23

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

И Я Ф 73 - 72

А.А.Харьков

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ВБЛИЗИ МАССИВНЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЗВЁЗД

Новосибирск

1972

А.А.Харьков

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ВБЛИЗИ МАССИВНЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЗВЕЗД

Рассмотрены решения уравнений Максвелла в метрике Керра. Показано, что вращение приводит к $2\ell + 1$ - кратному расщеплению частоты ℓ-й сферической гармоники поля. Кроме того, "косые члены" метрики приводят к появлению как "электрических", так и "магнитных" компонент тензора электромагнитного поля, независимо от характера источника. При этом инвариант $(\vec{E}\vec{H}) \neq 0$. Доказана устойчивость внешней метрики относительно электромагнитных возмущений, возникающих при коллапсе вращающихся тел.

Все нестационарные внешние поля, как и для метрики Шварцшильда, исчезают экспоненциально во времени. Показано также, что изучавшиеся в ряде работ /9-12/ "хвосты" волновых пакетов являются следствием метода приближений и отсутствуют в точном решении.

Abstrakt

Solutions of Maxwell equations in Kerr space are considered. It is shown that the rotation leads to a $2l+1$ -multiple frequency splitting of the l -spherical harmonic of the field. Besides it non-diagonal components of the metric cause the appearance of both "electric" and "magnetic" components of the electromagnetic field tensor independently of the source nature. In this case the invariant of $(\vec{E}\vec{H}) \neq 0$. The stability of the rotating black hole as regards the electromagnetic perturbations emerging in case of the gravitation collapse is proved. All the non-stable outer fields as well as in case of the Schwarzschild black hole disappear exponentially in time. It was also shown that the wave tails which had been studied in a namber of papers /9-I2/ are the result of approximation and do not occure in exact solutions.

1. В в е д е н и е

Мы рассмотрим поведение электромагнитного поля в окрестности массивных вращающихся тел в пустоте. При этом поле считаем достаточно слабым, так чтс можно пренебречь его влиянием на метрику. В качестве невозмущенной метрики используем известное точное решение Керра /1,2/

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = \frac{\Sigma - r}{\Sigma}dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2 -$$

$$-\left(r^2 + a^2 + \frac{ra^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta\, d\varphi^2 - \frac{2ar\sin^2\theta}{\Sigma}dt\,d\varphi\ , \tag{1.1}$$

где
$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta\ ,\quad \Delta = r^2 - r + a^2 \tag{1.2}$$

Здесь и ниже мы выбираем безразмерную систему единиц

$c = k = 2m = 1.$

В п.п. 2–4 изучаются решения уравнений Максвелла в метрике (1.1) в линейном приближении по a ; общий случай рассмотрен в приложении 2. В п.5 анализируются электромагнитные возмущения внешней метрики, возникающие при коллапсе вращающихся магнитных звезд. Наконец, в п.6 рассмотрен вопрос о так называемых "хвостах" волновых пакетов, распространяющихся в графитационном поле.

2. Вывод уравнений

Уравнение Максвелла в заданном графитационном поле в пустоте имеют вид

$$F_{ik,q} + F_{kq,i} + F_{qi,k} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,F^{jk}\right) = 0 \tag{2.2}$$

Компоненты метрического тензора, в линейном по приближении, равны

$$g_{00}=\frac{1}{g^{00}}=\frac{r-1}{r},\quad g_{11}=\frac{1}{g^{11}}=\frac{-r}{r-1},\quad g_{22}=\frac{1}{g^{22}}=-r^2,$$
$$g_{33}=\frac{1}{g^{33}}=-r^2\sin^2\theta,\quad g_{03}=\frac{-a\sin^2\theta}{r},\quad g^{03}=\frac{-a}{r^2(r-1)} \tag{2.3}$$

В уравнениях (2.1) – (2.2) перейдем к комбинациям

$$iF^{02}\mp\sin\theta F^{03}=2E^{\pm},\quad iF^{12}\mp\sin\theta F^{13}=2H^{\pm},$$
$$\sin\theta F^{23}=iH^{1},\quad F^{01}=E^{1} \tag{2.4}$$

$$iF_{02}\mp\frac{F_{03}}{\sin\theta}=2E_{\pm},\quad iF_{12}\mp\frac{F_{13}}{\sin\theta}=2H_{\pm}, \tag{2.5}$$

$$F_{23}/\sin\theta=iH_1,\quad F_{01}=E_1$$

и представим все величины в виде

$$f(r,t,\theta,\varphi)=$$
$$=\sum_{l,n}e^{-in\varphi}P^{l}_{mn}(\cos\theta)\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\, f_{l,n}(r,\omega) \tag{2.6}$$

где $m=\pm1$ для $E^{\pm},H^{\pm}(E_{\pm},H_{\pm})$ и $m=0$ для E^1, $H^1(E_1,H_1)$, $P^{l}_{mn}(\cos\theta)$ – обобщенные полиномы Лежандра /3/.

