27


# ИНСТИТУТ
## ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР



ИЯФ 90-72



Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик


# УНИТАРНЫЕ И НЕУНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВРЕМЕНИ


Новосибирск

1972

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

# УНИТАРНЫЕ И НЕУНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВРЕМЕНИ

## АННОТАЦИЯ

Детально рассмотрены унитарные и действительные неунитарные представления непрерывной серии и унитарные представления дискретных серий двумерной конформной группы. Рассмотрена реализация простра́нств представлений в дискретном базисе. Исследованы координатная и импульсная реализации.

Обсуждаются ограничения, накладываемые конформной инвариантностью на свойства полей и вакуумных средних.

B.G. Konopelchenko, M.Ya. Palchik

# UNITARY AND NON-UNITARY REPRESENTATIONS OF THE CONFORMAL GROUP FOR THE TWO-DIMENSIONAL SPACE-TIME

Abstract

The unitary and non-unitary irreducible representations of the conformal group for the two-dimensional space-time are considered in detail.

It is shown that the invariant normalization in so called adjoint representations of discrete series contains a logarithmic term and doesu't the usual Gross-Wess equations. It satisfies the generalized Gross-Wess equations.

The restrictions on the fields and vacuum expectation values from the conformal invariance are discussed.

В работе /1/ была рассмотрена общая структура конформной группы в двумерном пространстве - времени, построены унитарные неприводимые представления и исследована редукция по подгруппе Пуанкаре.

В настоящей работе подробно рассматриваются унитарные и неунитарные представления двумерной конформной группы и обсуждаются кинематические ограничения на поля и вакуумные средние, вытекающие из конформной инвариантности.

В разделах 1-1У рассмотрена группа $SO(1,2)$ в дискретной, импульсной и координатной реализациях. Унитарные и неунитарные представления конформной группы рассматриваются в разделах У- УП. В заключительном УШ разделе обсуждается групповая структура конформно-инвариантной теории поля.

## 1. Алгебра $SO(1,2)$

Генераторы группы $SO(1.2)$ задаются перестановочными соотношениями

$$[A_1, A_2] = -iA_3,\quad [A_2, A_3] = iA_1,\quad [A_3, A_1] = iA_2 \tag{1.1}$$

В терминах комбинаций

$$H_\pm = \pm A_1 + iA_2$$

имеем

$$[H_+, A_3] = -H_+,\quad [H_-, A_3] = H_-,\quad [H_+, H_-] = 2A_3 \tag{1.2}$$

Как известно /2/, спектр оператора $A_3$ есть

$$A_3 = m_0 + m$$

где $m_0$ -любое действительное число, а $m$ -целое. Оператор Казимира группы $SO(1.2)$ имеет вид

$$Q = -A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 = H_+ \cdot H_- + A_3(A_3 - 1) = \ell(\ell-1)$$

где $\ell$ принимает все действительные значения. Таким образом, неприводимые представления классифицируются числами $\ell$ и $m_0$. Поскольку оператор Казимира $Q$ инвариантен относительно замены

$$\ell \to 1-\ell$$

представления, характеризуемые числами $\ell$ и $1-\ell$ эквиваленты.

Как известно /3/, в случае унитарных и действительных неунитарных представлений в пространстве представления можно ввести инвариантное скалярное произведение. Выберем базис из собственных векторов оператора

$$A_3^{(\ell)}\,|\ell, m\rangle = (m_0+m)\,|\ell, m\rangle , \tag{1.5}$$

$$H_\pm^{(\ell)}\,|\ell, m\rangle = -(\ell \pm (m_0+m))\,|\ell, m\pm 1\rangle .$$

Пространство представления состоит из векторов

$$|f\rangle = \sum_m a_m\,|\ell, m\rangle \tag{1.6}$$

Нормируем векторы $|\ell, m\rangle$ условием

$$\langle m,\ell|\ell, m'\rangle = (Q_\ell)_{mm'} = \frac{\Gamma(1-\ell-(m_0+m))}{\Gamma(\ell-(m_0+m))}\,\delta_{m,m'} \tag{1.7}$$

Преобразование (1.4) имеет вид

$$|1-\ell, m\rangle = Q_\ell^{-1}\,|\ell, m\rangle \tag{1.7a}$$

где

$$(Q_\ell^{-1})_{m,m'} = \langle m, 1-\ell|1-\ell, m'\rangle = \frac{\Gamma(\ell-(m_0+m))}{\Gamma(1-\ell-(m_0+m))}\,\delta_{m,m'} \tag{1.8}$$



Заметим, что

$$\langle m, \ell|1-\ell, m'\rangle = \delta_{m,m'}, \tag{1.9}$$

$$\sum_m |m,\ell\rangle\langle 1-\ell, m| = \sum_m |m, 1-\ell\rangle\langle \ell, m| = 1.$$

Определим скалярное произведение векторов (1.6) равенством

$$\langle\varphi|f\rangle = \sum_{m,m'} b_m^*\, a_{m'}\,\langle m,\ell|\ell, m'\rangle = \tag{1.10}$$

$$= \sum_m b_m^*\, a_m\,\frac{\Gamma(1-\ell-(m_0+m))}{\Gamma(\ell-(m_0+m))},$$

где

$$a_m = \langle m, 1-\ell|f\rangle, \quad b_m = \langle m, 1-\ell|\varphi\rangle .$$

Нетрудно проверить, используя (1.5), что скалярное произведение (1.10) инвариантно относительно преобразований группы.

В области значений

$$0<\ell<1 \quad \text{и} \quad 2\ell = n, \ (n=1,2,3,\dots) \tag{1.11}$$

метрика (1.7) положительно определена и соответствующие представления унитарны. В этом случае можно перейти к ортонормированному базису

$$|m\rangle = \left(\frac{\Gamma(\ell-(m_0+m))}{\Gamma(1-\ell-(m_0+m))}\right)^{1/2}|\ell, m\rangle \tag{1.12}$$

В новом базисе находим

$$\langle m|m'\rangle = \delta_{m,m'}, \quad \langle\varphi|f\rangle = \sum_m b_m^*\, a_m, \tag{1.13}$$

$$A_3|m\rangle = (m_0+m)|m\rangle, \quad H_\pm|m\rangle = \sqrt{(\ell\pm(m_0+m))(1-\ell\pm(m_0+m))}\,|m\pm1\rangle \tag{1.14}$$

$$A_3^+ = A_3, \qquad (H_+)^+ = -H_-$$

Заметим, что формулы (1.13)-(1.15) инвариантны относительно преобразования (1.4).

В области значений $e$ вне интервала (1.11) метрика (1.7) индефинита и соответствующие представления являются действительными неунитарными. В этом случае вместо (1.13-15) имеем (1.7), (1.10), (1.5) и

$$A_3^+ = A_3, \qquad \left(H_+^{(e)}\right)^+ = -Q_e H_-^{(e)} Q_e^{-1} \tag{1.16}$$

а преобразование (1.4) имеет вид

$$A_i^{(1-e)} = Q_e A_i^{(e)} Q_{1-e} = \left(A_i^{(e)}\right)^+, \tag{1.17}$$

где матрицы $Q_e$ и

$$Q_{1-e} = Q_e^{-1}$$

задаются формулами (1.7,8).

## 2. "Импульсное" представление группы $SO(1,2)$

Дополнительная непрерывная серия.

Удобно перейти от генераторов $A_1, A_2, A_3$ к комбинациям

$$\mathcal{D} = -A_1, \quad P = -2(A_2 + A_3), \quad K = 2(A_2 - A_3) \tag{2.1}$$

Перестановочнве соотношения имеют вид

$$[\mathcal{D}, P] = iP, \qquad [\mathcal{D}, K] = -iK \tag{2.2}$$

$$[P, K] = 8i\mathcal{D}.$$



Оператор Казимира равен

$$Q = -\mathcal{D}(\mathcal{D} - i) - \frac{P \cdot K}{4} = \mathcal{D}(\mathcal{D} + i) - \frac{K \cdot P}{4} = e(e-1). \tag{2.3}$$

Выберем базис из собственных векторов оператора $P$. Спектр $P$ непрерывен, и его собственные векторы характеризуются непрерывным параметром

$$P|e,p\rangle = p|e,p\rangle \tag{2.4}$$

Из (2.2) и (2.3) находим

$$\mathcal{D}^{(e)}|e,p\rangle = i[e + p\partial_p]|e,p\rangle, \tag{2.5}$$

$$K^{(e)}|e,p\rangle = -4[p\partial_p^2 + 2e\partial_p]|e,p\rangle$$

Собственные функции оператора $A_3$ есть /1/ ( $m_0 = 0$ )

$$f_m^e(p) = \langle 1-e, p|e,m\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i^{-m} \begin{cases} \dfrac{p^{-e}}{\Gamma(1-e+m)} W_{m,e-\frac{1}{2}}(p) & \text{при } p > 0 \\ \dfrac{(-p)^{-e}}{\Gamma(1-e-m)} W_{-m,e-\frac{1}{2}}(-p) & \text{при } p < 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

где $W_{m,k}(p)$ -функция Уиттекера (см. приложение, П1.4).

Отметим, что функции $f_m(p)$ экспоненциально убывают на бесконечности.

Определим инвариантное скалярное произведение. Для этого заметим /3/, что если $\mathcal{U}(g)$ -унитарное или действительное неунитарное представление, то представления $(\mathcal{U}^+)^{-1}(g)$ и $\mathcal{U}(g)$ эквивалентны. Положим

$$\mathcal{U}^+(g) = Q\,\mathcal{U}^{-1}(g)\,Q^{-1} \tag{2.6}$$

где $Q$ -невырожденный оператор. Тогда скалярное произведение

$$\langle \varphi|Q|f\rangle$$

инвариантно относительно преобразований группы:

$$\langle\varphi'|Q|f'\rangle=\langle\varphi|U^{+}QU|f\rangle=\langle\varphi|QU^{-1}U|f\rangle=\langle\varphi|Q|f\rangle \qquad (2.7)$$

Для операторов алгебры формула (2.6) имеет вид

$$A_i^{+} = Q A_i Q^{-1}$$

Таким образом, чтобы определить скалярное произведение, достаточно, ввиду (1.17), найти оператор $Q_e$ преобразования

$$A_i^{(e)} \to A_i^{(1-e)}$$

Перепишем (1.17) в виде

$$Q_e P = P Q_e; \qquad (2.8)$$

$$Q_e \mathcal{D}^{(e)} = \mathcal{D}^{(1-e)} Q_e; \quad Q_e K^{(e)} = K^{(1-e)} Q_e .$$

Поскольку оператор $P$ диагонален, из первого уравнения (2.8) находим

$$Q_e(p,p') = q_e(p)\,\delta(p-p') .$$

Второе и третье уравнения (2.8) дают

$$(p\partial_p + 1-2e)\,q_e(p)=0, \quad (p\partial_p^2 + 2(1-e)\partial_p)\,q_e(p)=0 \qquad (2.8a)$$

Откуда

$$q_e(p) \sim p^{2e-1}$$

Таким образом, инвариантная нормировка есть

$$\langle p',e|e,p\rangle \sim |p|^{2e-1}\,\delta(p'-p) \qquad (2.9)$$



Так как $|1-e,p\rangle = Q_{1-e}|e,p\rangle$ имеем

$$\langle p', 1-e|e,p\rangle = \delta(p'-p) . \qquad (2.10)$$

Определим скалярное произведение векторов $|f\rangle$ и $|\varphi\rangle$ следующим образом

$$\langle\varphi|f\rangle = \int dp\,dp'\,\varphi^*(p) f(p') \langle p,e|e,p'\rangle \qquad (2.11)$$

где

$$\varphi(p) = \langle p,1-e|\varphi\rangle, \quad f(p) = \langle p,1-e|f\rangle$$

Ввиду (2.7) и (2.9) оно инвариантно.

Пусть $e$ меняется в интервале $0<e<1$.

Представления из этого интервала унитарны. В пространстве унитарного представления может быть определена инвариантная мера. Положим

$$\langle p', e|e,p\rangle = |p|^{2e-1}\,\delta(p'-p) . \qquad (2.12)$$

Тогда

$$\langle\varphi|f\rangle = \int d\mu^{(e)}(p)\,\varphi^*(p) f(p) , \qquad (2.13)$$

где $d\mu^{(e)}(p) = |p|^{2e-1}dp$ —инвариантная мера (2.14).

Если $e<0$, интеграл (2.13) расходится, поскольку $\varphi(p)$ и $f(p)$ —конечные в нуле. Мы можем доопределить его аналитическим продолжением по $e$ из области сходимости:

$$d\mu^{(e)}(p) = \frac{1}{2\sin\pi e}\left[(\varepsilon+ip)^{2e-1} + (\varepsilon-ip)^{2e-1}\right]dp \qquad (2.14a)$$

При $\ell>0$, (2.14a) совпадает с (2.14). Однако, при $\ell<0$ интервал

$$\langle f|f\rangle = \int d\mu^{(\ell)}(p)\,|f(p)|^2$$

не положительно определен за счет вклада (2.14a) вблизи нуля. Таким образом в неунитарных представлениях $(\ell<0)$ $d\mu^{(\ell)}(p)$ не являются мерой.

Итак, имеем для любого $\ell$ (не целого или полуцелого)

$$Q_\ell(p',p) = \langle p',\ell|\ell,p\rangle = \frac{1}{2\sin\pi\ell}\left\{(\varepsilon+ip)^{2\ell-1}+(\varepsilon-ip)^{2\ell-1}\right\}\delta(p'-p), \tag{2.15}$$

$$\langle p',\ell|P|p,\ell\rangle = p\,Q_\ell(p',p),$$

$$\langle p',\ell|\mathcal{D}^{(\ell)}|p,\ell\rangle = i[1-\ell+p\partial_p]\,Q_\ell(p',p), \tag{2.16}$$

$$\langle p',\ell|K^{(\ell)}|\ell,p\rangle = -4[p\partial_p^2+2(1-\ell)\partial_p]\,Q_\ell(p',p)$$

или

$$\langle p',1-\ell|P|\ell,p\rangle = p\,\delta(p'-p),$$

$$\langle p',1-\ell|\mathcal{D}^{(\ell)}|\ell,p\rangle = i[\ell+p\partial_p]\,\delta(p'-p), \tag{2.17}$$

$$\langle p',1-\ell|K^{(\ell)}|\ell,p\rangle = -4[p\partial_p^2+2\ell\partial_p]\,\delta(p'-p).$$

В унитарных представлениях $(1>\ell>0)$ можно перейти к новому базису (аналогично (2.12))

$$|p\rangle = |p|^{\frac{1}{2}-\ell}|\ell,p\rangle = |p|^{\ell-\frac{1}{2}}|1-\ell,p\rangle, \tag{2.18}$$

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p'-p) \tag{2.18a}$$



При этом операторы (2.1) принимают вид

$$P = p, \qquad \mathcal{D} = i\left(\frac{1}{2}+p\partial_p\right), \tag{2.18б}$$

$$K = -4p^{-1}\left\{-\frac{1}{4} - Q + p\partial_p + p^2\partial_p^2\right\}$$

Формулы (2.18а-б) инвариантны относительно замены $\ell\to 1-\ell$.

### 3. "Координатное" представление группы $SO(1,2)$

**Дополнительная непрерывная серия.**

В этом представлении генераторы (2.1) имеют вид

$$P = i\partial_x, \qquad \mathcal{D} = -i(1-\ell+x\partial_x), \tag{3.1}$$

$$K = 4i(x^2\partial_x+(1-\ell)x).$$

Для оператора $A_3$ имеем

$$A_3^{(\ell)} = -\frac{1}{4}(K+P) = -\frac{i}{4}(4x^2\partial_x+8(1-\ell)x+\partial_x).$$

Собственные функции $A_3^{(\ell)}$ находятся из уравнения

$$\left[(1+4x^2)\partial_x+4(-im+2(1-\ell)x)\right]f_m^{\ell}(x)=0 \tag{3.2}$$

где $m$ – целые числа. Решение (3.2) есть

$$f_m^{\ell}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,i^{-m}\,2^{2(1-\ell)}(1+4x^2)^{\ell-1}\left(\frac{1+2ix}{1-2ix}\right)^m. \tag{3.3}$$

Введем набор векторов

$$|\ell,x\rangle = \sum_m a_m\,\overset{*}{f}{}_m^{1-\ell}(x)\,|\ell,m\rangle \tag{3.4}$$

константы $a_m$ будут определены ниже.

Согласно предыдущему разделу, инвариантную нормировку $Q_\ell(x,y)$ векторов $|\ell,x\rangle$ можно найти из уравнений (см. (2.8, 2.8a))

$$(\partial_x+\partial_y)\,Q_\ell(x,y)=0$$

$$[2\ell + x\partial_x + y\partial_y]\,Q_\ell(x,y)=0$$

$$[2\ell(x+y)+x^2\partial_x+y^2\partial_y]\,Q_\ell(x,y)=0$$

отсюда следует, что при любом $\ell$

$$Q_\ell(x,y)\sim (x-y)^{-2\ell} \tag{3.5}$$

Удобнее, однако, исходить непосредственно из импульсного представления

$$Q_\ell(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int dp\,dp'\,e^{ipx}\,e^{-ip'y}\,Q_\ell(p,p'). \tag{3.6}$$

где $Q_\ell(p,p')$ дается формулой (2.15). При этом определяется нормировочный коэффициент в (3.5) и правила интегрирования в нуле (при $\ell<\frac{1}{2}$) и на бесконечности (при $\ell<0$). При значениях $\ell$ вне интервала

$$0<\ell<\frac{1}{2} \tag{3.7}$$

интеграл (3.6) расходится. Как и в (2.14), его следует доопределить аналитическим продолжением по $\ell$ из области сходимости[x)]. Для унитарных представлений находим



$$Q_\ell(z)=\frac{1}{2\pi}\int dp\,|p|^{2\ell-1}\,e^{-ipz}= 2\cos\ell\pi\,\Gamma(2\ell)\,|z|^{-2\ell} \tag{3.8}$$

---

x) Для вычисления (3.6) в интервале (3.7) используется равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_\nu(p)\,e^{-ipz}\,dp = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2})}\,|z|^{\nu-1} \tag{3.8a}$$

где

$$g_\nu(p)=|p|^{-\nu} \qquad 0<\nu<1 \,. \tag{3.7a}$$

Чтобы доопределить (3.8a) при значениях вне интервала (3.7a) положим

$$g_\nu(p)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\cos\frac{\pi\nu}{2}}\left\{(\varepsilon+ip)^{-\nu}+(\varepsilon-ip)^{-\nu}\right\} & \text{при } \nu>1 \\ |p|^{-\nu} & \text{при } 0<\nu<1 \\ |p|^{-\nu}\,e^{-\varepsilon/|p|} & \text{при } \nu<0 \end{cases} \tag{3.7б}$$

Вычисляя интегралы, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int g_\nu(p)\,e^{-ipz}\,dp=\begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2})\,|z|^{\nu-1}\,e^{-\varepsilon/|z|}}{2\pi\,\Gamma(\nu)} & \text{при } \nu>1 \\ \dfrac{\Gamma(1-\nu)}{2\pi}\left\{(\varepsilon+iz)^{\nu-1}+(\varepsilon-iz)^{\nu-1}\right\} & \text{при } \nu<0 \end{cases}$$

Ограничение $\ell<\frac{1}{2}$ не существенно, так как замена $\ell\to 1-\ell$ приводит к эквивалентному представлению. В неунитарных представлениях имеем

$$Q_\ell(z)=\frac{1}{2\pi}\int dp\,|p|^{2\ell-1}e^{ipz-\varepsilon|p|}=\frac{\Gamma(2\ell-1)}{2\pi}\left\{(\varepsilon+iz)^{-2\ell}+(\varepsilon-iz)^{-2\ell}\right\} \tag{3.9}$$

при $\ell>1$, и

$$Q_\ell(z)=\frac{1}{2\pi}\int dp\,\frac{1}{2\cos[(2\ell-1)\frac{\pi}{2}]}\left\{(\varepsilon+ip)^{2\ell-1}+(\varepsilon-ip)^{2\ell-1}\right\}= \tag{3.10}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\Gamma(\ell)\,\Gamma(1-\ell)}{\Gamma(-2\ell+1)}\,|z|^{-2\ell}\,e^{-\varepsilon|z|}$$

при $\ell<0$.

Оператор $Q_\ell(z)$ является, по определению, оператором преобразования $\ell\to 1-\ell$

$$|\ell,x\rangle=\int dy\,Q_\ell(x-y)\,|1-\ell,y\rangle \tag{3.11}$$

Обратный оператор равен

$$Q_\ell^{-1}(z)=Q_{1-\ell}(z), \tag{3.12}$$

что легко проверить, используя формулы (3.8а-3.10а)

$$\int Q_\ell(x-z)\,Q_{1-\ell}(z-y)\,dz=\delta(x-y) \tag{3.13}$$

Инвариантная нормировка векторов $|\ell,x\rangle$ есть

$$\langle x,\ell|\ell,y\rangle=Q_\ell(x-y). \tag{3.14}$$

Из (3.11) и (3.13) находим

$$\langle x,1-\ell|\ell,y\rangle=\delta(x-y). \tag{3.15}$$

Соотношение полноты имеет вид

$$\int dx\,|1-\ell,x\rangle\langle x,\ell|=\int dx\,dy\,|\ell,x\rangle\,Q_{1-\ell}(x-y)\,\langle y,\ell|=1. \tag{3.16}$$



Скалярное произведение определяется как

$$\langle\varphi|f\rangle=\int dx\,dy\,\varphi^*(x)\,f(y)\,Q_\ell(x-y) \tag{3.17}$$

где $\varphi(x)=\langle x,1-\ell|\varphi\rangle$, $f(y)=\langle y,1-\ell|f\rangle$.

Найдем коэффициенты $a_m$ (3.2). Нормированные собственные функции оператора $A_3$ равны

$$F_m^\ell(x)=\langle x,1-\ell|\ell,m\rangle=a_m^*\,f_m^\ell(x)$$

Предполагается, что для функций $F_m^\ell(x)$ выбрана нормировка (1.7). Из (1.7а) и )3.16) находим

$$F_m^{1-\ell}(x)=\langle x,\ell|1-\ell,m\rangle=\int dy\,\langle x,\ell|\ell,y\rangle\langle y,1-\ell|1-\ell,m\rangle=$$

$$=\frac{\Gamma(\ell-m)}{\Gamma(1-\ell-m)}\int dy\,\langle x,\ell|\ell,y\rangle\langle y,1-\ell|\ell,m\rangle$$

то есть для функций $F_m^\ell(x)$ должно быть

$$F_m^{1-\ell}(x)=\frac{\Gamma(\ell-m)}{\Gamma(1-\ell-m)}\int dy\,Q_\ell(x-y)\,F_m^\ell(y) \tag{3.18}$$

Вычисление интеграла (3.18) для функций $f_m^\ell(x)$ приведено в приложении. Имеем

$$\int dx\,dy\,f_{m'}^{*\ell}(x)\,Q_\ell(x-y)\,f_m^\ell(y) \quad =(\text{см.приложение 1})=$$

$$=\frac{\Gamma(1-\ell-m)}{\Gamma(\ell-m)}\int dx\,f_{m'}^{*\ell}(x)\,f_m^{1-\ell}(y)=\frac{\Gamma(1-\ell-m)}{\Gamma(\ell-m)}\,\delta_{m,m'}$$

откуда $F_m^\ell(x)=f_m^\ell(x)$. Фазовый множитель $i^{-m}$ в (3.3) необходим для согласования с (1.5).

Таким образом, при выборе инвариантной нормировки (3.14) коэффициенты $a_m = 1$. Система функций $f_m^e(x)$ образует полный набор

$$\sum_m \overset{(e)}{f_m}(x)\, q_m \overset{+e}{f_m}(y) = Q_{1-e}(x-y), \quad q_m = \frac{\Gamma(e-m)}{\Gamma(1-e-m)} \tag{3.19}$$

или

$$\sum_m \overset{e}{f_m}(x) \overset{+1-e}{f_m}(y) = \delta(x-y).$$

## 4. Дискретные серии ($\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$)

Рассмотрение представлений дискретных серий может быть проведено так же, как в разделах П–Ш. При этом необходимо учесть, что спектр оператора $A_3$ в дискретных сериях ограничен:

$$\mathcal{D}_+(e): \quad m > e, \quad M_-|e\rangle = 0$$

$$\mathcal{D}_-(e): \quad m < -e, \quad M_+|-e\rangle = 0$$

Аналогично, спектр оператора $P$ также ограничен /1,5/

$$\mathcal{D}_+(e): \quad p < 0 \quad ; \quad \mathcal{D}_-(e): \quad p > 0$$

Собственные функции оператора $A_3$ в импульсной реализации имеют вид

$$\mathcal{D}_+(e): \quad \overset{+e}{f_m}(p) = \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(2e+m)} e^{\frac{p}{2}} L_m^{2e-1}(-p) \quad (p<0) \tag{4.1}$$

$$\mathcal{D}_-(e): \quad \overset{-e}{f_m}(p) = \frac{\Gamma(1-m)}{\Gamma(2e-m)} e^{-\frac{p}{2}} L_{-m}^{2e-1}(p) \quad (p>0) \tag{4.2}$$



Инвариантные нормировки, соответственно, равны:

$$\mathcal{D}_+(e): \langle p', e | e, p\rangle = \theta(-p)(-p)^{2e-1} \delta(p'-p), \tag{4.3}$$

$$\mathcal{D}_-(e): \langle p', e | e, p\rangle = \theta(p)\, p^{2e-1} \delta(p'-p), \tag{4.4}$$

где $\theta(p) = \begin{cases} 1, & p>0 \\ 0, & p<0. \end{cases}$

В координатной реализации получаем, используя фурье-преобразование /4/: $\mathcal{D}_+$ серия:

$$\overset{+e}{f_m}(x) = 2^{2(1-e)} \frac{(1+2ix)^{2e-1+m}}{(1-2ix)^{1+m}} \tag{4.5}$$

$$\langle y, e | e, x\rangle = \frac{1}{2\pi}(-i)^{2e}(2e-1)! \frac{1}{(x-y+i\varepsilon)^{2e}} = \tag{4.6}$$

$$= \frac{i^{2e}}{2\pi}\left[(2e-1)! \frac{1}{(x-y)^{2e}} - i\pi\, \delta^{(2e-1)}(x-y)\right].$$

Для представлений $\mathcal{D}_-$ серии соответствующие величины могут быть получены комплексным сопряжением (4.5) и (4.6)

$$\overset{-e}{f_m}(x) = \left(\overset{+e}{f_{-m}}(x)\right)^*,$$

$$\langle y, \bar{e} | \bar{e}, x\rangle = \left(\langle y, \overset{+}{e} | \overset{+}{e}, x\rangle\right)^*$$

2. Присоединенные представления. Особого рассмотрения требуют представления $D_\pm(1-e)$ (присоединенные представления). Как показано в разделах I–III преобразование $e \to 1-e$ эквивалентно перенормировке базиса:

$$|e,p\rangle \to \theta(p)\, p^{1-2e}\, |e,p\rangle = |1-e,p\rangle \qquad (4.7)$$

$$|e,m\rangle \to \frac{\Gamma(2e\pm m)}{\Gamma(1\pm m)}\, |e,m\rangle = |1-e,m\rangle$$

Используя (4.7) находим (серия $D^-$):

$$\langle 1-e,p|D_e|1-e,p'\rangle = i(e+p\partial_p)\, Q_{1-e}(p,p') =$$

$$= i\, Q_{1-e}(p,p')\big[(1-e)+p\partial_p\big] + i\,\frac{(-1)^{2e-2}}{(2e-2)!}\,\delta^{(2e-2)}(p)\cdot\delta(p-p'). \qquad (4.8)$$

$$\langle 1-e,p|K_e|1-e,p'\rangle = -4\big[p\partial_p^2 + 2e\,\partial_p\big]\, Q_{1-e}(p,p') =$$

$$= -4\, Q_{1-e}(p,p')\big[p\partial_p^2 + 2(1-e)\partial_p\big] -$$

$$-4\,\frac{(-1)^{2e-2}}{(2e-2)!}\Big[2\,\delta^{(2e-2)}(p)\cdot\partial_p + \delta^{(2e-1)}(p)\Big]\cdot\delta(p-p').$$

Для инвариантной нормировки получаем

$$\Big(p\frac{\partial}{\partial p} + 2e-1\Big)\, q^{\pm}_{1-e}(p) = -\frac{(\pm 1)^{2e-1}}{(2e-2)!}\,\delta^{(2e-2)}(p) \qquad (4.9)$$

$$\big(p\partial_p^2 + 2e\,\partial_p\big)\, q^{\pm}_{1-e}(p) = -\frac{(\pm 1)^{2e-1}}{(2e-2)!}\,\delta^{(2e-1)}(p). \qquad (4.10)$$



В координатной реализации имеем:

$D_+(1-e)$:

$$\overset{+}{f}{}^{1-e}_{m}(x) = 2^{2e}\,\frac{\Gamma(2e+m)}{\Gamma(1+m)}\cdot\frac{(1+2ix)^m}{(1-2ix)^m} \qquad (4.12)$$

$$\overset{+}{Q}_{1-e}(x,y) = \langle 1-e,x|1-e,y\rangle = \frac{i^{-2e-2}}{2\pi(2e-2)!}\,(x-y)^{2(e-1)}\cdot\big(a(e) - \ln(x-y+i\varepsilon)\big) \qquad (4.13)$$

где $a(e) = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2e-2}+\Gamma'(1)+\frac{i\pi}{2}$

Серия $D_-$:

$$\overset{-}{f}{}^{1-e}_{m}(x) = \big(\overset{+}{f}{}^{1-e}_{-m}(x)\big)^* ; \qquad \overset{-}{Q}_{1-e}(x,y) = \big(\overset{+}{Q}_{1-e}(x,y)\big)^*$$

Уравнения (4.9) и (4.10) имеют вид

$$(z\partial_z + 2-2e)\,\overset{\pm}{Q}_{1-e}(z) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{(\pm i)^{2e-2}}{(2e-2)!}\,z^{2e-2} \qquad (4.14а)$$

$$(z^2\partial_z + 2(1-e)z)\,\overset{\pm}{Q}_{1-e}(z) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{(\pm i)^{2e-2}}{(2e-2)!}\,z^{2e-1} \qquad (4.14б)$$

Функции $\overset{\pm}{Q}_{1-e}(p)$ и $\overset{\pm}{Q}_{1-e}(z)$ являются присоединенными обобщенными функциями первого порядка /4/ (см. приложение II).

Связь между функциями $f^{e}_{m}(x)$ и $f^{1-e}_{m}(x)$, соотношения полноты такие же, как и для представлений непрерывной серии.

## 5. Конформная группа. Пространство представления

Генераторы конформной группы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\tau}] = i(g_{\mu\tau}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\tau} - g_{\mu\rho}M_{\nu\tau} - g_{\nu\tau}M_{\mu\rho}),$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu), \qquad (5.1)$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = i(g_{\nu\rho}K_\mu - g_{\mu\rho}K_\nu),$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2i(g_{\mu\nu}\mathcal{D} + M_{\mu\nu}),$$

$$[P_\sigma, \mathcal{D}] = -iP_\sigma, \ [K_\sigma, \mathcal{D}] = iK_\sigma, \qquad [M_{\mu\nu}, \mathcal{D}] = 0$$

где $g_{\mu\nu}$ –метрика двумерного пространства времени:

$$g_{00} = -g_{11} = 1$$

Учитывая локальный изоморфизм двумерной конформной группы и группы

$$SO(1,2) \otimes SO(1,2) \qquad (5.2)$$

удобно перейти к комбинациям /1/

$$P_0 = \frac{1}{2}(P_+ + P_-), \ P_1 = \frac{1}{2}(P_+ - P_-), \ M_{01} = \mathcal{D}_+ - \mathcal{D}_- \qquad (5.3)$$

$$K_0 = -\frac{1}{2}(K_+ + K_-), \ K_1 = -\frac{1}{2}(K_+ - K_-), \ \mathcal{D} = \mathcal{D}_+ + \mathcal{D}_-$$

Операторы $P_\pm$, $K_\pm$ и $\mathcal{D}_\pm$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (2.2).

Генераторы одной из групп $SO(1,2)$ есть

$$A_1 = -\mathcal{D}_+, \ A_2 = -\frac{P_+ - K_+}{4}, \ A_3 = -\frac{P_+ + K_+}{4} \qquad (5.4)$$

Генераторы другой группы имеют вид

$$B_1 = -\mathcal{D}_-, \ B_2 = \frac{P_- - K_-}{4}, \ B_3 = \frac{P_- + K_-}{4} \qquad (5.5)$$



Используя (5.3), можно представить операторы Казимира конформной группы в виде

$$C_1 = Q_+ + Q_- \ ; \ C_2 = Q_+ - Q_-$$

где $Q_\pm$ выражаются через $P_\pm$, $K_\pm$ и $\mathcal{D}_\pm$ по формулам (2,3).

В неприводимых представлениях имеем

$$Q_+ = e_1(e_1 - 1) \ ; \ Q_- = e_2(e_2 - 1)$$

где $e_1$ и $e_2$ –произвольные числа. Таким образом, все неприводимые представления двумерной конформной группы классифицируются по значениям двух независимых параметров.

Удобно выразить операторы Казимира через масштабную размерность $d$ и конформный спин[x)] $S$

$$e_1 = \frac{1}{2}(d+s) \ ; \ e_2 = \frac{1}{2}(d-s). \qquad (5.6)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}[d(d-2) + S^2], \ C_2 = (d-1)S$$

Классификация унитарных представлений приведена в /1/. Здесь мы рассмотрим унитарные и действительные неунитарные представления.

### Пространство представления

Выберем в качестве базисных векторов соответственные векторы операторов $A_3$ и $B_3$.

$$|\vec{e}, \vec{m}\rangle = |e_1, e_2; m_1, m_2\rangle = |e_1, m_1\rangle \otimes |e_2, m_2\rangle \qquad (5.7)$$

Согласно разделу II имеем

$$A_3^{(e)}|\vec{e}, \vec{m}\rangle = (m_{01} + m_1)|\vec{e}, \vec{m}\rangle,$$

$$B_3^{(e)}|\vec{e}, \vec{m}\rangle = (m_{02} + m_2)|\vec{e}, \vec{m}\rangle. \qquad (5.8)$$

---

x) Двумерная группа Пуанкаре имеет единственный оператор Казимира – массу. Двумерный аналог спина появляется лишь в конформной группе /1/.

$$H_{\pm}^{A}|\vec{e},\vec{m}\rangle = -(e_1 \pm (m_{01}+m_1))|\vec{e}, m_1 \pm 1, m_2\rangle,$$

$$H_{\pm}^{B}|\vec{e},\vec{m}\rangle = -(e_2 \pm (m_{02}+m_2))|\vec{e}, m_1, m_2 \pm 1\rangle.$$

Инвариантная нормировка есть

$$(Q_{\vec{e}})_{\vec{m},\vec{m}'} = \langle\vec{m},\vec{e}\,|\,\vec{e},\vec{m}'\rangle = \tag{5.9}$$

$$= \frac{\Gamma(1-e_1-(m_{01}+m_1))}{\Gamma(e_1-(m_{01}+m_1))}\cdot\frac{\Gamma(1-e_2-(m_{02}+m_2))}{\Gamma(e_2-(m_{02}+m_2))}\,\delta_{\vec{m},\vec{m}'}.$$

Вместо с представлением ( $e_1, e_2$) удобно рассмотреть представление ( $1-e_1, 1-e_2$ ) и операторы алгебры в этом представлении ( $e_1, e_2$ ) и ( $1-e_1, 1-e_2$ ) эквивалентны и связаны невырожденным преобразованием

$$|\vec{e},\vec{m}\rangle = Q_{\vec{e}}\,|1-\vec{e},\vec{m}\rangle, \tag{5.10}$$

где $Q_{\vec{e}}$ -метрический оператор (5.9) и

$$|1-\vec{e},\vec{m}\rangle = |1-e_1, m_1\rangle \otimes |1-e_2, m_2\rangle. \tag{5.11}$$

Размерность $d$ и спин $S$ заменяются на

$$d \to 2-d\ ; \qquad S \to -S. \tag{5.10a}$$

Это преобразование аналогично поднятию индекса в обычном тензорном анализе. Действительно, "подньмая" один индекс в (5.9), имеем

$$(Q_{\vec{e}})_{\vec{m}'}^{\vec{m}} = \langle\vec{m}, 1-\vec{e}\,|\,\vec{e},\vec{m}'\rangle = \delta_{\vec{m},\vec{m}'}. \tag{5.13}$$

Соотношение полноты

$$\sum_{\vec{m}}|\vec{e},\vec{m}\rangle\langle\vec{m},1-e| = \sum_{\vec{m}}|1-\vec{e},\vec{m}\rangle\langle\vec{m},\vec{e}| = 1. \tag{5.14}$$



Скалярное произведение векторов

$$|f\rangle = \sum_{\vec{m}} b_{\vec{m}}|\vec{e},\vec{m}\rangle, \quad |\varphi\rangle = \sum_{\vec{m}} a_{\vec{m}}|\vec{e},\vec{m}\rangle. \tag{5.15}$$

можно представить в одной из двух форм

$$\langle\varphi|f\rangle = \sum_{\vec{m},\vec{m}'} a^{*}_{\vec{m}}(Q_e)_{\vec{m},\vec{m}'}\, b_{\vec{m}'} = \sum_{\vec{m}} \tilde{a}^{*}_{\vec{m}}\, b_{\vec{m}} \tag{5.16}$$

где

$$a_{\vec{m}} = \langle\vec{m}, 1-\vec{e}\,|\,\varphi\rangle, \quad b_{\vec{m}} = \langle\vec{m}, 1-\vec{e}\,|\,f\rangle \quad ($$

-"контравариантные" компоненты векторов $|\varphi\rangle$ и $|f\rangle$

$\tilde{a}_{m} = \langle\vec{m},\vec{e}\,|\,\varphi\rangle$ -ковариантная компонента вектора $|\varphi\rangle$.

Операторы алгебры также можно записать в ко - и контравиантном базисе:

$$\{H_{\pm}^{(e)}\}_{m,m'} = -(e \pm (m_0+m))\,\delta_{m,m'\pm 1} \tag{5.17}$$

$$\{H_{\pm}^{(1-e)}\}_{m,m'} = -(1-e \pm (m_0+m))\,\delta_{m,m'\pm 1}$$

Отметим, что согласно (1.17), операторы $A_i$ и $B_i$ "эрмитовы" относительно метрики (5.9)

$$A_i^{+} = A_i, \qquad B_i^{+} = B_i \tag{5.18}$$

В дальнейшем мы будем опускать индекс "$\vec{e}$" в обозначении операторов, так как различие между $e$ и $1-e$ более не существенно. Эрмитово сопряжение в (5.18) и других аналогичных формулах будет пониматься как сопряжение относительно инвариантной метрики

$$A^{\dagger} = Q\,A^{+}Q^{-1} \tag{5.19}$$

При этом вместо (1.16) имеем

$$(H_\pm)^\dagger = - H_\mp \tag{5.20}$$

Операторы группы "унитарны" относительно инвариантной метрики

$$\mathcal{U}^\dagger(g) = \mathcal{U}^{-1}(g).$$

Это, однако, не означает унитарности представлений. В неунитарных представлениях метрика (5.9) индефинита.

Введенный формализм одинаково удобен для исследования как унитарных, так и неунитарных представлений, и позволяет рассматривать те и другие единообразно. Заметим, что в случае унитарных представлений

1. Непрерывная серия

$$-1 < S < 1 \ , \qquad |S| < d < 2 - |S|$$

2. Дискретная серия

$2\ell_1,\ 2\ell_2$ – целые числа

можно, как в разделе II, перейти к ортонормированному базису.

## 6. Непрерывная серия

Параметры $\ell_1$, и $\ell_2$ в непрерывной серии принимают любые действительные значения, кроме дискретного множества

$2\ell_1\ ,\ 2\ell_2$ –целые числа (6.1)

или

$d \pm S$ –целые числа (6.2)

Рассмотрим импульсную и координатную реализацию генераторов конформной группы. Все формулы этого раздела легко получаются из соответствующих формул разделов Ш и IУ.

### 1. Импульсное представление

В качестве базиса в пространстве представления выберем собственные векторы импульса

$$P_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle \tag{6.3}$$



или

$$P_\pm |p\rangle = p_\pm |p\rangle \tag{6.4}$$

где $|p\rangle = |p_0, p_1\rangle = |p_+, p_-\rangle = |p_+\rangle \otimes |p_-\rangle.$ (6.5)

Согласно разделу Ш и формулам (5.3), имеем

$$M_{\mu\nu} = i p_\mu \partial_\nu - i p_\nu \partial_\mu - i s \epsilon_{\mu\nu}, \quad P_\mu = p_\mu, \tag{6.6}$$

$$K_\mu = p_\mu \partial^2 - 2(p\partial)\partial_\mu + 2d\partial_\mu + 2s\,\epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu, \quad \mathcal{D} = i(d + p\partial),$$

где $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial p^\mu}$. $\quad \epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1.$

В формулах (6.6) предполагается, что

$$p_\mu = \langle p, 1-e | P_\mu | e, p' \rangle = p_\mu \delta(p' - p), \tag{6.7}$$

$$\mathcal{D} = \langle p, 1-e | \mathcal{D} | e, p' \rangle = i(d + p\partial)\delta(p' - p).$$

и т.д.

Общие собственные функции операторов $A_3$ и $B_3$ есть

$$F^{\vec{e}}_{m_1, m_2}(p) = \langle 1-\vec{e}, p | \vec{e}, \vec{m} \rangle = \tag{6.8}$$

$$= \overset{A}{f}{}^{e_1}_{m_1}(p_+) \cdot \overset{B}{f}{}^{e_2}_{m_2}(p_-)$$

где функция $\overset{A}{f}{}^{e}_{m}(p)$ задается формулой (3.6). Собственные функции $\overset{B}{f}{}^{e}_{m}(p)$ оператора $B_3$ отличаются от собственных функций $\overset{A}{f}{}^{e}_{m}(p)$ оператора $A_3$ заменой $p \to -p$. Пространство состояний состоит из векторов (6.15). Любой такой вектор представим в виде

$$|f\rangle = \int dp\, f(p) |p\rangle \tag{6.9}$$

где $|p\rangle \equiv |\vec{e}, p\rangle$ –"ковариантные" базисные векторы

$f(p) = \langle p, 1-\vec{e} | f \rangle$ –"контрвариантные" компоненты.

Инвариантная метрика есть

$$\left(Q_{\vec{e}}\right)_{p,p'} = \langle p', \vec{e} \,|\, \vec{e}, p \rangle = |p^2|^{d-1} \left|\frac{p_+}{p_-}\right|^{s} \delta(p'-p), \tag{6.10}$$

где $\delta(p'-p) = \delta(p_0'-p_0) \cdot \delta(p_1'-p_1)$.

Обобщенная функция (6.10) понимается в смысле (3.14а). Скалярное произведение может быть записано в виде

$$\langle \varphi | f \rangle = \int dp \, |p^2|^{d-1} \left|\frac{p_+}{p_-}\right|^{s} \overset{*}{\varphi}(p) f(p) \tag{6.11}$$

Рассмотрим унитарные представления. В этом случае можно перейти, как и в разделе Ш, к ортонормированному базису

$$M_{\mu\nu} = i p_\mu \partial_\nu - i p_\nu \partial_\mu - i s \epsilon_{\mu\nu},$$
$$P_\mu = p_\mu, \quad \mathcal{D} = i(1 + p\partial_p), \tag{6.12}$$
$$K_\mu = p_\mu \partial^2 - 2(p\partial)\partial_\mu + \frac{1}{|p^2|}\left\{ (1+2C_2) p_\mu - 2C_2 \epsilon_{\mu\nu} p_\nu \right\}.$$
$$\langle p | p' \rangle = \delta(p-p')$$

где $C_1$ и $C_2$ – операторы Казимира конформной группы. Отметим, что в этом базисе генераторы конформной группы выражаются непосредственно через операторы Казимира (а не через $d$ и $s$) и, следовательно инварианты при замене (5.10а).



## 2. "Координатное" представление

$$M_{\mu\nu} = i x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - i x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i s \epsilon_{\mu\nu}, \quad P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{6.13}$$
$$K_\mu = i\left( x^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - 2x_\mu \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) - 2(2-d)x_\mu + 2s\epsilon_{\mu\nu} x_\nu \right),$$
$$\mathcal{D} = -i\left(2-d + \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\right).$$

Пространство представления состоит из векторов

$$|\vec{e}, x\rangle = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \overset{*}{F}{}^{1-\vec{e}}_{\vec{m}}(x) \,|\, \vec{e}, \vec{m}\rangle \tag{6.14}$$

где $F^{\vec{e}}_{\vec{m}}(x) = \langle x, 1-\vec{e} \,|\, \vec{e}, \vec{m}\rangle$ – собственная функция операторов $A_3$ и $B_3$:

$$F^{\vec{e}}_{\vec{m}}(x) = \frac{2}{\pi} i^{-m_1-m_2} \cdot 2^{2(2-e_1-e_2)} \cdot \frac{(1+2ix_+)^{m_1+e_1-1}}{(1-2ix_+)^{m_1+1-e_1}} \cdot \frac{(1-2ix_-)^{m_2+e_2-1}}{(1+2ix_-)^{m_2+1-e_2}} \tag{6.15}$$

Эти функции нормированы условием

$$\int d^2x \, d^2y \, \overset{*}{F}{}^{\vec{e}}_{\vec{m}}(x) \, Q_{\vec{e}}(x-y) \, F^{\vec{e}}_{\vec{m}'}(y) = \frac{\Gamma(1-e_1-m_1)}{\Gamma(e_1-m_1)} \cdot \frac{\Gamma(1-e_2-m_2)}{\Gamma(e_2-m_2)} \cdot \delta_{\vec{m},\vec{m}'} \tag{6.16}$$

где $Q_{\vec{e}}(x-y) = \langle x, \vec{e} \,|\, \vec{e}, y\rangle$ – инвариантная нормировка векторов (6.14):

$$Q_{\vec{e}}(z) = \frac{\Gamma(e_1)\Gamma(1-e_1)}{\Gamma(-2e_1+1)} \frac{\Gamma(e_2)\Gamma(1-e_2)}{\Gamma(-2e_2+1)} |z^2|^{-d} \left|\frac{z_+}{z_-}\right|^{-s} \tag{6.17}$$

Эта обобщенная функция понимается в смысле раздела 1У. Поскольку векторы (6.14) не ортогональны, преобразование $\vec{e}\to 1-\vec{e}$ является интегральным преобразованием

$$F^{1-\vec e}_{\vec\mu}(x) = \frac{\Gamma(e_1-\mu_1)}{\Gamma(1-e_1-\mu_1)}\cdot\frac{\Gamma(e_2-\mu_2)}{\Gamma(1-e_2-\mu_2)}\cdot\int d^dy\, Q_{\vec e}(x-y)\, F^{\vec e}_{\vec \mu}(y) \qquad (6.18)$$

Функции $F^{\vec e}_{\vec\mu}(x)$ образуют полный набор:

$$\sum_{\vec\mu} F^{\vec e}_{\vec\mu}(x)\, q^{\vec e}_{\vec\mu}\, \overset{*}{F}{}^{\vec e}_{\vec\mu}(y) = Q_{\vec e}(x-y) \qquad (6.19)$$

или

$$\sum_{\vec\mu} F^{1-\vec e}_{\vec\mu}(x)\, F^{\vec e}_{\vec\mu}(y) = \delta(x-y). \qquad (6.20)$$

## УII. Дискретные серии ( $\mathcal{D}_{-+}$ и $\mathcal{D}_{+-}$ )

1. В дискретных сериях инвариантная нормировка есть

$$Q_{\vec e}(p,p') = \theta(p^2)(p^2)^{d-1}\left(\frac{\theta(\pm p_+)\,p_+}{\theta(\pm p_-)\,p_-}\right)^s \delta(p'-p) \qquad (7.1)$$

где знак плюс относится к представлениям $\mathcal{D}_{-+}(e_1, e_2)$, минус – к представлениям $\mathcal{D}_{+-}(e_1, e_2)$.

В координатной реализации имеем

$$\overset{-+}{Q}_{d,s}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\, i^{2d}\, (d+s-1)!\,(d-s-1)!\, \frac{1}{\left[(x-y)^2 - i\varepsilon(x_0-y_0)\right]^d}\cdot\left(\frac{x_--y_--i\varepsilon}{x_+-y_+-i\varepsilon}\right)^s \qquad (7.2)$$

Собственные функции операторов $A_3$ и $B_3$



$$\overset{-+}{F}{}^{d,s}_{\mu_1,\mu_2}(x) = 2^{2(2-d)}\, \frac{(1-2ix_+)^{d+s-1-\mu_1}}{(1+2ix_+)^{1-\mu_1}}\cdot\frac{(1+2ix_-)^{d-s-1-\mu_2}}{(1-2ix_-)^{1-\mu_2}} \qquad (7.3)$$

Для серии $\mathcal{D}_{+-}$

$$\overset{+-}{F}{}^{d,s}_{\mu_1,\mu_2}(x) = \left(\overset{-+}{F}{}^{d,s}_{-\mu_1,-\mu_2}(x)\right)^*, \quad \overset{+-}{Q}_{d,s}(x,y) = \left(\overset{-+}{Q}_{d,s}(x,y)\right)^*$$

2. В присоединенных представлениях $\mathcal{D}(1-e_1,\ 1-e_2)$ инвариантная нормировка

$$Q_{1-e}(p) = \theta(p^2)(p^2)^{1-d}\left(\frac{\theta(\pm p_+)\,p_+}{\theta(\pm p_-)\,p_-}\right)^{-s} \qquad (7.4)$$

Удовлетворяет уравнениям

$$\left(p_\mu\frac{\partial}{\partial p^\nu} - p_\nu\frac{\partial}{\partial p^\mu} + 2s\,\epsilon_{\mu\nu}\right)Q_{1-e}(p) = -\epsilon_{\mu\nu}\Big[\frac{(\mp 1)^{d+s-1}}{(d+s-2)!}\,\delta^{(d+s-2)}(p_0+p_1)\,\times$$

$$\times\,\theta(p_0-p_1)(p_0-p_1)^{1-d+s} - \frac{(\mp1)^{d-s-1}}{(d-s-2)!}\,\delta^{(d-s-2)}(p_0-p_1)\,\theta(p_0+p_1)(p_0+p_1)^{1-d-s}\Big] = -\epsilon_{\mu\nu}A^{d,s}(p). \qquad (7.5)$$

$$\left[p_\mu\frac{\partial}{\partial p^\mu} + 2(d-1)\right]Q_{1-e}(p) = -\Big[\frac{(\mp1)^{d+s-1}}{(d+s-2)!}\,\delta^{(d+s-2)}(p_0+p_1)\,\times \qquad (7.6)$$

$$\times\,\theta(p_0-p_1)(p_0-p_1)^{1-d+s} + \frac{(\mp1)^{d-s-1}}{(d-s-2)!}\,\delta^{(d-s-2)}(p_0-p_1)\,\theta(p_0+p_1)(p_0+p_1)^{1-d-s}\Big] =$$

$$= -B^{d,s}(p).$$

$$\left(p_\mu \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)\frac{\partial}{\partial p^\mu} - 2d\frac{\partial}{\partial p^\mu} - 2s\,\epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p^\nu}\right) Q_{1-e}(p) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial p^\mu} B^{d,s}(p) + \epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p^\nu} A^{d,s}(p). \qquad (7.7)$$

В формулах (7,5)-(7,7) минус соответствует серии $\mathcal{D}^-$, знак плюс - $\mathcal{D}^+$.

В координатной реализации базисные функции имеют вид ( $\mathcal{D}_{-+}$ серия):

$$\overset{-+}{F}{}^{1-e}_{m_1,m_2}(x) = 2^{2d}\frac{\Gamma(d+s-m_1)}{\Gamma(1-m_1)}\cdot\frac{\Gamma(d-s-m_2)}{\Gamma(1-m_2)}\cdot\frac{(1-2ix_+)^{-m_2}}{(1+2ix_+)^{d+s-m_1}}\cdot\frac{(1+2ix_-)^{-m_2}}{(1-2ix_-)^{d-s-m_2}} \qquad (7.8)$$

Фурье-преобразованием /4/ (7.4) получаем

$$\overset{-+}{Q}_{1-e}(z) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{i^{2d}}{(d+s-2)!(d-s-2)!}(z^2)^{d-2}\left(\frac{z_+}{z_-}\right)^s \times$$

$$\times\Big(a(e_1)a(e_2) - a(e_1)\ln(z_- - i\varepsilon) - \qquad (7.9)$$

$$- a(e_2)\ln(z_+ - i\varepsilon) + \ln(z_+ - i\varepsilon)\cdot\ln(z_- - i\varepsilon)\Big).$$

Инвариантность $\overset{-+}{Q}_{1-e}(z)$ относительно конформных преобразований выражается уравнениями:

$$\left(z_\mu\frac{\partial}{\partial z^\nu} - z_\nu\frac{\partial}{\partial z^\mu} - 2s\,\epsilon_{\mu\nu}\right)\overset{-+}{Q}_{1-e}(z) =$$



$$= \epsilon_{\mu\nu}\frac{1}{4\pi^2}\frac{(-i)^{2d}}{(d+s-2)!(d-s-2)!}(z^2)^{d-2}\left(\frac{z_0-z_1}{z_0+z_1}\right)^s\left(a\left(\frac{d+s}{2}\right)-a\left(\frac{d-s}{2}\right)-\ln\frac{z_0-z_1-2i\varepsilon}{z_0+z_1-2i\varepsilon}\right).$$

(7.10)

$$\left(z\frac{\partial}{\partial z} + 2(2-d)\right)\overset{-+}{Q}_{1-e}(z) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{(-i)^{2d}}{(d+s-2)!(d-s-2)!}(z^2)^{d-2}\times$$

$$\times\left(\frac{z_0-z_1}{z_0+z_1}\right)^s\left(a\left(\frac{d+s}{2}\right)+a\left(\frac{d-s}{2}\right)-\ln(z^2-i\varepsilon z_0)\right). \qquad (7.11)$$

$$\left(z^2\frac{\partial}{\partial z^\mu} - 2z_\mu\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right) - 2(2-d)z_\mu - 2s\,\epsilon_{\mu\nu}z_\nu\right)\overset{-+}{Q}_{1-e}(z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\frac{(-i)^{2d}}{(d+s-2)!(d-s-2)!}(z^2)^{d-2}\left(\frac{z_0-z_1}{z_0+z_1}\right)^s\Big[z_\mu\Big(a\left(\frac{d+s}{2}\right)+a\left(\frac{d-s}{2}\right)-$$

$$-\ln(z^2-i\varepsilon z_0)\Big)-\epsilon_{\mu\nu}z_\nu\Big(a\left(\frac{d+s}{2}\right)-a\left(\frac{d-s}{2}\right)-\ln\left(\frac{z_0-z_1-i2\varepsilon}{z_0+z_1-i2\varepsilon}\right)\Big)\Big]. \qquad (7.12)$$

Соответствующие формулы для представлений $\mathcal{D}_{+-}(d,s)$ могут быть получены комплексным сопряжением (7.8)-(7.12).

## 8. Поля и вакуумные средние

В этом разделе мы рассмотрим групповую структуру полей в конформно-инвариантной теории поля.

Пусть $\psi_{\vec e}(x)$ - поле, преобразующееся по неприводимому представлению двумерной конформной группы

$$[M_{\mu\nu}, \psi_{\vec e}(x)] = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + s\,\epsilon_{\mu\nu})\psi_{\vec e}(x) \qquad (8.1)$$

$$[P_\mu, \psi_{\vec e}(x)] = -i\partial_\mu\psi_{\vec e}(x), \quad [\mathcal{D}, \psi_{\vec e}(x)] = -i(d + x\partial_x)\psi_{\vec e}(x),$$

$$[K_\mu, \psi_{\vec e}(x)] = i(x^2\partial_\mu - 2x_\mu(x\partial_x) - 2d\,x_\mu - 2s\,\epsilon_{\mu\nu}x_\nu)\psi_{\vec e}(x).$$

Операторы Казимира в неприводимом представлении выражаются через масштабную размерность $d$ и спин $S$ (формулы (5.6)). Таким образом, "конформные" поля $\psi_{\vec{e}}(x)$ классифицируются по значениям масштабной размерности и спина, подобно тому, как обычные релятивистские поля по значениям массы и спна (операторов Казимира группы Пуанкаре).

Введём конформно-инвариантный вакуум $|0\rangle$. Этот вектор преобразуется по одномерному представлению конформной группы

$$M_{\mu\nu}|0\rangle = P_{\mu}|0\rangle = K_{\mu}|0\rangle = \mathcal{D}|0\rangle = 0 \tag{8.2}$$

Вообще говоря вакуум $|0\rangle$ не обязательно является состоянием с наинизшей энергией. В частности в представлениях непрерывной серии спектр $p_0$ не ограничен снизу. В дискретных сериях знак $p_0$ является инвариантом и спектр энергии начинается от нуля.

Пространство состояний теории образуют векторы

$$\psi^{+}(x)|0\rangle,\ \psi^{+}(x)\psi^{+}(y)|0\rangle, \dots \tag{8.3}$$

Полное описание пространства состояний теории эквивалентно заданию набора вакуумных средних

$$\langle 0|\psi(x)\psi^{+}(y)|0\rangle, \langle 0|\psi(x)\psi(x')\psi^{+}(y)\psi^{+}(y')|0\rangle, \dots \tag{8.4}$$

которые являются инвариантными скалярными произведениями векторов (8.3). Нахождение этих инвариантных функций - задача динамики теории. Мы обсудим ограничения кинематического характера, налагаемые на эти функции конформной симметрией.

Рассмотрим вектор

$$\psi^{+}_{\vec{e}}(x)|0\rangle. \tag{2.5}$$

Для определенности будем считать, что представление $(\ell_1, \ell_2)$ принадлежит непрерывной серии.
Скалярное произведение таких векторов однозначно определено их



трансформационными свойствами и совпадает с инвариантной метрикой пространства неприводимого представления (раздел У1)

$$\langle 0|\psi(x)\psi^{+}(y)|0\rangle \sim Q_{\vec{e}}(x-y) =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\ell_1)\Gamma(\ell_1)}{\Gamma(-2\ell_1+1)} \cdot \frac{\Gamma(1-\ell_2)\Gamma(\ell_2)}{\Gamma(-2\ell_2+1)} \left|Z^2\right|^{-d} \left|\frac{Z_+}{Z_-}\right|^{-S}. \tag{8.6}$$

Из этого вытекает, что вектор (8.5) целиком лежит в пространстве соответствующего неприводимого представления. Его проекция на базисные векторы $|\vec{e}, \vec{m}\rangle$ может быть найдена из (8.1) и (8.2)

$$\langle \vec{m}, 1-\vec{e}\,|\psi^{+}(x)|0\rangle = C \cdot F^{\vec{e}}_{\vec{m}}(x). \tag{8.7}$$

где функции $F^{\vec{e}}_{\vec{m}}(x)$ даются формулами (6.15), а C-произвольная постоянная, не зависящая от $m$. Используя соотношение полноты для этих функций (приложение 1),

$$\sum_{m} \overset{*}{F}{}^{1-\vec{e}}_{\vec{m}}(x)\, F^{\vec{e}}_{\vec{m}}(y) = Q_{\vec{e}}(x-y)$$

имеем

$$\langle 0|\psi(x)\psi^{+}(y)|0\rangle = \langle 0|\psi(x)|\vec{e},\vec{m}\rangle\langle 1-\vec{e},\vec{m}|\psi^{+}(y)|0\rangle. \tag{8.8}$$

Таким образом, вектор (8.5) может быть представлен в виде

$$\psi^{+}(x)|0\rangle = \sum_{m}\langle 1-\vec{e},\vec{m}|\psi^{+}(x)|0\rangle|\vec{e},\vec{m}\rangle = C \cdot |\vec{e}, x\rangle \tag{8.9}$$

где $C$ - константа.

Отметим, что в Пуанкаре инвариантной теории поля ситуация существенно иная. В этом случае вектор (8.9) имеем проекции на состояния с различными $p^2$, т.е. принадлежащие различным неприводимым представлениям группы Пуанкаре, и, следовательно, преобразуется по бесконечной прямой сумме неприводимых пред - ставлений. Скалярное произведение (8.10) не определяется, поэтому, однозначно кинематикой и имеет вид

$$\langle 0|\psi(x)\psi^{+}(y)|0\rangle = \int dm^2 \rho(m^2)\, \Delta^{+}_{m^2}(x-y) \tag{8.10}$$

где $\rho(m^2)$ –спектральная функция, определяющая групповую структуру вектора $\psi^{+}(x)|0\rangle$. Функция $\rho(m^2)$ определяется динамикой теории. И только в случае свободного поля вектор $\psi^{+}(x)|0\rangle$ лежит в пространстве неприводимого представления группы Пуанкаре.

Рассмотрим групповую структуру других векторов (8.3). В отличие от (8.3) эти векторы преобразуются по приводимым представлениям конформной группы. Например, для вектора $\psi^{+}_{\vec{e}}(x)\,\psi^{+}_{\vec{e}}(y)\,|0\rangle$ имеем

$$\psi^{+}_{\vec{e}}(x)\,\psi^{+}_{\vec{e}}(y)|0\rangle = \sum_{\vec{e}',\vec{m}} \langle 1-\vec{e}',\vec{m}|\psi^{+}_{\vec{e}}(x)\psi^{+}_{\vec{e}}(y)|0\rangle\,|\vec{e}',\vec{m}\rangle \tag{8.11}$$

Проекции $\langle 1-\vec{e}',\vec{m}|\psi^{+}_{\vec{e}}(x)\psi^{+}_{\vec{e}}(y)|0\rangle$ вектора $\psi^{+}_{\vec{e}}(x)\psi^{+}_{\vec{e}}(y)|0\rangle$ на неприводимое представление $\vec{e}' = (e_1', e_2')$ могут быть определены с точностью до коэффициентов. Перепишем (8.11) в виде

$$\psi^{+}_{\vec{e}}(x)\psi^{+}_{\vec{e}}(y)|0\rangle = \sum_{\vec{e}'} C_{\vec{e}\vec{e}'}\int dz \langle 1-\vec{e}', z|\psi^{+}_{\vec{e}}(x)\psi^{+}_{\vec{e}}(y)|0\rangle\,|\vec{e}', z\rangle \tag{8.12}$$

Здесь величина $\langle 1-\vec{e}', z\,|\,\psi^{+}_{\vec{e}}(x)\,\psi^{+}_{\vec{e}}(y)\,|0\rangle$ совпадает с инвариантной трёхточечной функцией, которая, как известно /6/, определяется конформной симметрией. Остающиеся неопределенными коэффициенты $C_{\vec{e}\vec{e}'}$ задаются динамикой теории. Поэтому представление, аналогичное (8.10) следует написать для четырехточечной инвариантной функции $\langle 0|\psi(x_1)\psi(x_2)\psi^{+}(y_1)\psi^{+}(y_2)|0\rangle$.

Рассмотрим представления дискретных серий. Размерность и спин принимают дискретные, целые и полуцелый значения, такие, что

$$d+s = \text{целое число}$$

При вычислении вакуумных средних необходимо учесть, что спектр операторов $P_+$, $P_-$ –ограничен (раздел 1У). По этой причине для



двухточечных функций имеем вместо (8.6)

$$\underline{\mathcal{D}^{-+}(e_1,e_2)}:\ \overset{-+}{Q}_{e}(z) = \frac{i^{2d}}{4\pi^2}(d+s-1)!(d-s-1)!\,\frac{1}{(z^2-i\varepsilon z_0)^d}\left(\frac{z_- - i\varepsilon}{z_+ - i\varepsilon}\right)^s.$$

$$\underline{\mathcal{D}^{-+}(1-e_1,1-e_2)}:\ \overset{-+}{Q}_{1-e}(z) = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{i^{2d}}{(d+s-2)!(d-s-2)!}\,(z^2)^{d-2}\left(\frac{z_+}{z_-}\right)^s \times$$

$$\times\big(a(e_1)a(e_2) - a(e_1)\ln(z_- - i\varepsilon) - a(e_2)\ln(z_+ - i\varepsilon) + \ln(z_+ - i\varepsilon)\cdot\ln(z_- - i\varepsilon)\big).$$

В представлениях $\mathcal{D}(e_1, e_2)$ уравнения, выражающие инвариантность $n$ –точечных функций имеют стандартный вид /7/. Однако в присоединенных представлениях $\mathcal{D}(1-e_1, 1-e_2)$ эти уравнения должны быть модифицированы. В частности, уравнения для двухточечной функции имеют вид (7.10 – 7.12).

Подчеркнем, что появление в конформно-инвариантных $n$ -точечных функциях множителей, содержащих $\ln(x-i\varepsilon)$ не является спецификой двумерного пространства – времени. Можно показать, что аналогичные представления имеются в четырехмерной конформной группе.

Отметим в заключение следующее.

Вакуумные средние полей, преобразующихся по представлениям непрерывной серии содержат множитель $|x^2|^{-d}$ вместо $(x^2-i\varepsilon x_0)^{-d}$. Это означает, что такая теория не совместима с обычными требованиями, предъявляемыми к теории поля (она нелокальна, не имеет наинизшего энергетического состояния и т.д.). В случае полей, преобразующихся по представлениям дискретных серий никаких противоречий не возникает

$$\langle 0|\psi_{\vec{e}}(x)\psi^{+}_{\vec{e}}(y)|0\rangle \sim \frac{1}{[(x-y)^2 - i\varepsilon(x_0-y_0)]^{d+s}}\big((x_0-y_0)\pm(x_1-y_1)\big)^{2s}$$

Таким образом, требование совместимости конформной инвариантности с обычными аксиомами теории поля ведет к квантованию масштабной размерности /1/ $d = 1+s+n$, ($n$ –целое) и, следовательно, заряда (в теориях, где масштабная размерность зависит от константы связи). Примером такой теории может служить модель Тирринга.

Авторы благодарят А.З.Паташинского за научное руководство, Ю.Б.Румера за интерес к работе и А.И.Фета за полезные обсуждения.

## П р и л о ж е н и е 1

Доказывается равенство

$$\int dy\, Q_e(x-y)\, f_m^e(y) = \frac{\Gamma(1-e-m)}{\Gamma(e-m)}\, f_m^{1-e}(x) \qquad (П1,1)$$

где

$$f_m^e(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot i^{-m}\, 2^{2(1-e)} \cdot (1+4x^2)^{e-1}\left(\frac{1+2ix}{1-2ix}\right)^m$$

Мы ограничимся вычислением (П1,1) только в унитарных представлениях, поскольку ввиду (3.7б), результат справедлив и для неунитарных представлений. Имеем, таким образом

$$Q_e(z) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Gamma(e)\,\Gamma(1-e)}{\Gamma(-2e+1)}\,|z|^{-2e}$$

(П1.2)

$$q_e(p) = \int dz\, e^{-ipz}\, Q_e(z) = |p|^{2e-1}$$

Перейдем в (П1.1) к Фурье образам

$$\int dy\, Q_e(x-y)\, f_m^e(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int dp\, e^{ipx}\, q_e(p)\, f_m^e(p) \qquad (П1,3)$$

где $f_m^e(p) = \frac{1}{2\pi}\int dz\, e^{-ipz} f_m^e(z) =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i^{-m} \begin{cases} \dfrac{p^{-e}}{\Gamma(1-e+m)}\, W_{m,e-\frac{1}{2}}(p) & (p>0) \\[2ex] \dfrac{(-p)^{-e}}{\Gamma(1-e-m)}\, W_{-m,e-\frac{1}{2}}(-p) & (p<0), \end{cases} \qquad (П1,4)$$

$W_{m,k}(p)$ –функция Уиттекера.

Равенство (П1,4) справедливо в области $e<\frac{1}{2}$, однако, мы будем использовать его в интервале $0<e<1$, определяя расхо-



дящийся при $e>\frac{1}{2}$ интеграл в левой части аналитическим продолжением правой части по $e$. Из (П.14) и (П.1,2) имеем

$$q_e(p)\, f_m^e(p) = \frac{\Gamma(1-e-m)}{\Gamma(e-m)}\, f_m^{1-e}(p)$$

Подставляя это в (П.1,3), находим

$$(3) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Gamma(1-e-m)}{\Gamma(e-m)}\cdot\int dp\, e^{ipx}\, f_m^{1-e}(p)$$

Используя обратное по отношению к (П.1,4) Фурье преобразование получим )П.1,1).

## Приложение П

Обобщенная однородная функция $f(x)$ степени $\lambda$ удовлетворяет уравнению

$$f(\alpha x) = \alpha^{\lambda} f(x)$$

или

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} - \lambda\right) f(x) = 0. \qquad (П.2.1)$$

Общее решение уравнения (П.2.1) имеет вид /4/:

1. $\lambda \neq -n$, $n = 1, 2, 3, \dots,$

$$f(x) = C_1\,\theta(x)\,x^{\lambda} + C_2\,\theta(-x)(-x)^{\lambda}$$

2. $\lambda = -n$, $n = 1, 2, 3, \dots,$

$$f(x) = C_1\,x^{-n} + C_2\,\delta^{(n-1)}(x) = C_1'\frac{1}{(x+i\varepsilon)^n} + \frac{C_2'}{(x-i\varepsilon)^n}$$

Тем самым обобщенные функции $\theta(x)\,x^{-n}$ и $\theta(-x)(-x)^{-n}$ не являются однородными. Они являются присоединенными однородными функциями.

Обобщенная функция $f_1(x)$ называется присоединенной однородной функцией первого порядка степени $\lambda$ /4/, если для любого $\alpha > 0$

$$f_1(\alpha x) = \alpha^{\lambda} f_1(x) + \alpha^{\lambda}\ln\alpha\, f_0(x),$$



где $f_0(x)$ –обобщенная однородная функция степени

Дифференцируя по $\alpha$ и полагая $\alpha = 1$ получаем:

$$x\cdot\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} - \lambda f_1(x) = f_0(x). \qquad (П.2.2)$$

Уравнение (4.17) является частным случаем (П.2.2).

Присоециненные однородные функции естественным образом возникают при разложении обобщенных функций $\theta(x)\,x^{\lambda}$ и $\theta(-x)(-x)^{\lambda}$ в оксретности регулярной точки /4/. $\lambda = \lambda_0$

В частности: $(\lambda_0 = -n)$

$$\theta(x)\,x^{\lambda} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(\lambda+n)}\delta^{(n-1)}(x) + \theta(x)\,x^{-n} + (\lambda+n)\,\theta(x)\,x^{-n}\ln(\theta(x)\,x) + \dots + \frac{(\lambda+n)^k}{k!}\theta(x)\,x^{-n}\ln^k(\theta(x)\,x) + \dots$$

Отметим, что только первый член разложения однородной обобщенной функции $\theta(x)\,x^{\lambda}$ в ряд Тейлора является однородной обобщенной функцией, остальные члены ряда являются присоединенными однородными функциями соответственно 1,2,3 порядков /4/.

## Литература

1. Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 44-72, г.Новосибирск, 1972.
2. A.O. Barut, C. Fronsdal, Proc. Roy. Soc., 287, 532 (1965).
3. М.Хамермеш. Теория групп и её применение к физическим проблемам "Мир", 1966.
4. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Обобщенные функции, вып.1, М., 1959.
5. L. Castell, Commun. Math. Phys., 17, 127 (1970).
6. A.A. Migdal, Phys. Lett. , B37, 98 (1971).
7. D.Y. Cross, Y. Wess, Phys. Rev., 2Д, 753 (1970).

Ответственный за выпуск Б.Г.Конопельченко
Подписано к печати МН 16522 от 22/XII-72г.
Усл. 1,8 печ.,л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ №90 . ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг