространствами, устанавливаемое формулой (2.6), дает возможность записывать полевые уравнения в

явно конформно-инвариантном виде, установить соответствие между тензорными величинами в обоих пространствах, т.е. получить результаты аналогичные тем, которые имеются в шестимерной модели Дирака пространства Минковского. Однако, в настоящей работе мы не будем подробно касаться вопросов, связанных с четырехмерной моделью двумерного пространства. Исключением является раздел Y , в котором мы рассмотрим дискретные преобразования в обоих пространствах и установим изоморфизм полной конформной группы и полной группы $SO(2,2)$.

Вернемся теперь к группе $SO(2,2)$. Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} N_1 &= L_{01} & K_1 &= L_{32} \\ N_2 &= L_{02} & K_2 &= L_{13} \\ N_3 &= L_{03} & K_3 &= L_{12} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя формулу (2.5), нетрудно показать, что перестановочные соотношения между операторами N_i и K_i имеют вид

$$\begin{aligned} [N_1, N_2] &= -iK_3 & [K_1, K_2] &= -iK_3 \\ [N_2, N_3] &= iK_1 & [K_2, K_3] &= iK_1 \\ [N_3, N_1] &= iK_2 & [K_3, K_1] &= iK_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [N_1, K_1] &= 0 & [N_2, K_1] &= iN_3 & [N_3, K_1] &= iN_2 \\ [N_1, K_2] &= -iN_3 & [N_2, K_2] &= 0 & [N_3, K_2] &= -iN_1 \\ [N_1, K_3] &= -iN_2 & [N_2, K_3] &= iN_1 & [N_3, K_3] &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Перейдем к новым операторам A_i и B_i , определяемым формулами

$$A_i = \frac{1}{2}(K_i + N_i), \quad B_i = \frac{1}{2}(K_i - N_i) \quad (i=1,2,3) \quad (2.10)$$

Из соотношения (2,9) следует, что

$$[A_1, A_2] = -iA_3 \quad [B_1, B_2] = -iB_3$$

$$[A_2, A_3] = iA_1 \quad [B_2, B_3] = iB_1$$

$$[A_3, A_1] = iA_2 \quad [B_3, B_1] = iB_2$$

$$[A_i, B_k] = 0.$$

Мы видим, что операторы A_i и B_k образуют две коммутирующие между собой алгебры $SO(2,1)$.

Таким образом мы показали, что группа $SO(2,2)$ изоморфна $SO(2,1) \otimes SO(2,1)$.

Для дальнейшего нам удобно выразить генераторы конформной группы через операторы A_i и B_k . Из формул (2.4), (2.5) и (2.10) получаем

$$M_{01} = A_1 - B_1, \quad D = -(A_1 + B_1)$$

$$P_0 = -(A_2 + A_3) + (B_2 + B_3),$$

$$P_1 = -(A_2 + A_3) - (B_2 + B_3), \quad (2.12)$$

$$P_+ = P_0 + P_1 = -2(A_2 + A_3), \quad P_- = P_0 - P_1 = 2(B_2 + B_3)$$

$$P^2 = P_0^2 - P_1^2 = P_+ P_- = -4(A_2 + A_3)(B_2 + B_3)$$

$$K_0 = -(A_2 - A_3) + (B_2 - B_3)$$

$$K_1 = +(A_2 - A_3) + (B_2 - B_3)$$

Операторы Казимира группы $SO(2,2)$ равны

$$C_1 = \frac{1}{4} L_{ab} L_{ab} = \frac{1}{2} (-N_1^2 - N_2^2 + N_3^2 - K_1^2 - K_2^2 + K_3^2),$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \epsilon_{abcd} L_{ab} L_{cd} = -K_1 N_1 - K_2 N_2 + K_3 N_3$$

(2.13)

Выражая операторы K_i и N_i через A_i и B_i , получим

$$C_1 = C_A + C_B, \quad C_2 = C_A - C_B \quad (2.14)$$

где C_A и C_B являются операторами Казимира двух коммутирующих подгрупп $SO(2,1)$, т.е.

$$C_A = -A_1^2 - A_2^2 + A_3^2, \quad C_B = -B_1^2 - B_2^2 + B_3^2.$$

III. Неприводимые унитарные представления группы $SO(2,1)$

Группа $SO(2,1)$ детально исследована в [13]. Для полноты изложения ниже приведены основные результаты. Алгебра \mathcal{L} этой группы задается перестановочными соотношениями

$$[A_1, A_2] = -iA_3, [A_2, A_3] = iA_1, [A_3, A_1] = iA_2 \quad (3.1)$$

Переходя к комбинациям

$$M^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(iA_2 \pm A_1) \quad (3.2)$$

имеем

$$[A_3, M^\pm] = \pm M^\pm, [M^+, M^-] = A_3 \quad (3.3)$$

Оператор A_3 эрмитов

$$A_3^\dagger = A_3 \quad (3.4)$$

Кроме того для унитарных представлений необходимо

$$(M^+)^\dagger = -M^- \quad (3.5)$$

Группа $SO(2,1)$ имеет единственный оператор Казимира

$$Q = -A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 = 2M^-M^+ + A_3(A_3 + 1) \quad (3.6)$$

Все неприводимые представления можно характеризовать числом e , которое определяем как

$$Q = e(e-1) \quad (3.6a)$$

Кроме оператора Казимира в неприводимом представлении необходимо задать спектр оператора A_3 . Поскольку A_3 эрмитов, он имеет дискретный спектр. Из (3.3) следует, что операторы M^\pm изменяют

собственное значение оператора A_3 на ± 1 . Следовательно, в представлении, где A_3 диагонален, имеем

$$A_3 |e, m\rangle = (m_0 + m) |e, m\rangle \quad (3.7)$$

$$M^+ |e, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e - m_0 - m) \frac{N_m}{N_{m+1}} |e, m+1\rangle$$

$$M^- |e, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e + m_0 + m) \frac{N_m}{N_{m-1}} |e, m-1\rangle$$

Здесь m_0 — любое число, N_m — нормировочный множитель, m — целое. Таким образом, каждое неприводимое представление полностью задается двумя числами: e, m_0 . Если число m_0 — целое, то представление однозначно. При полуцелых m_0 имеем двузначные представления. Для наших целей можно ограничиться только однозначными и двузначными представлениями:

$$m_0 - \text{целое или полуцелое} \quad (3.8)$$

Для унитарных представлений из (3.5) и (3.7) находим

$$\left| \frac{N_{m+1}}{N_m} \right|^2 = \frac{m_0 + m + \bar{e}}{m_0 + m + 1 - e} \quad (3.9)$$

Поскольку группа некомпактна, все унитарные представления либо бесконечномерны, либо одномерны. Имеется пять серий неприводимых унитарных представлений [13].

Таблица 1.

Обозначение	Инварианты	Спектр
$\mathcal{D}_p(e)$	$e = \frac{1}{2} + i\lambda \quad (\lambda > 0), m_0 = 0$	$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Обозначение	Инварианты	Спектр
$\mathcal{D}_s(e)$	$0 < e < 1, m_0 = 0$	$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
$\mathcal{D}_+(e)$	$2e = 1, 2, 3, \dots, m_0 = e$	$m_0 + m = e, e+1, e+2, \dots$
$\mathcal{D}_-(e)$	$2e = 1, 2, 3, \dots, m_0 = -e$	$m_0 + m = -e, -e-1, -e-2, \dots$
\mathcal{D}_0	$e = 0$	$m = 0$

1У. Неприводимые унитарные представления
конформной группы

Для физических приложений представляют интерес неприводимые унитарные представления. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только унитарных представлений конформной группы.

Как показано в разделе II, для построения представлений алгебры конформной группы необходимо взять "прямую сумму" двух алгебр $SO(2,1)$. Удобно выбрать для генераторов каждой алгебры $SO(2,1)$ такую реализацию, чтобы операторы "импульса" $p_+ = -2(A_2 + A_3)$ и $p_- = 2(B_2 + B_3)$ были операторами дифференцирования: $p_{\pm} = i \frac{\partial}{\partial x_{\pm}}$. Из (3.1), (3.6) и (3.6a) находим самый общий вид операторов A_i и B_i (в случае бесконечномерных представлений: $e_1, e_2 \neq 0$).

$$A_1 = i(e_1 + x_+ \frac{\partial}{\partial x_+}), \quad B_1 = i(e_2 + x_- \frac{\partial}{\partial x_-})$$

$$A_2 = -\frac{i}{4}(\frac{\partial}{\partial x_+} - 4x_+^2 \frac{\partial}{\partial x_+} - 8e_1 x_+), \quad B_2 = -\frac{i}{4}(\frac{\partial}{\partial x_-} - 4x_-^2 \frac{\partial}{\partial x_-} - 8e_2 x_-) \quad (4.1)$$

$$A_3 = -\frac{i}{4}(\frac{\partial}{\partial x_+} + 4x_+^2 \frac{\partial}{\partial x_+} + 8e_1 x_+), \quad B_3 = -\frac{i}{4}(\frac{\partial}{\partial x_-} + 4x_-^2 \frac{\partial}{\partial x_-} + 8e_2 x_-)$$

Представления конформной группы могут быть подразделены на два класса. К первому классу относятся те представления, которые получаются прямым произведением бесконечномерных представлений двух групп $SO(2,1)$; $\mathcal{D}(e_1, e_2) = \mathcal{D}^A(e_1) \otimes \mathcal{D}^B(e_2)$. Эти представления задаются двумя числами e_1 и e_2 . Ко второму классу относятся представления $\mathcal{D}_0^A \otimes \mathcal{D}^B(e)$ и $\mathcal{D}^A(e) \otimes \mathcal{D}_0^B$, где $\mathcal{D}(e)$ - любое из бесконечномерных представлений, \mathcal{D}_0 - одномерное. Эти представления полностью задаются одним числом. Имеется также одномерное представление, которое получается прямым произведением одномерных представлений групп $SO(2,1)$.

Представления первого класса $\mathcal{D}(e_1, e_2)$ реализуются в пространстве функций двух переменных x_+ и x_- . Из формул (2.12) и (4.1) имеем для представлений $\mathcal{D}_{\alpha\beta}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_{\alpha}^A(e_1) \otimes \mathcal{D}_{\beta}^B(e_2)$

$$(\alpha, \beta = p, s, +, -)$$

$$L_{01} = i(e_1 - e_2) + x_+ p_+ - x_- p_-$$

$$p_+ = i \frac{\partial}{\partial x_+}, \quad p_- = i \frac{\partial}{\partial x_-}$$

$$K_+ = 4(x_+^2 p_+ + 2ie_1 x_+)$$

$$K_- = 4(x_-^2 p_- + 2ie_2 x_-)$$

$$D = -i(e_1 + e_2) - (x_+ p_+ + x_- p_-)$$

Переход к обычным пространственно-временным координатам X_0 и X_1 осуществляется по формулам

$$X_+ = \frac{1}{2}(X^0 + X^1), \quad X_- = \frac{1}{2}(X^0 - X^1). \quad (4.3)$$

$$P_{\pm} = P_0 \pm P_1, \quad K_{\pm} = -K_0 \pm K_1$$

Мы будем использовать метрику $g_{00} = -g_{11} = 1$. Окончательно находим

$$M_{\mu\nu} = X_{\mu} P_{\nu} - X_{\nu} P_{\mu} + i(e_1 - e_2) \epsilon_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

$$P_{\mu} = i \frac{\partial}{\partial X^{\mu}}$$

где $\epsilon_{\mu\nu}$ - антисимметричный тензор, $\epsilon_{01} = 1$,

$$K_{\mu} = X^2 P_{\mu} - 2X_{\mu}(X P) - 2i(e_1 + e_2) X_{\mu} - 2i(e_1 - e_2) \epsilon_{\mu\nu} X_{\nu},$$

$$D = -i(e_1 + e_2) - (X P)$$

Из этих формул ясен физический смысл параметров e_1 и e_2 :

$e_1 + e_2 = d$ - масштабная размерность представления (в единицах массы), $e_1 - e_2 = s$ - "спин".

Представления второго класса, вообще говоря, реализуются в пространстве функций одной переменной. В представлениях $\mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}(e)$ операторы B_i задаются формулами (4.1), а $A_i = 0$. В представлениях $\mathcal{D}(e) \otimes \mathcal{D}_0$ операторы A_i даются формулами (4.1), а

$$B_i = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}(e) & \qquad \qquad \qquad \mathcal{D}(e) \otimes \mathcal{D}_0 \\ p_- = i \frac{\partial}{\partial X_-}, p_+ = 0 & \qquad \qquad \qquad p_+ = i \frac{\partial}{\partial X_+}, p_- = 0 \\ M_{01} = -X_- p_- - i e & \qquad \qquad \qquad M_{01} = X_+ p_+ + i e \\ K_- = 4(X_-^2 p_- + 2i e X_-), K_+ = 0, & \qquad \qquad \qquad K_+ = 4(X_+^2 p_+ + 2i e X_+), K_- = 0 \\ D = -i e - X_- p_- & \qquad \qquad \qquad D = -i e - X_+ p_+ \end{aligned} \quad (4.5)$$

Переходя к пространственно-временным переменным по формулам (4.3), находим

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= X_{\mu} P_{\nu} - X_{\nu} P_{\mu} + i \lambda \epsilon_{\mu\nu} \\ P_{\mu} &= i \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$K_{\mu} = X^2 P_{\mu} - 2X_{\mu}(X P) - 2i e X_{\mu} - 2i \lambda \epsilon_{\mu\nu} X_{\nu}$$

$$D = -i e - (X P)$$

где λ - "спиральность":

$$\lambda = -e, \quad p_+ = i \left(\frac{\partial}{\partial X^0} + \frac{\partial}{\partial X^1} \right) = 0 \quad (4.7)$$

для представлений $\mathcal{D}_0^A \otimes \mathcal{D}^B(e)$, и

$$\lambda = e, \quad p_- = i \left(\frac{\partial}{\partial X^0} - \frac{\partial}{\partial X^1} \right) = 0 \quad (4.8)$$

Представления	Спектр спинов	Спектр размерностей
$\mathcal{D}_{pp}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_p(e_1) \otimes \mathcal{D}_p(e_2)$	$S = i\nu \quad (-\infty < \nu < \infty)$	$d = S + 1 + 2i\lambda$
$\mathcal{D}_{ps}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_p(e_1) \otimes \mathcal{D}_s(e_2)$	$S = \mu + i\lambda \quad (\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2})$	$d = \begin{cases} S + 2e \\ -S + 1 + 2i\lambda \end{cases}$
$\mathcal{D}_{p+}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_p(e_1) \otimes \mathcal{D}_+(e_2)$	$S = \frac{1-n}{2} + i\lambda$	$d = \begin{cases} S + n \\ -S + 1 + 2i\lambda \end{cases}$
$\mathcal{D}_{p-}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_p(e_1) \otimes \mathcal{D}_-(e_2)$	$S = \frac{1-n}{2} + i\lambda$	$d = \begin{cases} S + n \\ -S + 1 + 2i\lambda \end{cases}$
$\mathcal{D}_{sp}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_s(e_1) \otimes \mathcal{D}_p(e_2)$	$S = \mu - i\lambda \quad (-\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2})$	$d = \begin{cases} S + 1 + 2i\lambda \\ -S + 2e \end{cases}$
$\mathcal{D}_{ss}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_s(e_1) \otimes \mathcal{D}_s(e_2)$	$-1 < S < 1$	$ S < d < 2 - S $
$\mathcal{D}_{s+}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_s(e_1) \otimes \mathcal{D}_+(e_2)$	$-\frac{n}{2} < S < -\frac{n}{2} + 1$	$d = \begin{cases} S + n \\ -S + 2e \end{cases}$
$\mathcal{D}_{s-}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_s(e_1) \otimes \mathcal{D}_-(e_2)$	$-\frac{n}{2} < S < -\frac{n}{2} + 1$	$d = \begin{cases} S + n \\ -S + 2e \end{cases}$
$\mathcal{D}_{+p}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_+(e_1) \otimes \mathcal{D}_p(e_2)$	$S = \frac{n-1}{2} - i\lambda$	$d = \begin{cases} S + 1 + 2i\lambda \\ -S + n \end{cases}$
$\mathcal{D}_{+s}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_+(e_1) \otimes \mathcal{D}_s(e_2)$	$\frac{n}{2} - 1 < S < \frac{n}{2}$	$d = \begin{cases} S + 2e \\ -S + n \end{cases}$
$\mathcal{D}_{++}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_+(e_1) \otimes \mathcal{D}_+(e_2)$	$2S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$d = S + n$

$\mathcal{D}_{+-}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_+(e_1) \otimes \mathcal{D}_-(e_2)$	$2S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$d = S + n$
$\mathcal{D}_{-p}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_-(e_1) \otimes \mathcal{D}_p(e_2)$	$S = \frac{n-1}{2} - i\lambda$	$d = \begin{cases} S + 1 + 2i\lambda \\ -S + n \end{cases}$
$\mathcal{D}_{-s}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_-(e_1) \otimes \mathcal{D}_s(e_2)$	$\frac{n}{2} - 1 < S < \frac{n}{2}$	$d = \begin{cases} S + 2e \\ -S + n \end{cases}$
$\mathcal{D}_{-+}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_-(e_1) \otimes \mathcal{D}_+(e_2)$	$2S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$d = S + n$
$\mathcal{D}_{--}(e_1, e_2) = \mathcal{D}_-(e_1) \otimes \mathcal{D}_-(e_2)$	$2S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$d = S + n$

Таблица 2. $(0 < \lambda < \infty; 0 < e < 1; n = 1, 2, 3, \dots)$
Представления класса I. ($d = e_1 + e_2, S = e_1 - e_2$).

$\mathcal{D}_{p0}(e, 0) = \mathcal{D}_p(e) \otimes \mathcal{D}_0$	$\mathcal{D}_{0p}(0, e) = \mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}_p(e)$
$\mathcal{D}_{s0}(e, 0) = \mathcal{D}_s(e) \otimes \mathcal{D}_0$	$\mathcal{D}_{0s}(0, e) = \mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}_s(e)$
$\mathcal{D}_{+0}(e, 0) = \mathcal{D}_+(e) \otimes \mathcal{D}_0$	$\mathcal{D}_{0+}(0, e) = \mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}_+(e)$
$\mathcal{D}_{-0}(e, 0) = \mathcal{D}_-(e) \otimes \mathcal{D}_0$	$\mathcal{D}_{0-}(0, e) = \mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}_-(e)$
$\mathcal{D}_{00} = \mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}_0$	

Таблица 3.
Представления класса II. ($d = e, \lambda = \pm e$).

$$\begin{aligned}
 P: \quad I_P M_{01} I_P &= -M_{01}, \quad I_P P_0 I_P = P_0, \quad I_P P_1 I_P = -P_1, \\
 I_P K_0 I_P &= K_0, \quad I_P K_1 I_P = -K_1, \quad I_P D I_P = D \\
 \mathcal{L}: \quad I_{\mathcal{L}} M_{01} I_{\mathcal{L}} &= M_{01}, \quad I_{\mathcal{L}} P_{\mu} I_{\mathcal{L}} = -K_{\mu}, \\
 I_{\mathcal{L}} K_{\mu} I_{\mathcal{L}} &= -P_{\mu}, \quad I_{\mathcal{L}} D I_{\mathcal{L}} = -D, \\
 R: \quad I_R M_{01} I_R &= M_{01}, \quad I_R P_{\mu} I_R = K_{\mu}, \\
 I_R K_{\mu} I_R &= P_{\mu}, \quad I_R D I_R = -D.
 \end{aligned}$$

Соотношения (2.5) и (5.2) определяют полную группу $SO(2,2)$, т.е. группу непрерывных (собственных) преобразований, дополненную одним из дискретных преобразований. Соотношения (2.3) и (5.3) задают полную конформную группу. Мы видели, что соотношения (2.3) и (2.5) переходят друг в друга при преобразовании базиса (2.4). Нетрудно показать, что при этом преобразовании соотношения (5.2) и (5.3) также переходят друг в друга. Таким образом, полная конформная группа изоморфна полной группе $SO(2,2)$.

Будем теперь строить неприводимые представления полной группы $SO(2,2)$. Для этого нам необходимо выяснить каким образом преобразуются пространства неприводимых представлений собственной группы $SO(2,2)$ при отражениях. Поскольку неприводимое представление $\mathcal{D}(e_1, e_2)$ собственной группы задается значениями операторов Казимира C_1, C_2 и спектром m_A, m_B операторов A_3 и B_3 достаточно определить перестановочные соотношения C_1, C_2, A_3, B_3 в операторах отражений. Используя формулы (5.2), (2.8) и (2.10), получаем

$$\begin{aligned}
 T: \quad I_T A_i I_T &= B_i, \quad I_T B_i I_T = A_i. \\
 P: \quad I_P A_1 I_P &= B_1, \quad I_P B_1 I_P = A_1 \\
 I_P A_2 I_P &= -B_2, \quad I_P B_2 I_P = -A_2 \\
 I_P A_3 I_P &= -B_3, \quad I_P B_3 I_P = -A_3 \\
 \mathcal{L}: \quad I_{\mathcal{L}} A_1 I_{\mathcal{L}} &= -B_1, \quad I_{\mathcal{L}} B_1 I_{\mathcal{L}} = -A_1 \\
 I_{\mathcal{L}} A_2 I_{\mathcal{L}} &= B_2, \quad I_{\mathcal{L}} B_2 I_{\mathcal{L}} = A_2 \\
 I_{\mathcal{L}} A_3 I_{\mathcal{L}} &= -B_3, \quad I_{\mathcal{L}} B_3 I_{\mathcal{L}} = -A_3 \\
 R: \quad I_R A_1 I_R &= -B_1, \quad I_R B_1 I_R = -A_1 \\
 I_R A_2 I_R &= -B_2, \quad I_R B_2 I_R = -A_2 \\
 I_R A_3 I_R &= B_3, \quad I_R B_3 I_R = A_3
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Отсюда вытекает, в силу (2.14), что для каждого из отражений

$$I C_1 I = C_1, \quad I C_2 I = -C_2 \tag{5.5}$$

Таким образом, неприводимое представление собственной группы, задаваемое значениями операторов Казимира C_1, C_2 и спектром величин m_A, m_B переходит:

1) при T, R отражении - в неприводимое представление собственной группы, для которого $C_1' = C_1, C_2' = -C_2$ и

$$m_A' = m_B, \quad m_B' = m_A.$$

2) при P, \mathcal{L} -отражении - в неприводимое представление

$$C_1' = C_1, \quad C_2' = -C_2, \quad m_A' = -m_B, \quad m_B' = -m_A$$

Обратимся к конкретным неприводимым представлениям группы $SO(2,2)$, описанным в разделе IV. Используя полученный выше результат, можно показать, что при:

1) T, R -отражениях представление $D_{\rho 0}(e, \mu_0; 0)$ переходит в представление $D_{\rho 0}(0; e, \mu_0)$ (и наоборот) и

$$D_{S0}(e, \mu_0; 0) \cong D_{0S}(0; e, \mu_0) \quad (5.6)$$

$$D_{\pm 0}(e, \mu_0; 0) \cong D_{0\pm}(0; e, \mu_0)$$

2) P, L -отражениях

$$D_{\rho 0}(e, \mu_0; 0) \cong D_{\rho 0}(0; e, -\mu_0)$$

$$D_{S0}(e, \mu_0; 0) \cong D_{0S}(0; e, -\mu_0) \quad (5.7)$$

$$D_{+0}(e, \mu_0; 0) \cong D_{0-}(0; e, -\mu_0)$$

$$D_{-0}(e, \mu_0; 0) \cong D_{0+}(0; e, -\mu_0)$$

Представление D_{00} переходит в самое себя при отражениях.

Неприводимыми унитарными представлениями группы

$SO(2,2) + T, R$ (собственной группы $SO(2,2)$, дополненной T или R отражением), следовательно, являются прямые суммы

$$D_{\rho 0}(e, \mu_0; 0) \oplus D_{\rho 0}(0; e, \mu_0); D_{S0}(e, \mu_0; 0) \oplus D_{0S}(0; e, \mu_0)$$

$$D_{+0}(e, \mu_0; 0) \oplus D_{0+}(0; e, \mu_0); D_{-0}(e, \mu_0; 0) \oplus D_{0-}(0; e, \mu_0).$$

а группы $SO(2,2) + P, L$

$$D_{\rho 0}(e, \mu_0; 0) \oplus D_{\rho 0}(0; e, -\mu_0); D_{S0}(e, \mu_0; 0) \oplus D_{0S}(0; e, -\mu_0),$$

$$D_{+0}(e, \mu_0; 0) \oplus D_{0-}(0; e, -\mu_0); D_{-0}(e, \mu_0; 0) \oplus D_{0+}(0; e, -\mu_0).$$

Аналогично можно показать, что представления

$D_{\alpha\beta}(e_1, \mu_0; e_2, \mu_0')$, (где $\alpha, \beta = \rho, S, +, -, 0$) переходят при

1) T, R -отражении

$$D_{\alpha\beta}(e_1, \mu_0; e_2, \mu_0') \cong D_{\beta\alpha}(e_2, \mu_0'; e_1, \mu_0) \quad (5.8)$$

2) P, L -отражения

$$D_{\alpha\beta}(e_1, \mu_0; e_2, \mu_0') \cong D_{\beta'\alpha'}(e_2, -\mu_0'; e_1, -\mu_0) \quad (5.9)$$

где $\alpha', \beta' = \rho, S, -, +, 0$.

Таким образом, неприводимыми унитарными представлениями группы $SO(2,2) + T, R$ являются прямые суммы

$$D_{\alpha\rho}(e_1, \mu_0; e_2, \mu_0') \oplus D_{\beta\alpha}(e_2, \mu_0'; e_1, \mu_0), \quad (5.10)$$

группы $SO(2,2) + P, L$

$$D_{\alpha\beta}(e_1, \mu_0; e_2, \mu_0') \oplus D_{\beta'\alpha'}(e_2, -\mu_0'; e_1, -\mu_0). \quad (5.11)$$

Очевидно, что представления $D_{\alpha\alpha}(e, \mu_0; e, \mu_0)$ являются также неприводимыми представлениями группы $SO(2,2) + T, R$.

а представления $D_{\rho\rho}(e, 0; e, 0), D_{SS}(e, 0; e, 0), D_{+-}(e, 0; e, 0)$

и D_{00} неприводимыми представлениями группы $SO(2,2) + P, L$.

У1. Редукция по группе Пуанкаре. Представления

класса 1

В разделе Ш мы рассмотрели все унитарные представления конформной группы. Для физических приложений представляет интерес рассмотреть редукцию представлений конформной группы по группе Пуанкаре. Поскольку группа Пуанкаре двумерного пространства является подгруппой конформной группы, то неприводимые представления (собственной) конформной группы являются также представлениями группы Пуанкаре, вообще говоря, приводимыми. Операторами Казимира двумерной группы Пуанкаре являются как нетрудно проверить $P^2 = P_\mu P_\mu$ и знак P_0 ($\epsilon_0 = \frac{P_0}{|P_0|}$) для представлений с $P^2 \geq 0$ и знак P_1 ($\epsilon_1 = \frac{P_1}{|P_1|}$) для представлений $P^2 < 0$. Следовательно, неприводимые представления группы Пуанкаре задаются значениями P^2 , ϵ_0 , (либо ϵ_1). Таким образом, для того, чтобы выяснить на какие представления группы Пуанкаре редуцируются представления конформной группы, необходимо установить спектр операторов P^2 и ϵ_0 (либо ϵ_1), в неприводимых представлениях конформной группы.

Поскольку

$$P^2 = P_+ P_- , \quad P_0 = \frac{1}{2}(P_+ + P_-), \quad P_1 = \frac{1}{2}(P_+ - P_-) \quad (5.1)$$

то для выяснения спектра P^2 , ϵ_0 (ϵ_1) в неприводимом представлении $\mathcal{D}_{\alpha\beta}(\epsilon_1, \mu_0; \epsilon_2, \mu_0')$ ($\alpha, \beta = r, s, t, -; 0$) конформной группы достаточно знать область изменения величин P_+ и P_- соответственно в представлениях $\mathcal{D}_\alpha^A(\epsilon_1, \mu_0)$ и $\mathcal{D}_\beta^B(\epsilon_2, \mu_0')$ группы $SO(2,1)$. Для этих целей удобной является реализация операторов A_i и B_i , рассмотренная в разделе Ш. (формулы (3.1)). В P -представлении операторы A_i и B_i имеют вид

$$A_1 = i(\epsilon_1 - 1 - P_+ \frac{\partial}{\partial P_+}), \quad B_1 = i(\epsilon_2 - 1 - P_- \frac{\partial}{\partial P_-}) \quad (5.2)$$

$$A_2 = -\frac{1}{4}(4P_+ \frac{\partial^2}{\partial P_+^2} - 8(\epsilon_1 - 1) \frac{\partial}{\partial P_+} + P_+), \quad B_2 = \frac{1}{4}(4P_- \frac{\partial^2}{\partial P_-^2} - 8(\epsilon_2 - 1) \frac{\partial}{\partial P_-} - P_-)$$

$$A_3 = \frac{1}{4}(4P_+ \frac{\partial^2}{\partial P_+^2} - 8(\epsilon_1 - 1) \frac{\partial}{\partial P_+} - P_+), \quad B_3 = -\frac{1}{4}(4P_- \frac{\partial^2}{\partial P_-^2} - 8(\epsilon_2 - 1) \frac{\partial}{\partial P_-} - P_-).$$

где подразумевается, что A_i и B_i действуют на базис $|P\rangle$ зависящий соответственно от P_+ или P_- . Нетрудно показать, что в унитарных представлениях операторы A_i и B_i эрмитовы относительно скалярного произведения:

$$(f, \varphi) = \int d\mu(P) f^*(P) \varphi(P) \quad (5.3)$$

где $d\mu(P)$ - соответствующая инвариантная мера. Для операторов M^\pm , введенных в разделе II получаем

$$M_+^A = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ P_+ \frac{\partial^2}{\partial P_+^2} + [P_+ - 2(\epsilon_1 - 1)] \frac{\partial}{\partial P_+} + \frac{1}{4} P_+ - (\epsilon_1 - 1) \right\}, \quad (5.4)$$

$$M_-^A = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ P_+ \frac{\partial^2}{\partial P_+^2} - [P_+ + 2(\epsilon_1 - 1)] \frac{\partial}{\partial P_+} + \frac{1}{4} P_+ + (\epsilon_1 - 1) \right\},$$

$$M_+^B = \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ P_- \frac{\partial^2}{\partial P_-^2} - [P_- + 2(\epsilon_2 - 1)] \frac{\partial}{\partial P_-} + \frac{1}{4} P_- + (\epsilon_2 - 1) \right\},$$

$$M_-^B = \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ P_- \frac{\partial^2}{\partial P_-^2} + [P_- - 2(\epsilon_2 - 1)] \frac{\partial}{\partial P_-} + \frac{1}{4} P_- - (\epsilon_2 - 1) \right\}.$$

Построим пространства представлений группы $SO(2,1)$ в реализации (5.2) (рассмотрим для определенности алгебру A). Базис пространства представления образуют собственные функции опе-

ратора A_3 . Из формул (3.7) и (5.2) следует, что базисные функции $f_{e,m}(p)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$f_{e,m}(p) = \langle p | e, m \rangle$$

удовлетворяют уравнению

$$p \frac{\partial^2}{\partial p^2} f_{e,m}(p) - 2(e-1) \frac{\partial}{\partial p} f_{e,m}(p) - \left(\frac{1}{4}p + \kappa_0 + m\right) f_{e,m}(p) = 0 \quad (5.5)$$

Общее решение уравнения (5.5) имеет вид

$$f_{e,m}(p) = p^{e-1} y(-(\kappa_0 + m), \frac{1}{2} - e, p)$$

где $y(\mu, \nu, p)$ - общее решение уравнения Уиттекера [14]. Разным сериям представлений соответствуют различные независимые решения уравнения Уиттекера.

Рассмотрим \mathcal{D}^- и \mathcal{D}^+ серии. В этом случае собственные функции оператора A_3 имеют вид

$$f_{e,m}^\pm(p) \approx C_{e,m}^\pm p^{2e-1} e^{-\frac{p}{2}} {}_1F_1(e + \kappa_0 \pm m, 2e, p) \quad (5.6)$$

где ${}_1F_1(\alpha, \beta, p)$ - вырожденная гипергеометрическая функция и $C_{e,m}^\pm$ - числовые константы. Отметим, что второе независимое решение уравнения (5.5) получается из (5.6) заменой $e \rightarrow 1-e$.

Нетрудно показать, что для функций $f_{e,m}^\pm(p)$ имеют место соотношения:

$$M_+ f_{e,m}^\pm(p) = \frac{i}{\sqrt{2}} (-\kappa_0 - m - e) \frac{C_{e,m}^\pm}{C_{e,m+1}^\pm} f_{e,m+1}^\pm(p) \quad (5.7)$$

$$M_- f_{e,m}^\pm(p) = \frac{i}{\sqrt{2}} (\kappa_0 + m - e) \frac{C_{e,m}^\pm}{C_{e,m-1}^\pm} f_{e,m-1}^\pm(p)$$

Сравнивая с формулой (3.7) получаем

$$i \frac{C_{e,m}}{C_{e,m+1}} = \frac{N_{e,m}}{N_{e,m+1}}$$

Следовательно, для унитарных представлений

$$\left| \frac{C_{e,m+1}}{C_{e,m}} \right|^2 = \left| \frac{N_{e,m+1}}{N_{e,m}} \right|^2 = \frac{\kappa_0 + m + \bar{e}}{\kappa_0 + m + 1 - e} \quad (5.8)$$

Учитывая, что для \mathcal{D}^+ и \mathcal{D}^- серий соответственно $\kappa_0 = \pm e$ получаем

$$\left| C_{e,m}^\pm \right|^2 = \frac{\Gamma(2e \pm m)}{\Gamma(2e) \Gamma(1 \pm m)} \left| C_{e,0}^\pm \right|^2 \quad (5.9)$$

Базисные функции $f_{e,m}(p)$ удобно выразить через ортогональные многочлены: [14]

$$f_{e,m}^\pm(p) = C_{e,m}^\pm \frac{\Gamma(1-m) \Gamma(2e)}{\Gamma(2e-m)} p^{2e-1} e^{-\frac{p}{2}} L_{-m}^{2e-1}(p) \quad (5.10)$$

$$f_{e,m}^+(p) = C_{e,m}^+ \frac{\Gamma(1+m)\Gamma(2e)}{\Gamma(2e+m)} p^{2e-1} e^{-\frac{p}{2}} L_m^{2e-1}(-p). \quad (5.11)$$

где $L_m^\alpha(p)$ — обобщенные многочлены Лагерра. (5.12)

Условие ортогональности базисных векторов

$$\langle e, m' | e, m \rangle = \delta_{m'm}$$

в p -реализации принимает вид

$$\begin{aligned} \langle e, m' | e, m \rangle &= \int dp \langle e, m' | p \rangle \langle p | p \rangle \langle p | e, m \rangle = \\ &= \int d\mu(p) f_{e,m'}^*(p) f_{e,m}(p) = \delta_{m'm} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Для представлений \mathcal{D}^- -серии имеем

$$\begin{aligned} \langle e, m' | e, m \rangle &= |C_{e,m}^-|^2 \frac{\Gamma^2(1-m)\Gamma^2(2e)}{\Gamma^2(2e-m)} \int d\mu(p) p^{2(2e-1)-p} e^{-\frac{p}{2}} L_{m'}^{2e-1}(p) L_m^{2e-1}(p) = \\ &= \delta_{m'm} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Поскольку

$$\int_0^\infty dx x^\alpha e^{-x} L_{m'}^\alpha(x) L_m^\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha+m+1)}{\Gamma(m+1)} \delta_{m'm}$$

мы видим, что интегрировать в формуле (5.14) необходимо только

по положительным p и $d\mu(p) = \frac{dp}{p^{2e-1}}$:

$$\begin{aligned} \langle e, m' | e, m \rangle &= |C_{e,m}^-|^2 \frac{\Gamma^2(1-m)\Gamma^2(2e)}{\Gamma^2(2e-m)} \int_0^\infty dp p^{2e-1} e^{-p} L_{m'}^{2e-1}(p) L_m^{2e-1}(p) = \\ &= |C_{e,m}^-|^2 \frac{\Gamma(1-m)\Gamma^2(2e)}{\Gamma(2e-m)} \delta_{m'm} = \delta_{m'm} \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (5.9) получаем

$$|C_{e,0}^-|^2 = \frac{1}{\Gamma(2e)}$$

Аналогично для представлений \mathcal{D}^+ серии $d\mu(p) = \frac{dp}{(-p)^{2e-1}}$

$$\begin{aligned} \langle e, m' | e, m \rangle &= |C_{e,m}^+|^2 \frac{\Gamma^2(m+1)\Gamma^2(2e)}{\Gamma^2(2e+m)} \int_0^\infty dp (-p)^{2e-1} e^{-p} L_{m'}^{2e-1}(-p) L_m^{2e-1}(-p) = \\ &= |C_{e,m}^+|^2 \frac{\Gamma^2(m+1)\Gamma^2(2e)}{\Gamma^2(2e+m)} \int_0^\infty d(-p)(-p)^{2e-1} e^{-(-p)} L_{m'}^{2e-1}(-p) L_m^{2e-1}(-p) = \\ &= |C_{e,m}^+|^2 \frac{\Gamma(m+1)\Gamma^2(2e)}{\Gamma(2e+m)} \delta_{m'm} = \delta_{m'm}. \end{aligned}$$

Следовательно $|C_{e,0}^+|^2 = \frac{1}{\Gamma(2e)}$.

Таким образом, мы показали, что для алгебры А

в представлениях \mathcal{D}^- серии: $p_+ > 0$ (5.15)

в представлениях \mathcal{D}^+ серии: $p_+ < 0$.

Аналогично можно показать, что для алгебры В (формулы (5,5) - (5.14) с заменой $m \rightarrow -m$):

в представлениях \mathcal{D}^- серии: $p_- < 0$ (5.16)

в представлениях \mathcal{D}^+ серии: $p_- > 0$.

Рассмотрим дополнительную серию.

Два линейно независимых решения уравнения (5.5) можно выбрать в виде (алгебра А):

$$f_{e,m}(p) = C_{e,m} \cdot p^{e-1} W_{-m, \frac{1}{2}-e}(p)$$

и $f_{e,m}(p) = C'_{e,m} \cdot (-p)^{e-1} W_{m, \frac{1}{2}-e}(-p)$

где $W_{\mu, \nu}(p)$ - функции Уиттекера.

Заметим, что оба решения аналитичны в полной комплексной плоскости. Однако первое экспоненциально растет в левой полуплоскости, второе - в правой. Нетрудно проверить, что функция

$$f_{e,m}(p) = \begin{cases} -2^{-2e} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}m}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{p^{e-1}}{\sqrt{\Gamma(1-e-m)(e-m)}} \cdot W_{-m, \frac{1}{2}-e}(p), & \text{при } p > 0 \\ 2^{-2e} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}m}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(-p)^{e-1}}{\sqrt{\Gamma(1-e+m)(e+m)}} \cdot W_{m, \frac{1}{2}-e}(-p), & \text{при } p < 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

непрерывна при $p=0$ вместе с первой производной и обладает правильной асимптотикой на бесконечности.

Определим скалярное произведение в дополнительной серии,

как

$$(f, \varphi) = \int d\mu(p) f^*(p) \varphi(p) \quad (5.18)$$

где

$$d\mu(p) = \frac{dp}{|p|^{2e-1}} = \begin{cases} \frac{dp}{p^{2e-1}} & \text{при } p > 0 \\ \frac{dp}{(-p)^{2e-1}} & \text{при } p < 0. \end{cases}$$

инвариантная мера. Покажем, что функции (5.17) ортонормированы относительно скалярного произведения (5.18). Для этого заметим, что фурье-образ (5.17) есть [14, стр. 335/

$$f_{e,m}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipt} f_{e,m}(p) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} e^{i\frac{\pi}{2}m} \left(\frac{1}{2}-it\right)^{-(e+m)} \left(\frac{1}{2}+it\right)^{-(e-m)}$$

Кроме того, имеем

$$|p|^{1-2e} \cdot f_{e,m}(p) = f_{1-e,m}(p)$$

Таким образом ($m'-m$ - целое)

$$\begin{aligned} (f_{e,m'}, f_{e,m}) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(p) f_{e,m'}^*(p) f_{e,m}(p) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp f_{1-e,m'}^*(p) f_{e,m}(p) = \int dt dt' dp e^{-ipt} e^{ipt'} \frac{2}{(2\pi)^2} e^{i\frac{\pi}{2}(m-m')} \times \\ &\quad \times \frac{(\frac{1}{2}+it)^{m-m'}}{(\frac{1}{2}-it)^{m-m'}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}+t^2} = \end{aligned}$$

$$= \int dt \frac{1}{\pi} e^{i\frac{\pi}{2}(m-m')} \frac{1}{\frac{1}{4}+t^2} \left(\frac{\frac{1}{2}+it}{\frac{1}{2}-it}\right)^{m-m'} =$$

$$= \delta_{m'm} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{(\frac{1}{4}+t^2)} = \delta_{m'm}.$$

Для алгебры B $f_{e,m}(p)$ имеем вид (5.17) с заменой $m \rightarrow -m$.

Аналогичным методом можно рассмотреть и основную серию представлений. Таким образом, для представлений основной и дополнительной серий как алгебры A , так и алгебры B имеем:

$$-\infty < p_{\pm} < \infty, \quad p_{\pm} \neq 0. \quad (5.19)$$

Формулы (5.1), (5.15-16) дают возможность определить не только спектр p^2 , но и $\epsilon_0 = \frac{p_0}{|p_0|}$, $\epsilon_1 = \frac{p_1}{|p_1|}$. Например, для представления $D_{+-}(e_1, m_0; e_2, m_0)$ $p_+ < 0$,

$p_- < 0$, откуда

$$p^2 = p_+ p_- > 0, \quad \epsilon_0 = \frac{p_0}{|p_0|} = -1.$$

Редукция представлений конформной группы класса I по подгруппе Пуанкаре приведена в таблице 5. Отметим в заключении, что мы сопоставляли алгебре A величину p_+ , алгебре B - p_- . Однако, нетрудно убедиться, что противоположный выбор приводит к тем же результатам.

Представления	Спектр масс ($p^2 \neq 0$)	знак $\epsilon_0 = \frac{p_0}{ p_0 }$	знак $\epsilon_1 = \frac{p_1}{ p_1 }$
$D_{pp}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{ps}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		

Представления	Спектр масс ($p^2 \neq 0$)	Знак $\epsilon_0 = \frac{p_0}{ p_0 }$	Знак $\epsilon_1 = \frac{p_1}{ p_1 }$
$D_{p+}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{p-}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{sp}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{ss}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{s+}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{s-}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{+p}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{+s}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{++}(e_1, e_2)$	$p^2 < 0$		(-1)
$D_{+-}(e_1, e_2)$	$p^2 > 0$	(-1)	
$D_{-p}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{-s}(e_1, e_2)$	$-\infty < p^2 < \infty$		
$D_{-+}(e_1, e_2)$	$p^2 > 0$	(+1)	
$D_{--}(e_1, e_2)$	$p^2 < 0$		(+1)

Таблица 4. Редукция по группе Пуанкаре представлений класса 1.

УП. Представления класса II

Как уже было показано в разделе IV для всех представлений второго класса $\rho^2=0$. Дополнительной величиной, отличающей представления, является "спиральность" λ , которая для представления $\mathcal{D}_{\alpha 0}(e, 0)$ равна $\lambda=e$, а для представлений

$\mathcal{D}_{\alpha 0}(0, e)$ ($\alpha = p, s, +, -, 0$) $\lambda = -e$. Используя результаты предыдущего раздела, можно также установить какие значения принимает знак энергии в представлениях класса II.

Рассмотрим последовательно все представления второго класса. Для представления $\mathcal{D}_{+0}(e, 0)$ имеем $\rho_- = 0$, $\rho_+ = \rho_0 + \rho_1 = 2\rho_0$. Поскольку для представления $\mathcal{D}_+^A(e)$ группы $SO(2,1)$, $\rho_+ < 0$, то, следовательно, для представления

$\mathcal{D}_{+0}(e, 0)$ конформной группы $\rho_0 < 0$ ($\varepsilon_0 = -1$). Аналогично, для представления $\mathcal{D}_{-0}(e, 0)$: $\rho_- = 0$, $\rho_+ = 2\rho_0 > 0$ ($\varepsilon_0 = 1$).

Таким же методом убеждаемся (учитывая (3.10)), что для представлений $\mathcal{D}_{0+}(0, e)$ $\rho_+ = 0$, $\rho_- = 2\rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 = 1$ и

для $\mathcal{D}_{0-}(0, e)$, $\rho_+ = 0$, $\rho_- = 2\rho_0 < 0$, $\varepsilon_0 = -1$.

Поскольку, для представлений $\mathcal{D}_p^{A,B}(e)$, $\mathcal{D}_s^{A,B}(e)$ группы $SO(2,1)$, согласно (5.11) $-\infty < \rho_{\pm} < \infty$ ($\rho_{\pm} \neq 0$), то представления

$\mathcal{D}_{p0}(e, 0)$, $\mathcal{D}_{s0}(e, 0)$ и $\mathcal{D}_{0p}(0, e)$, $\mathcal{D}_{0s}(0, e)$ конформной группы содержат оба знака энергии $\varepsilon_0 = \pm 1$. Согласно классификации представлений группы Пуанкаре в двумерном пространстве-времени /15/ существует четыре типа неэквивалентных неприводимых представлений с $\rho^2=0$, отличающихся знаком энергии и, согласно нашей интерпретации, - спиральностью. Таким образом, неприводимые представления $\mathcal{D}_{+0}(e, 0)$, $\mathcal{D}_{-0}(e, 0)$ и $\mathcal{D}_{0+}(0, e)$, $\mathcal{D}_{0-}(0, e)$ конформной группы являются также неприводимыми представлениями группы Пуанкаре. Представления $\mathcal{D}_{p0}(e, 0)$, $\mathcal{D}_{s0}(e, 0)$ и

$\mathcal{D}_{0p}(0, e)$, $\mathcal{D}_{0s}(0, e)$ распадаются в прямые суммы двух неприводимых представлений группы Пуанкаре, отличающихся знаком энергии.

Представления $\mathcal{D}_{+0}(e, 0)$, $\mathcal{D}_{-0}(e, 0)$ и $\mathcal{D}_{0+}(0, e)$, $\mathcal{D}_{0-}(0, e)$ являются аналогом представлений конформной группы четырехмерного пространства Минковского, которые описывают безмассовые частицы и являются также неприводимыми представлениями четырехмерной группы Пуанкаре /16/. Представления $\mathcal{D}_{p0}(e, 0)$, $\mathcal{D}_{s0}(e, 0)$ и $\mathcal{D}_{0p}(0, e)$, $\mathcal{D}_{0s}(0, e)$, по-видимому, не имеют аналогов в четырехмерном пространстве-времени. Таким образом, естественно считать, что представления $\mathcal{D}_{+0}(e, 0)$, $\mathcal{D}_{-0}(e, 0)$ и $\mathcal{D}_{0+}(0, e)$, $\mathcal{D}_{0-}(0, e)$ описывают безмассовые частицы в двумерном пространстве.

Рассмотрим, наконец, представление $\mathcal{D}_{00} = \mathcal{D}_0^A \otimes \mathcal{D}_0^B$, для которого $\lambda = d = 0$. Поскольку $\rho_+ = \rho_- = 0$, то $\rho_{\mu} = 0$ следовательно, функция $\varphi(x)$ преобразующая по представлению \mathcal{D}_{00} является числом.

Полная классификация представлений класса II приведена в таблице 5.

Представления	$\varepsilon_0 = \frac{\rho_0}{ \rho_0 }$	λ	d
$\mathcal{D}_{+0}(e, 0)$	-1	+e	e
$\mathcal{D}_{-0}(e, 0)$	+1	+e	e
$\mathcal{D}_{0+}(0, e)$	+1	-e	e
$\mathcal{D}_{0-}(0, e)$	-1	-e	e
$\mathcal{D}_{p0}(e, 0)$	± 1	+e	e
$\mathcal{D}_{s0}(e, 0)$	± 1	+e	e
$\mathcal{D}_{0p}(0, e)$	± 1	-e	e
$\mathcal{D}_{0s}(0, e)$	± 1	-e	e
\mathcal{D}_{00}	-	0	0

Таблица 5. Представления класса II.

Заключение

В этом разделе мы кратко обсудим те из представлений двумерной группы, которые могут представлять "физический" интерес. Отметим прежде всего, что существует некоторая аналогия между двумерной конформной группой и четырехмерной.

Четырехмерная конформная группа имеет три оператора Казимира. Как известно /17/, все унитарные неприводимые представления этой группы распадаются на три различных класса. Для представлений первого класса (невырожденные представления) характерно, что они задаются значениями трех операторов Казимира. В случае представлений второго и третьего класса (вырожденные представления) независимо можно задать значения соответственно двух и одного операторов Казимира. Среди вырожденных представлений особое место занимают так называемые "лестничные представления", которые описывают свободные безмассовые поля /16/. При редукции к группе Пуанкаре эти представления переходят в соответствующие представления группы Пуанкаре с нулевой массой /16,17/.

Двумерная конформная группа имеет два оператора Казимира (раздел II)

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} M_{\mu\nu} M_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (K_{\mu} P_{\mu} + P_{\mu} K_{\mu}) - \mathcal{D}^2 \right] = \frac{1}{2} d^2 - d + \frac{1}{2} S^2$$

$$C_2 = \mathcal{D} M_{01} + \frac{1}{2} (K_1 P_0 - P_1 K_0) = (d-1)S.$$

Среди унитарных неприводимых представлений двумерной конформной группы можно выделить два различных класса (раздел IV, VII). Представления первого класса фиксируются заданием двух чисел e_1 и e_2 .

$$C_1 = e_1(e_1-1) + e_2(e_2+1)$$

$$C_2 = e_1(e_1-1) - e_2(e_2+1).$$

Представления второго класса характеризуются одним числом

$$C_1 = e(e-1)$$

$$C_2 = \pm e(e-1)$$

Среди представлений этого класса имеются четыре типа представлений $\mathcal{D}_{+0}(e,0)$, $\mathcal{D}_{-0}(e,0)$ и $\mathcal{D}_{0+}(0,e)$, $\mathcal{D}_{0-}(0,e)$, которые при редукции к группе Пуанкаре переходят в соответствующие безмассовые представления двумерной группы Пуанкаре /15/. Эти представления аналогичны "лестничным" представлениям четырехмерной конформной группы. Естественно, использовать эти представления для описания свободных безмассовых частиц.

Для физических приложений удобно перейти к неприводимым представлениям полной конформной группы с отражениями. Согласно разделу V, в случае представлений первого класса необходимо рассмотреть прямые суммы

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta}(e_1, e_2) \oplus \mathcal{D}_{\beta'\alpha'}(e_2, e_1) \quad (8.1)$$

Как следует из (4,4) представления (8.1) реализуются в пространстве двухкомпонентных функций. Имеем

$$M_{\mu\nu} = x_{\mu} p_{\nu} - x_{\nu} p_{\mu} + \Sigma_{\mu\nu} \quad (8.2)$$

$$P_{\mu} = i \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

$$K_{\mu} = x^2 p_{\mu} - 2 x_{\mu} (x p) - 2 i d x_{\mu} - 2 \Sigma_{\mu\nu} x_{\nu}$$

$$\mathcal{D} = -id - (x p)$$

где размерность d равна

$$d = e_1 + e_2 \quad (8.3)$$

а спиновая матрица $\Sigma_{\mu\nu}$ имеет вид

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} S [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = -i S \gamma_5 \epsilon_{\mu\nu} \quad (8.3a)$$

где $S = e_1 - e_2$, $\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Представления (8.2) являются аналогом спинорных и тензорных представлений четырехмерной конформной группы. Строго говоря, в двумерном пространстве-времени нельзя ввести спин, поскольку двумерная группа Пуанкаре имеет только один оператор Казимира $p^2 = m^2$. Однако, в конформной группе возникает дополнительное квантовое число S , которое мы будем интерпретировать как спин. В отличие от обычного спина, принимающего целые и полуцелые значения число S может пробегать непрерывный ряд значений (см. таблицу 2).

Среди представлений (8.1) наиболее интересны представления

$$\mathcal{D}_{SS}(e_1, e_2) \oplus \mathcal{D}_{SS}(e_2, e_1) \quad (8.4)$$

Эти представления инвариантны относительно всех дискретных преобразований, рассмотренных в разделе У. При редукции по группе Пуанкаре они содержат весь спектр масс

$$-\infty < p^2 < \infty \quad p^2 \neq 0$$

Параметры e_1 и e_2 принимают в этой серии значения

$$0 < e_1, e_2 < 1$$

Ограничиваясь только положительными значениями для спина S , имеем ($S = e_1 - e_2$)

$$0 \leq S < 1 \quad (8.5)$$

При фиксированном спине ($S \geq 0$) размерность d может меняться в пределах

$$S < d < 2 - S \quad (8.6)$$

Естественно принять [15], что "физический" смысл имеют только представления с целым и полуцелым спином. Тогда, как следует из

(8.5), в серии представлений (8.4) имеются лишь два "физических" представления: "скалярное" ($S=0$) и "спинорное" ($S=\frac{1}{2}$). Размерность d в этих представлениях принимает аномальные значения

$$S=0 \quad 0 < d < 2 \quad (8.7)$$

$$S=\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} < d < \frac{3}{2} \quad (8.8)$$

Отметим, что в формулах (8.7), (8.8) размерность не достигает "канонических" значений $d=0$ и $d=\frac{1}{2}$. Эти значения соответствуют представлениям свободных безмассовых полей (см. ниже). Все остальные представления типа (8.4), в которых размерность может принимать непрерывные значения (это, например, представления $\mathcal{D}_{p\pm}(e_1, e_2)$ или $\mathcal{D}_{pp}(e_1, e_2)$ не интересны.

В этих представлениях спин и размерность принимают комплексные значения.

Таким образом, в двумерном пространстве времени только "скалярное" и "спинорное" поля могут иметь аномальную размерность. Заметим, что в двумерной модели Тирринга [4,9], описывающей взаимодействующее спинорное поле, аномальная размерность действительно меняется в пределах (8.8), если ограничиться значениями константы связи, при которых функция Грина имеет разумную асимптотику на малых расстояниях.

Рассмотрим теперь "лестничные" представления $\mathcal{D}_{\pm 0}(e, 0)$, $\mathcal{D}_0(e, 0)$ и $\mathcal{D}_{0\pm}(0, e)$, $\mathcal{D}_{0-}(0, e)$. Введем двумерные γ -матрицы

$$\gamma^0 = \sigma_2, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 = \sigma_3. \quad (8.9)$$

Как следует из (4.7,8) поля, преобразующиеся по "лестничным" представлениям должны удовлетворять уравнениям

$$(\partial_0 + \partial_1) \psi(x) = 0 \quad \text{для} \quad \mathcal{D}_{0\pm}(0, e) \quad (8.10)$$

$$(\partial_0 - \partial_1) \psi(x) = 0 \quad \text{для} \quad \mathcal{D}_{\pm 0}(e, 0) \quad (8.11)$$

Генераторы конформных преобразований в этих представлениях задаются формулами (4.6). Число λ , фигурирующее в формулах (4.6) мы

будем интерпретировать как спиральность. В отличие от спина, который может иметь непрерывные значения, спиральность принимает значения (см. таблицу)

$$\lambda = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots \quad (8.12)$$

Для физических приложений удобно рассмотреть прямые суммы

$$\mathcal{D}_{-0}(e, 0) \oplus \mathcal{D}_{0+}(0, e) \quad (8.13)$$

и

$$\mathcal{D}_{+0}(e, 0) \oplus \mathcal{D}_{0-}(0, e). \quad (8.14)$$

Как показано в разделе У, представления (8.13) и (8.14) инвариантны относительно пространственных отражений.

Как следует из (4.6-8), генераторы задаются в пространстве двухкомпонентных функций

$$M_{\mu\nu} = x_{\mu} p_{\nu} - x_{\nu} p_{\mu} + \Sigma_{\mu\nu}$$

$$p_{\mu} = i \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad (8.15)$$

$$K_{\mu} = x^2 p_{\mu} - 2x_{\mu}(xP) - 2i|\lambda|x_{\mu} - 2\Sigma_{\mu\nu}x^{\nu}$$

$$\mathcal{D} = -i|\lambda| - (xP)$$

где λ — спиральность

$$|\lambda| = e = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\right) \quad (8.16)$$

а спиновая матрица $\Sigma_{\mu\nu}$ может быть представлена в виде

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}|\lambda| [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] = i|\lambda| \gamma_5 \epsilon_{\mu\nu}$$

При этом уравнения (8.10-11) заменяются на

$$\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \psi(x) = 0 \quad (8.17)$$

где ψ — двухкомпонентная функция.

Как известно, в четырехмерном пространстве-времени масштабная размерность в лестничных представлениях принимает канонические значения $d = 1 + |\lambda|$. Аналогичная ситуация имеет место для двумерного случая. Как следует из (8.25), масштабная размерность определяется спиральностью

$$d = |\lambda|$$

и, следовательно, может принимать только канонические значения

$$d = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

Уравнения (8.10.11), которым удовлетворяют безмассовые поля, аналогичны уравнениям для безмассовых полей в четырехмерном пространстве-времени. В частности, представления

$$\mathcal{D}_{+0}\left(\frac{1}{2}, 0\right) ; \quad \mathcal{D}_{0+}\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

являются аналогом представлений, по которым преобразуются поля лево- и правополяризованных нейтрино (антинейтрино)

$$\mathcal{D}_{0+}\left(0, \frac{1}{2}\right) : \quad p_0 > 0, \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{D}_{+0}\left(\frac{1}{2}, 0\right) : \quad p_0 < 0, \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

а уравнения (8.10-11) аналогичны уравнениям Вейля. Для описания поля частиц определенной спиральности можно использовать и уравнения (8.17). При этом на двухкомпонентное поле ψ необходимо наложить одно из дополнительных условий

$$\lambda > 0 : \quad (1 + \gamma^5) \psi = 0$$

$$\lambda < 0 : \quad (1 - \gamma^5) \psi = 0.$$

Отметим в заключение, что согласно разделу III, двумерная конформная группа не допускает существования свободного скалярного поля. Действительно, свободное безмассовое скалярное поле ($\lambda = d = 0$) преобразуется по представлению

$$D_{00} = D_0^A \otimes D_0^B \quad (8.19)$$

Но D_0^A и D_0^B — одномерные представления группы $SO(2,1)$, следовательно, и представление (8.19) одномерно. Этот результат не является неожиданным. В [18] показано, что никаких свободных скалярных безмассовых полей в двумерном пространстве времени не может существовать также и по другим причинам.

Авторы искренне благодарны А.З.Паташинскому за руководство работой и плодотворные обсуждения и Ю.Б.Румеру за стимулирующий интерес к работе и полезные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. K. G. Wilson, *Phys. Rev.* 179, 1499 (1969).
2. D. Y. Gross, Y. Wess, *Phys. Rev.* 2D, 753 (1970).
3. G. Mack, I. T. Todorov, preprint, ИСТР. IC/71/139, (1971).
4. K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, D2, 1473. (1970), D2, 1478 (1970).
5. А.М.Поляков. *ЖЭТФ*, 59, 542 (1970).
6. E. Y. Schreier, *Phys. Rev.*, 3D, 980 (1971).
7. A. A. Migdal, *Phys. Lett.* B37, 98 (1971).
8. W. Thirring, *Ann. Phys.*, 3, 91 (1958).
9. K. Johnson, *Nuovo Cim.*, 20, 773 (1961).
10. G. Mack, A. Salam, *Ann. Phys (N.Y)*, 53, 174 (1969).
11. P. A. M. Dirac, *Ann. Math.*, 37, 429 (1936).
12. A. O. Barut, R. Raczka, *Proc. Roy. Soc.*, 287, 519 (1965).
13. A. O. Barut, C. Fronsdal, *Proc. Roy. Soc.*, 287, 532 (1965).
14. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ФМ, 1963.
15. B. Dubin, *Nuovo Cim.*, B67, 39 (1970).
16. G. Mack, I. Todorov, *J. Math. Phys.*, 10, 2078, (1969).
17. Tsu Yao, *J. Math. Phys.*, 8, 1931 (1967). 9, 1615 (1968). 12, 315 (1971).
18. А.Вайтман. *Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей*. "Наука", М., 1968.