Удобно произвести вычисления, используя контравариантные компоненты тензора электромагнитного поля F^{ik} для значений $i=0,k=1,\ q=2,3$ в уравнениях (2.1) и j = 0,1 в (2.2), и ковариантные компоненты F_{ik} при K = 2, q = 3, i = 0,1 в (2.1) и j = 2,3 в (2.2).

Уравнения (2.2) для j = 0,1 дают

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E^1\right) - i\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\right)\left(E^+ + E^-\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(E^+ - E^-\right)\right] = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial E^1}{\partial t} + i\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\right)\left(H^+ + H^-\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(H^+ - H^-\right)\right] = 0$$

Или, используя (2.6) и рекуррентные соотношения для P^{l}_{mn} получаем

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E^1\right) + \sqrt{l(l+1)}\left(E^+ + E^-\right) = 0$$

$$i\omega E^1 + \sqrt{l(l+1)}\left(H^+ + H^-\right) = 0 \tag{2.7}$$

В (2.1) берем сумму и разность уравнений с q = 2,3 , i = 0 , k = 1

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left[r(r-1)E^{\pm}\right] - \frac{2i\omega r^3}{r-1}H^{\pm} - i\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)E^1 \pm$$

$$\pm \frac{a\sin\theta}{r-1}\frac{\partial E^1}{\partial t} - a\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(rH^1\right) + \tag{2.8}$$

$$+ \frac{ia\sin\theta}{r-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta \pm \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(H^+ - H^-\right) = 0$$

Для отделения угловой части умножим это уравнение на

$\frac{2l+1}{2}\,\overline{P^{l}_{\pm1,n}(\cos\theta)}$ и проинтегрируем по $d(\cos\theta)$. Соответствующие вычисления приведены в приложении 1 ; результат имеет вид

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial r}\big[r(r-1)(E^{+}+E^{-})\big]-\frac{i\omega r^{3}}{r-1}(H^{+}+H^{-})+\sqrt{l(l+1)}\,E^{1}+$$

$$+\frac{ian}{r-1}(H^{+}+H^{-})+\frac{an\omega\,E^{1}}{(r-1)\sqrt{l(l+1)}}\Big\}_{l}+ia\frac{\sqrt{(l+1)(l^{2}-n^{2})}}{\sqrt{l}\,(2l-1)}\Big[\frac{\partial}{\partial r}(rH^{1})+$$

$$+\frac{\sqrt{(l-1)l}}{r-1}(H^{+}-H^{-})\Big]_{l-1}-ia\frac{\sqrt{(l+1)^{2}-n^{2}}}{2l+3}\cdot\sqrt{\frac{l}{l+1}}\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial}{\partial r}(rH^{1})+\frac{\sqrt{(l+1)(l+2)}}{r-1}(H^{+}-H^{-})\Big]_{l+1}=0 \qquad (2.9)$$

(после отделения углов мы взяли сумму уравнений (2.8)). Аналогичным образом из группы уравнений для компонент F_{ik} находим

$$\frac{\partial H_{1}}{\partial r}+\sqrt{l(l+1)}\,(H_{+}-H_{-})=0$$

$$i\omega H_{1}-\sqrt{l(l+1)}\,(E_{+}-E_{-})=0 \qquad (2.10)$$

и

$$\Big\{\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\Big[\frac{r-1}{r}(H_{+}-H_{-})\Big]+\frac{i\omega}{r(r-1)}(E_{+}-E_{-})+\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r^{4}}H_{1}-$$

$$-\frac{ian}{r^{4}(r-1)}(E_{+}-E_{-})+\frac{an\omega\,H_{1}}{r^{4}(r-1)\sqrt{l(l+1)}}\Big\}_{l}-\frac{ia}{r^{2}}\frac{\sqrt{(l+1)(l^{2}-n^{2})}}{\sqrt{l}\,(2l-1)}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{E_{1}}{r}\Big)+$$

$$+\frac{\sqrt{(l-1)l}}{r^{2}(r-1)}(E_{+}+E_{-})\Big]_{l-1}+\frac{ia}{r^{2}}\frac{\sqrt{(l+1)^{2}-n^{2}}}{2l+3}\cdot\sqrt{\frac{l}{l+1}}\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{E_{1}}{r}\Big)+\frac{\sqrt{(l+1)(l+2)}}{r^{2}(r-1)}(E_{+}+E_{-})\Big]_{l+1}=0 \qquad (2.11)$$

Т.к. мы ограничиваемся первым порядком малости по a, в членах со сдвинутыми l уравнений (2.9), (2.11) можно использовать связи нулевого приближения между ковариантными и контравариантными компонентами тензора электромагнитного поля: а именно

$$E_\pm = -z(z-1)E^\pm, \quad H^\pm = \frac{z-1}{z^3} H_\pm, \qquad\qquad (2.12)$$

$$-z^2 E_1 = z^2 E^1 \equiv E, \quad z^4 H^1 = H_1 \equiv H$$

Последние два соотношения следует также рассматривать как определение E и H.

Используя указанную возможность и выражая $E_\pm$, $H_\pm$ из уравнений (2.7), (2.10) через E и H, получаем окончательную систему уравнений

$$\left\{ \frac{d^2E}{dz^2} + \frac{1}{z(z-1)}\frac{dE}{dz} + \left[\frac{z^2\omega^2}{(z-1)^2} - \frac{2an\omega}{z(z-1)^2} - \frac{l(l+1)}{z(z-1)}\right]E\right\}_l = \qquad (2.13а)$$

$$= \frac{3ia}{z^3(z-1)}\left[\frac{l\sqrt{(l+1)^2-n^2}}{2l+3}H_{l+1} - \frac{(l+1)\sqrt{l^2-n^2}}{2l-1}H_{l-1}\right],$$

$$\left\{ \frac{d^2H}{dz^2} + \frac{1}{z(z-1)}\frac{dH}{dz} + \left[\frac{z^2\omega^2}{(z-1)^2} - \frac{2an\omega}{z(z-1)^2} - \frac{l(l+1)}{z(z-1)}\right]H\right\}_l = \qquad (2.13б)$$

$$= \frac{3ia}{z^3(z-1)}\left[\frac{l\sqrt{(l+1)^2-n^2}}{2l+3}E_{l+1} - \frac{(l+1)\sqrt{l^2-n^2}}{2l-1}E_{l-1}\right].$$

От уравнений в метрике Шварцшильда (2.13) отличаются изменением "потенциала" и появлением неоднородных правых частей. Для малых a (как будет видно из результата и в общем случае) можно учитывать эффекты, связанные с этими поправками независимо.

3. Неоднородное решение

Рассмотрим сначала статические аксиально-симметричные поля (в п.4 и приложениях 2 показано, что статическое во всем пространстве решение обязательно аксиально-симметрично).

При $\omega = n = 0$, система уравнений (2.13) принимает вид

$$E_l'' + \frac{1}{r(r-1)} E_l' - \frac{l(l+1)}{r(r-1)} E_l = \frac{3ia\,l(l+1)}{r^3(r-1)}\left(\frac{H_{l+1}}{2l+3} - \frac{H_{l-1}}{2l-1}\right) \tag{3.1}$$

$$H_l'' + \frac{1}{r(r-1)} H_l' - \frac{l(l+1)}{r(r-1)} H_l = \frac{3ia\,l(l+1)}{r^3(r-1)}\left(\frac{E_{l+1}}{2l+3} - \frac{E_{l-1}}{2l-1}\right)$$

Общее решение однородных уравнений выражается через гипергеометрические функции и равно

$$C_1 r^2 F(-l+1, l+2; 3; r) + C_2 \frac{(-)^l}{r^l} F(l, l+2; 2l+2; 1/r) \tag{3.2}$$

C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Неоднородные члены уравнений приводят, вообще говоря, к появлению в решении всех сферических мультипольных гармоник. В первом порядке по a, однако, не нужно учитывать обратное влияние и цепочка уравнений расцепляется. Приведем для примера решение, переходящее при $a = 0$ в поле магнитного диполя d параллельного оси Oz

$$F_{23} = 3d\,\psi(r)\sin\theta\cos\theta, \quad F_{13} = \frac{3}{2} d\,\psi'(r)\sin^2\theta,$$

$$F^{01} = \frac{9ad\,\chi(r)}{r^2}(3\cos^2\theta - 1), \quad F^{02} = \frac{-9ad\,\chi'(r)}{r^2}\sin\theta\cos\theta \tag{3.3}$$

где

$$\psi(r) = 2r + 1 + 2r^2 \ln\frac{r-1}{r}, \quad \chi(r) = \frac{1}{3r} + \frac{5}{9} +$$

$$+ \frac{10}{3}r - \frac{40}{3}r^2 + \left(\frac{1}{3} + 10r^2 - \frac{40}{3}r^3\right)\ln\frac{r-1}{r} \tag{3.4}$$

При $r \gg 1$ имеем

$$F_{23} \simeq -2d\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\,,\quad F_{13} \simeq d\,\frac{\sin^2\theta}{r^2}\,,$$

$$F^{01} \simeq \frac{ad(3\cos^2\theta - 1)}{r^5}\,,\quad F^{02} \simeq \frac{3ad\sin\theta\cos\theta}{r^6}$$

Переходя при $r = r_0 >> 1$ к локально-эвклидовым координатам, находим для "физических" напряженностей электромагнитного поля выражения

$$H^{(r)} = 2d\,\frac{\cos\theta}{r_0^3}\,,\quad H^{(\theta)} = d\,\frac{\sin\theta}{r_0^3}\,,$$

$$E^{(r)} = -ad\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{r_0^5}\,,\quad E^{(\theta)} = -ad\,\frac{3\sin\theta\cos\theta}{r_0^5} \tag{3.5}$$

Аналогично, любой 2^l - польный источник приводит к появлению как "электрических", так и "магнитных" компонент тензора электромагнитного поля: при этом решение содержит члены с тензорной размерностью от $l-1$ до $l+1$. Наконец отметим, что инвариант ($\vec{E}\vec{H}$) $\neq 0$ (кроме экватора). Поэтому, в отличие от хорошо известного униполярного эффекта, в данном случае не существует системы отсчета, в которой отсутствовало бы электрическое поле.

Очевидно, такая же ситуация имеет место и для волновых решений. Поправки к E или H, возникающие в этом случае, убывают при $r \to \infty$ как $1/r^4$.

4. Возмущение "потенциала"

Рассмотрим теперь эффекты, связанные с "изменением потенциала". Интересующее нас уравнение имеет вид

$$E'' + \frac{1}{r(r-1)}E' + \left[\frac{r^2\omega^2}{(r-1)^2} - \frac{2an\omega}{r(r-1)^2} - \frac{l(l+1)}{r(r-1)}\right]E = 0 \tag{4.1}$$

Или, переходя к новой переменной $\xi = r + \ln(r-1)$

$$\frac{d^2E}{d\xi^2} + \left[\omega^2 - \frac{(z-1)\,l(l+1)}{z^3}\right]E = 0 \tag{4.2}$$

При $n=0$ (аксиальная симметрия) задача о распространении волн в метрике (1.1), (2.3) эквивалентна известной задаче рас - сеяния на одномерном потенциальном барьере $V(\xi) = \frac{(z-1)l(l+1)}{z^3}$

Соответствующие решения для подобных потенциалов исследовались в работах /4,5/.

Для $n \neq 0$ рассмотрим сначала решения уравнения (4.1) в двух асимптотических областях

а) $z \gg 1$

$$E \simeq c_1 e^{i\omega z} + c_2 e^{-i\omega z} \tag{4.3}$$

б) $z \sim 1$

$$E \simeq c_3 e^{i(\omega - an)\ln(z-1)} + c_4 e^{-i(\omega-an)\ln(z-1)} \tag{4.4}$$

Пусть источник с частотой ω находится на бесконечности.

В таком случае, для $\omega \gg 1$ мы можем приближенно положить $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = c_4 = c$. Подставляя (4.3), (4.4), в (2.6) и полагая для простоты $c(l_0) = 1,\ c(l \neq l_0) = 0$, находим

$$E \simeq \sum_{n=-l_0}^{l_0} P_{0n}^{l_0} e^{-in\varphi} \exp[i\omega(t+z)],\ z \gg 1 \tag{4.5}$$

$$E \simeq \sum_{n=-l_0}^{l_0} P_{0n}^{l_0} e^{-in[\varphi - a\ln(z-1)]} \exp\left[-i\omega\left(t + \ln(z-1)\right)\right],\ z \sim 1$$

Переход к локально-лоренцевой системе отсчета в точке $z = z_0$ для метрики (1.1), (2.3), как известно, включает преобразование /2/

$$\varphi \to \tilde{\varphi} = \varphi - \frac{a}{r_0^3} t \qquad (4.6)$$

[1)]

Поэтому для местного инерциального (точнее локально-шварцшильдовского) наблюдателя решение (4.5) будет иметь вид

$$E \simeq \sum_n P_{on}^{l} e^{-in\tilde{\varphi}} \exp\left[-i(\omega - an)(t + \ln(r-1))\right], \ r \to 1 \qquad (4.7)$$

Т.о. частота ω монохроматической на бесконечности волны, вблизи r_g оказывается $2l+1$ – кратно расщепленной и решение представляется суперпозицией волн с частотами $\omega - an$. Делая в (4.1) и (2.6) замену $\omega = \Omega + an$, легко получить, что и наоборот, заданная вблизи r_g частота Ω, на бесконечности окажется $2l+1$ кратно расщепленной. Если источник излучения находится в точке $r = r_0$, то соответствующая замена, очевидно, есть $\omega = \Omega + an/r_0^3$ и величина расщепления на бесконечности $\Delta\omega = \frac{a c r_g}{r_0^3}$ (мы перешли к размерным единицам).

Учет члена $V(\xi)$ в уравнениях (4.1) – (4.2) не изменит полученного результата, т.к. "потенциальный барьер" приводит лишь к появлению отраженной волны и не влияет на частоту. Впервые на расщепление частоты в метрике Керра было обращено внимание в /6/. Там же было указано, что расщепление связано с различным красным смещением для квантов с различными проекциями момента M_z.

Особо следует рассмотреть случай частот $\omega \lesssim a$. Как видно из (2.13) и (4.1), линейное приближение по a для таких частот становится недостаточным и следует учитывать дальнейшие члены разложения. Однако схема расщепления оказывается более общей (подробнее см. приложение 2) и справедлива и для малых частот. В частности расщепляется и нулевая частота, поэтому решение статическое в одной асимптотической области пространства оказывается волновым в другой. Очевидно, единственным статическим при всех r решением является аксиально-симметричное,

---

1) Вблизи поверхности Шварцшильда, в так называемой эргосфере, реальными телами вообще можно реализовать только вращающуюся относительно бесконечности систему отсчета.

т.к. при $n=0$ нет расщепления.

5. Внешние поля при коллапсе вращающихся тел

В этом параграфе мы рассмотрим поведение электромагнитного поля, источником которого является коллапсирующее тело. Наиболее интересной является область пространства вблизи поверхности Шварцшильда $S_Ш$ (для $r \gg 1$ релятивистскими поправками можно пренебречь и поведение решений очевидно). Как обычно предполагаем, что в материи при пересечении $S_Ш$ не возникает никаких особенностей (т.е. и метрика и напряженности других полей регулярны).

Чтобы найти поле в пустоте, заметим, что покоящееся вблизи r_g в локально-шварцшильдовских координатах (см.(4.6)) тело, вращается относительно бесконечности с частотой a. Если в разложении полей на поверхности тела по сферическим гармоникам имеются члены с $n \neq 0$, то для далекого наблюдателя оно будет излучать с частотами, равными an. Соответствующие решения в пустоте получаются из (4.1) /или (П2.1)/ после замены

$$\omega \to \Omega = \omega - an \tag{5.1}$$

Очевидно, ту же замену следует сделать и в случае движущегося тела. Т.о. вне материи мы имеем выражения

$$E \simeq \sum_{l,n} P^l_{on} e^{-in\tilde{\varphi}} \left[C_+(\Omega) e^{-i\Omega(t+\ln(r-1))} + C_-(\Omega) e^{-i\Omega(t-\ln(r-1))} \right], \quad r \sim 1 \tag{5.2}$$

и

$$E \simeq \sum_{l,n} P^l_{on} e^{-in\varphi} C(\Omega) e^{ian(t-r)} \exp[-i\Omega(t-r)], \quad r \gg 1 \tag{5.3}$$

для гармонических составляющих поля, или интегрируя по $d\Omega$ в t - представлении

$$E \simeq \sum_{l,n} P^l_{on} e^{-in\tilde{\varphi}} \left[F_+(t+\ln(r-1)) + F_-(t-\ln(r-1)) \right], \quad r \sim 1 \tag{5.2a}$$

$$E \simeq \sum_{l,n} P^l_{ln} e^{-in\varphi} F(t-r) e^{ian(t-r)}, \quad r \gg 1 \tag{5.3a}$$

C_+, C_-, C (а, следовательно, и функции F) зависят от l, n.

Движение поверхности коллапсирующего тела вблизи $S_Ш$ можно приближенно считать свободным /7/. Зависимость $r(\tau)$ и $t(\tau)$, где τ - собственное время частицы свободно падающей в поле Керра, в окрестности $S_Ш$ совпадает с законом движения в метрике Шварцшильда /2/. Поэтому сшивка выражения (5.2) с материей приводит к тем же результатам, что и в отсутствии вращения. А именно оказывается /4/, что $C(\omega)$ пропорциональна $\delta(\omega)$ [2] при $\omega = 0$ и имеет полюса на отрицательной мнимой полуоси в точках $Im\,\omega = -m/2$, $m = 1, 2, \ldots$ Связь между коэффициентами C_-, C_+ и C в общем виде, дается соотношениями

$$C_+(\omega) = R(\omega) C_-(\omega), \quad C(\omega) = D(\omega) C_-(\omega)$$
$$|R|^2 + |D|^2 = 1 \tag{5.4}$$

Для некоторых частных случаев коэффициент прохождения $|D|^2$ рассчитывался в /5/.

Поведение $F(z)$ при $z \to \infty$ (закон затухания) существенно зависит от аналитических свойств $D(\omega)$ при $\omega = 0$. Изложим подробно метод определения зависимости $D(\omega)$ для малых частот /4/. Для простоты, рассмотрим сначала уравнения (4.1) - (4.2) с $a = 0$. В областях, ограниченных условиями $|r-1| \ll 1$, $r \gg 1$ (α) и $|\omega \ln(r-1)| \gg 1$, $\omega r \gg 1$ (β) уравнение (4.1) имеет асимптотические решения

$$E \simeq const \cdot e^{\pm i\omega \ln(r-1)}; \quad E \simeq const \cdot e^{\pm i\omega r} \tag{5.5}$$

---
2) или имеет простой полюс

В подбарьерной области $\exp(\frac{1}{\omega}) < r-1 < 1/\omega$ (γ) осуществляется квазистатическое решение (3.2) ; т.к. мы рассматриваем уходящие волны $C_1 = 0$ и $E \simeq C_2(\omega) r^{-\ell} F(\ell, \ell+2; 2\ell+2; 1/r)$.
Для $r \sim 1$ и $r \gg 1$ (очевидно, что при $\omega \ll 1$ условия (α) и (γ) совместны) квазистатическое решение есть

$$E \simeq -C_2(\omega) \frac{(2\ell+1)!}{(\ell-1)!\,(\ell+1)!} \ln(r-1), \quad r \sim 1 \tag{5.6}$$

и

$$E \simeq C_2(\omega) r^{-\ell}, \quad r \gg 1 .$$

Чтобы получить связь между коэффициентами при волновых решениях (5.5) нужно найти такие приближенные решения уравнения (4.1) в областях $r \sim 1$ и $r \gg 1$, которые при выполнении условия (β) давали бы (5.5), а при $\omega \to 0$ переходили бы, соответственно, в решение (5.6). Легко видеть, что такими решениями являются

$$E \simeq C_+(\omega) e^{-i\omega \ln(r-1)} + C_-(\omega) e^{i\omega \ln(r-1)} \tag{5.7}$$

слева от барьера, и

$$E \simeq C(\omega) i^{\ell+1} \sqrt{\frac{\pi \omega r}{2}}\, H^{(1)}_{\ell+1/2}(\omega r) \tag{5.8}$$

справа от барьера. $H^{(1)}_{\ell+1/2}(\omega r)$ - функция Ганкеля 1-го рода. Сравнивая (5.8) с (5.6) получаем

$$C(\omega) = \frac{(-2i)^{\ell}\, \ell!}{(2\ell)!} \omega^{\ell} C_2(\omega) \tag{5.9}$$

$C_2(\omega)$ находим делая в (5.7) разложение по степеням $\omega \ln(r-1)$ и сравнивая результат с (5.6)

$$-C_2 \frac{(2\ell+1)!}{(\ell-1)!(\ell+1)!} \ln(r-1) = C_+ + C_- + i\omega \ln(r-1)(C_- - C_+)$$

т.е. $C_+(0) = -C_-(0)$, и

$$C_2(\omega\to 0) \simeq \frac{-2i\,(\ell-1)!\,(\ell+1)!}{(2\ell+1)!}\,\omega\, C_-(\omega) \quad (5.10)$$

Объединяя (5.9) - (5.10), находим коэффициент прохождения

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{(-2i)^{\ell+1}(\ell-1)!\,\ell!\,(\ell+1)!}{(2\ell)!\,(2\ell+1)!}\,\omega^{\ell+1} + O(\omega^{\ell+2}) \quad (5.11)$$

Для $a \neq 0$ главные члены асимптотических разложений статического решения в областях $z \sim 1$ и $z \gg 1$ совпадают с (5.6) (см. приложение 2). Следовательно, $\mathcal{D}(\omega)$ в этом случае будет отличаться от (5.11) только коэффициентом при $\omega^{\ell+1}$.

При вычислении $F(z)$ замыкаем контур интегрирования в (2.6) в нижней полуплоскости ω; $F(z) = \oint C(\omega)\, e^{-i\omega z} d\omega$. Как мы только что показали, $C(\omega) = \mathcal{D}(\omega)\, C_-(\omega)$ - регулярна в нуле. Поэтому значение интеграла (2.6) по замкнутому контуру будет, в основном, определяться ближайшей к вещественной оси особенностью $C(\omega)$. При этом, очевидно, $F(z) \sim$ $\sim e^{-\lambda z}$. Можно предположить, что ближайшей особенностью является полюс в точке $\operatorname{Im}\omega = -1/2$ у функции $C_-(\omega)$; тогда $\lambda = 1/2$.

6. "Хвосты" волновых пакетов

В ряде работ /9-12/, используя теорию возмущений, рассматривалось распространение гравитационных и электромагнитных волн в гравитационном поле, созданном островной системой масс. Учет релятивистских поправок, в первом же порядке приводил к размыванию заднего фронта валового пакета и к появлению медленно убывающего (как t^{-n}) во времени "хвоста".

Рассмотрим распространение волнового пакета в поле Шварцшильда (или Керра), используя результаты предыдущего параграфа. Пусть источник излучения расположен в точке $z = z_0$.

Связь между спектральной функцией пакета вблизи источника и в волновой зоне ($r \to \infty$) даётся формулой типа (5.4):

$C(\omega, r \to \infty) = D(\omega)\, C(\omega, r = r_0)$. Низкочастотный предел $D(\omega)$ совпадает с (5.11) если $r_0 \sim r_g$ и определяется выражением (5.9), если $r_0 >> r_g$. Если задний фронт испущенного пакета достаточно резкий (убывает как $e^{-\mu t}$ или быстрее), $C(\omega, r = r_0)$ имеет полюса в нижней полуплоскости ω . Повторяя рассуждения предыдущего параграфа легко видеть, что при переходе к пакету в волновой зоне значение интеграла по $d\omega$ будут определяться вычетами в полюсах функции $C(\omega\ ,\ r = r_0\ )$ (и, возможно, $D(\omega)$. При этом форма заднего фронта волнового пакета практически воспроизведется и, во всяком случае, не проявится медленно убывающих"хвостов".

Нетрудно понять причину появления "хвостов" в /9-12/. Используемый в этих работах метод приближений включает разложение по величине r_g/r . Сделав в коэффициентах уравнения (4.1) при $a=0$ такое разложение получим, исключая первую производную

$$u'' + \left[\omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{l(l+1)-1}{r^3}\right]u = 0 \qquad (6.1)$$

(учет коэффициента при ω^2 не изменит результата). Можно показать, что зависимость $D(\ \omega\ )$ для уравнения (6.1) при $\omega \to 0$, в отличие от (5.9), включает еще $\ln\omega$. Логарифмическое ветвление приводит к тому, что главный вклад при больших t в (2.6) даёт интеграл по разрезу. Последний можно привести к виду $I = \int_0^\infty \omega^n p(\omega) e^{-i\omega z} d\omega, \quad z = t - r$

где $p(\omega)$ - регулярна вдоль пути интегрирования и быстро убывает при $\omega \to \infty$. Основной вклад в этот интеграл дает область малых частот и $I \simeq const \cdot z^{-n-1}$.

Т.о. размывание заднего фронта волнового пакета является следствием метода приближений и отсутствует в точном решении. Учет возмущений исходной метрики при $a = 0$ не изменит полученного результата, т.к. всегда будет воспроизводиться уравнение типа (4.1) с правой частью, исчезающей после прохождения пакета. В общем случае ($a \neq 0$) для подобного заключения нужен предварительный анализ точных уравнений для гравитационных волн в метрике Керра, аналогичный проделанному в приложении 2. Однако, можно ожидать, что рассмотренная ситуация является общей для всех волновых полей.

Я благодарю И.Д.Новикова за многочисленные стимулирующие обсуждения и А.З.Паташинского за научное руководство.

Приложение 1.

При выводе соотношений (2.9), (2.11) требовалось вычислить интегралы от произведения трех обобщенных полиномов Лежандра. Как известно /3/, произведение 2-х полиномов Лежандра всегда можно представлять в виде

$$P^{l}_{mn}(\cos\theta)\, P^{l'}_{m'n'}(\cos\theta) =$$

$$= \sum_{L=|l-l'|}^{l+l'} C^{l\,l'\,L}_{m\,m'\,m+m'}\, C^{l\,l'\,L}_{n\,n'\,n+n'}\, P^{L}_{m+m',\,n+n'}(\cos\theta) \tag{П1.1}$$

где $C^{l\,l'\,L}_{m\,n\,m+n}$ – коэффициенты Клебша-Гордана, и остающиеся интегралы вычисляются с помощью соотношений ортогональности. Конкретно, в случае (2.9), (2.11) имеем

$$\frac{2l_0+1}{2}\sum_{l} A_l \int_{-1}^{1} (i\sin\theta)\, P^{l}_{0n}(\cos\theta)\, \overline{P^{l_0}_{\pm 1 n}(\cos\theta)}\, d(\cos\theta)$$

Подставив $i\sin\theta = \sqrt{2}\, P^{1}_{\pm 1,0}(\cos\theta)$ и воспользовавшись (П1.1) находим

$$\sum_{l} A_l P^{l}_{0n} P^{1}_{\pm 1,0} = \sum_{l} A_l \sum_{l'=|l-1|}^{l+1} C^{1\,l\,l'}_{\pm 1\,0\,\pm 1}\, C^{1\,l\,l'}_{0\,n\,n}\, P^{l'}_{\pm 1,n}$$

Следовательно интеграл равен

$$\sqrt{2}\sum_{l=|l_0-1|}^{l_0+1} A_l\, C^{1\,l\,l_0}_{\pm 1\,0\,\pm 1}\, C^{1\,l\,l_0}_{0\,n\,n} \tag{П1.2}$$

Входящие в сумму (П1.2) коэффициенты Клебша-Гордана равны

$$C^{1\,l-1\,l}_{\pm 1\,0\,\pm 1}\, C^{1\,l-1\,l}_{0\,n\,n} = \frac{\sqrt{l^2-n^2}}{2l-1}\sqrt{\frac{l+1}{2l}}$$

$$C^{1\,l+1\,l}_{\pm 1\,0\,\pm 1}\, C^{1\,l+1\,l}_{0\,n\,n} = -\frac{\sqrt{(l+1)^2-n^2}}{2l+3}\sqrt{\frac{l}{2(l+1)}}$$

$$C^{1\ell\ell}_{100}\, C^{1\ell\ell}_{0nn} = -C^{1\ell\ell}_{-10-1}\, C^{1\ell\ell}_{0nn} = \frac{-n}{\sqrt{2\ell(\ell+1)}}$$

Аналогично вычисляются интегралы от произведения любого числа полиномов Лежандра.

Приложение 2.

Для выяснения характера решения в области частот $\omega \simeq a$ мы воспользуемся точным уравнением, приведенным в /8/:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\Delta}\left[\omega^2 (r^2+a^2)^2 - 2an\omega r + a^2 n^2\right]\phi + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$-\frac{n^2}{\sin^2\theta}\phi - a^2\omega^2 \sin^2\theta\, \phi = -\frac{r+ia\cos\theta}{(r-ia\cos\theta)^2}\phi \tag{П2.1}$$

Здесь ϕ – некая комбинация из компонент тензора э.-м. поля F_{ik}. Рассмотрим решение уравнения (П2.1) в асимптотических областях $r \sim 1$ и $r \gg 1$ для двух частот: $\omega = \frac{an}{r_+}$ (1) и $\omega = 0$ (11).

1. $\omega = an/r_+$, $n \neq 0$. При $r \gg 1$ решение имеет вид

$$\phi = \frac{const}{r} e^{\pm \frac{ianr}{r_+}} + O(r^{-2}) \tag{П2.2}$$

Вблизи поверхности Шварцшильда положим $r = r_+ + y$, где $r_+ = 1/2 + 1/2\sqrt{1-4a^2}$ – корень уравнения

$$\Delta = r^2 - r + a^2 = (r-r_+)(r-r_-) = 0$$

Разлагая коэффициенты уравнения (П2.1) по степеням y, находим обычным способом два решения

$$\Phi_1(r \sim r_+) = \sum_0^\infty \Phi_n^{(1)} y^n \tag{П2.3}$$

и

$$\Phi_2(r \sim r_+) = \ln y \sum_0^\infty \Phi_n^{(2)} y^n \tag{П2.4}$$

где $\Phi_0^{(1)}$, $\Phi_0^{(2)}$ — произвольные функции θ , φ ; остальные коэффициенты выражаются через $\Phi_0^{(1)}$, $\Phi_0^{(2)}$. Т.о. волновое при $r \to \infty$ решение вблизи поверхности Шварцшильда ведет себя как статическое.

11. $\omega = 0$. В этом случае волновым оказывается решение в области $r \sim r_+$:

$$\Phi \simeq const \cdot \exp\left(\pm \frac{ian \ln y}{r_+ - r_-}\right) \tag{П2.5}$$

(здесь, так же, как и в (П2.2), $const$ — есть функция θ, φ). При $r \gg 1$ перепишем (П2.1), производя в коэффициентах разложение по степеням $1/r$;

$$\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + ctg\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\right)\Phi + \frac{a^2n^2}{r^4}\Phi\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^2}\right)^k =$$

$$= -\frac{\Phi}{r^3}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(\cos\theta)^k\left(\frac{ia}{r}\right)^k$$

Функцию Φ представляем в виде $\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell} \Phi_\ell(r) P^\ell_{0n}(\cos\theta)$. Для $\Phi_\ell(r)$ получаем уравнение

$$\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)\Phi_\ell'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\Phi_\ell' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\Phi_\ell +$$

$$+ \frac{a^2n^2}{r^4}\Phi_\ell\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^2}\right)^k = -\frac{1}{r^3}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\left(\frac{ia}{r}\right)^k\sum_{L=|\ell-k|}^{\ell+k} D_L^k\Phi_L \tag{П2.6}$$

$\mathcal{D}_L^K$ - выражаются через коэффициент Клебша-Гордана; явный вид вам не требуется. Легко убедиться, что решение уравнения (П2.6) представляется рядами

$$\Phi_l^{(1)}(z \gg 1) = z^{l} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(1)}(l)\, z^{-k} \tag{П2.7}$$

$$\Phi_l^{(2)}(z \gg 1) = z^{-l-1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(2)}(l)\, z^{-k} \tag{П2.8}$$

где $C_0^{(1)}(l)$ и $C_0^{(2)}(l)$ - произвольны, а $C_m^{(1,2)}(l)$ выражаются через $C_{m-1}^{(1,2)}(l'), C_{m-2}^{(1,2)}(l'), \dots, C_0^{(1,2)}(l')$.

Главные члены в разложениях (П2.3), (П2.4) и (П2.8), (П2.7) совпадают с главными членами в решении (3.2) (при сравнении нужно перейти к функции $z \cdot \phi$). В пределе $a \to 0$ остаются только выражения (П2.3), (П2.4) и (П2.7) - (П2.8) представляющие, как нетрудно показать, разложение точного решения (3.2) в соответствующих областях.

Л и т е р а т у р а

1. R.P. Kerr, Phys. Rev. Lett. 11, 237 (1963)

2. R.H. Boyer, R.W. Lindquist, J. Math. Phys. 8, 265 (1967)

3. Н.Я.Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп, Наука 1965.

4. А.З.Паташинский, А.А.Харьков, ДАН СССР, 190, 1074 (1970) ЖЭТФ, 59, 574 (1970).

5. C.V. Vishveshwara, Nature, 227, 936 (1970)

6. Я.Б.Зельдович, письма ЖЭТФ, 1, 40 (1965).

7. Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков, Релятивистская Астрофизика, Наука 1967.

8. J.P. Ipser, Phys. Rev. Lett. 27, 529 (1971)

9. W.B. Bonnor, M.A. Rotenberg, Proc. Roy. Soc. A269, 21 (1965).

10. A.J. Hunter, M.A. Rotenberg, J. Phys. A2, 34 (1969)

11. M.A. Rotenberg, J. Phys. A4, 617 (1971)

12. W.E. Couch, R.T. Torrence, A.F. Janis, E.T. Newman, J. Math. Phys. 9, 484 (1968)

Ответственный за выпуск А.А.Харьков
Подписано к печати 30.Х-1972 г. МН 10525
Усл. 1,0 печ.л., тираж 150 экз. Бесплатно
Заказ № 73 . ПРЕПРИНТ
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР