30

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

И Я Ф 94 - 72

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

КОНФОРМНЫЕ ПОЛЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВРЕМЕНИ

Новосибирск

1972

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

КОНФОРМНЫЕ ПОЛЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВРЕМЕНИ 1

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются поля в двумерном пространстве времени, преобразующиеся по представлениям двумерной конформной группы (непрерывная серия /2/). Эти поля являются аналогом свободных релятивистских полей, но классифицируются по значениям операторов Казимира (масштабная размерность и спин) конформной группы, которая играет роль кинематической группы этих полей. Рассматриваемые поля имеют аномальную размерность. Пространство состояний строится по аналогии с пространством Фока обычных релятивистских полей. Исследованы поля, преобразующиеся как по унитарным, так и по действительным неунитарным представлениям непрерывной серии. В случае неунитарных представлений часть состояний имеет отрицательную норму. Показано, что в теории, инвариантной относительно любых конечных преобразований конформной группы, поля не локальны и не имеют состояний с наинизшей энергией. Если потребовать инвариантности относительно инфинитезимальных специальных конформных преобразований (преобразования группы Пуанкаре и растяжения могут быть конечны), то соответствующие поля локальны, имеют состояние с наинизшей энергией ($=0$) и обычную связь спина и статистики.

Обсуждается обобщение результатов на случай полей с аномальной размерностью в четырехмерном пространстве-времени.

B.G. Konopelchenko, M.Ya. Palchik

THE CONFORMAL FIELDS IN THE TWO-DIMENSIONAL SPACE-TIME. I.

Abstract

The fields in the two-dimensional space-time which transform by the representations of the two-dimensional conformal group (continuous series [2]) are considered. These fields are analogous to the free relativistic fields and classified with the values of the Casimir operators (scale dimension and spin) of the conformal group, which play arole of the Kinematic group of these fields. The considered fields have anomalous dimensions. The space of the states is constructed by analogy with Fock space of the usual relativistic fields.

The fields which transform by unitary and by real non-unitary representations of the continuous series are investigated. In the case of non-unitary representations part of the states has a negative norm.

It is shown that in the theory invariant under any finite conformal transformations the fields are nonlocal and the energy spectrum is unbounded from below. There is no relation between spin and statistics.

If one require invariance under infinitesimal special conformal transformations (transformations of Poincare group and dilation may be finite) corresponding fields are local. They have the state with minimum energy ($= 0$) and usual relation between spin and statistics.

The generalization of the results to the case of the fields with anomalous dimensions in the four-dimensional space-time are discussed.

В. Введение

1. Цель настоящей работы - рассмотреть математическую структуру конформно-инвариантной теории поля. Рассматриваются поля с аномальной размерностью. Мы покажем, что такие поля имеют необычные с физической точки зрения свойства, если требовать инвариантности относительно конечных конформных преобразованию. В частности, они нарушают микропричинность, не имеют состояний с наинизшей энергией и т.д. Альтернативным является предположение об инвариантности теории относительно инфинитезимальных преобразований. В этом случае могут быть построены поля с аномальной размерностью, удовлетворяющие обычным требованиям, предъявляемым к теории поля (раздел IX).

Мы ограничимся исследованием двумерного пространства-времени. Как будет видно из дальнейшего, основные результаты такого исследования имеют общий характер и в ряде случаев переносятся на четырёх - мерную теорию. Рассмотрение двумерного пространства-времени представляет ещё и дополнительный интерес, поскольку имеются точно решаемые двумерные модели теории поля /1/. Некоторые из них обладают строгой или асимптотической конформной инвариантностью. Конформная группа в двумерном пространстве времени рассмотрена в работах /2,3/.

2. Мы будем рассматривать "конформные" поля, аналогич - ные свободным полям в обычной Пуанкаре-инвариантной теории поля. Такие поля являются простейшей конструкцией, в которой отражены все групповые свойства теории поля. Конформная группа играет роль кинематической группы для таких полей, подобно группе Пуанкаре для релятивистских полей.

В обычной Пуанкаре-инвариантной теории поля элементарные частицы классифицируются по значениям массы - единственного оператора Казимира двумерной группы Пуанкаре[x)]. При этом предполагается, что поля преобразуются по соответствующим неприводимым представлениям группы Пуанкаре, а совокупность одночастичных состояний образует пространство, изоморфное пространству неприводимого представления.

x) Группа Пуанкаре в двумерном пространстве-времени имеет только один оператор Казимира - массу. Аналогом спина является один из двух операторов Казимира конформной группы /2/. Это делает конформную группу особенно важной для двумерного мира, т.к. спин и все связанные с ним свойства теории можно строго рассмотреть лишь в рамках конформно-инвариантной теории поля.

В конформно-инвариантной теории естественно классифицировать поля по значениям операторов Казимира конформной группы. Двумерная конформная группа имеет два оператора Казимира /2/

$$C_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}M_{\mu\nu}M_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(K_\mu P_\mu + P_\mu K_\mu) - \mathcal{D}^2\right\}, \tag{1.1}$$

$$C_2 = \mathcal{D} M_{01} + \frac{1}{2}(K_1 P_0 - P_1 K_0).$$

В неприводимых представлениях имеем

$$C_1 = \frac{1}{2}d(d-2) + \frac{1}{2}s^2 = \ell_1(\ell_1-1) + \ell_2(\ell_2-1), \tag{1.2}$$

$$C_2 = (d-1)s = \ell_1(\ell_1-1) - \ell_2(\ell_2-1)$$

где

$$\ell_1 = \frac{1}{2}(d+s), \quad \ell_2 = \frac{1}{2}(d-s) \tag{1.3}$$

числа ℓ_1 и ℓ_2, вообще говоря, комплексны

$d = \ell_1 + \ell_2$ – масштабная размерность

$s = \ell_1 - \ell_2$ – конформный спин.

Таким образом, "конформные" поля классифицируются по значениям масштабной размерности d и спина s. Мы ограничимся рассмотрением представлений непрерывной серии, для которых ℓ_1 и ℓ_2 – действительные числа. При этом масштабная размерность и спин могут принимать любые значения. Исключение составляет случай, когда $2\ell_1, 2\ell_2$ – целые числа. Такие представления (дискретные серии /2,3/) имеют ряд особенностей, и соответствующие им поля, а также безмассовые поля) здесь не рассматриваются.

Представления непрерывной серии, характеризуемые парой чисел унитарны, если /2/

$$0 < \ell_1 < 1, \quad 0 < \ell_2 < 1 \tag{1.4}$$

3. В обычной теории поля из требования неприводимости полей элементарных частиц относительно группы Пуанкаре вытекает, что свободные поля удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона. Особенностью конформно-инвариантной теории является отсутствие аналогичного уравнения. Действительно, операторы Казимира конформной группы обладают масштабной инвариантностью. Следовательно, они могут содержать производную $\frac{\partial}{\partial x}$ лишь в комбинации $x\frac{\partial}{\partial x}$. Однако, такая комбинация не инвариантна относительно сдвигов. Операторы Казимира в неприводимом представлении сводятся к постоянным и не дают каких-либо локальных уравнений.

По этой причине для конформных полей нельзя написать лагранжиан, и обычный канонический подход не работает. При построении "свободных конформных полей" мы будем использовать групповые методы, развитые для четырёхмерной группы Пуанкаре /4/. При таком подходе уравнения поля не требуются. Вся информация о полях, а также о векторе энергии-импульса и других сохраняющихся величинах содержится в структуре конформной группы и в некоторых дополнительных, но весьма естественных предположениях о пространстве состояний теории, которые сформулированы в следующем разделе.

План работы следующий. В разделах II-УШ рассматривается теория, инвариантная относительно любых конечных преобразований конформной группы. В разделе II сформулированы предположения относительно структуры полей, и построено пространство состояний. Показано, что если размерность и спин поля принимают значения вне интервала, установленного неравенствами (1.4), часть состояний имеет отрицательную норму (раздел УШ). В разделе Ш рассмотрены операторы рождения и уничтожения. В разделе 1У вводится операция "конформного сопряжения". Конформное сопряжение складывается из эрмитова сопряжения и дополнительного преобразования к эквивалентному представлению, приводящему к замене:

$$\ell_1 \to 1 - \ell_1, \quad \ell_2 \to 1 - \ell_2$$

(операторы Казимира инвариантны относительно этого преобразования). Использование конформного сопряжения позволяет упростить формализм теории: оно аналогично поднятию индекса в обычном тензорном анализе. Формально при конформном сопряжении меняется размерность поля $d \to 2-d$.

В разделе У рассмотрены полевые операторы. Показано,что они не удовлетворяют требованию локальности (микропричинности). При этом, однако, поле $\varphi(x)$ и конформно сопряженное к нему поле $\varphi^{+}(x)$ локальны относительно друг друга.

В разделе У1 рассмотрены двухкомпонентные поля, преобразующиеся по представлениям полной конформной группы с отражениями и вакуумные средние полей.

В разделе УП рассмотрены особенности унитарных и неунитарных представлений. Показано, что в унитарных представлениях можно так переопределить теорию, что конформное сопряжение совпадает с эрмитовым. В неунитарных представлениях это невозможно, поскольку метрика индефинитна. В разделе УШ рассмотрена явная реализация генераторов конформной группы. Показано, что в конформно-инвариантной теории отсутствуют такие локальные объекты, как тензор энергии-импульса.

В разделе 1Х исследована теория, инвариантная относительно инфинитезимальных специальных конформных преобразований. Преобразования группы Пуанкаре и растяжения могут быть конечными. Спектр энергии ограничен снизу нулевым значением. Показано, что в такой теории поля, имеющие целый или полуцелый спин, локальны, и имеется обычная связь между спином и статистикой. Эти поля являются обобщенными свободными полями.

В разделе Х проводится аналогия двумерного пространства времени с четырехмерным. и обсуждаются некоторые возможные свойства реальных физических теорий, обладающих асимптотической конформной инвариантностью.

II. Основные предположения

1. Неприводимость поля $\varphi(x)$. Полевой оператор $\varphi(x)$ преобразующийся по неприводимому представлению с заданными размерностью d и спином S, удовлетворяет следующим перестановочным соотношениям:

$$[\varphi(x), M_{\mu\nu}] = i\left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + S\epsilon_{\mu\nu}\right)\varphi(x), \tag{2.1}$$

$$[\varphi(x), P_\mu] = -i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi(x),$$

$$[\varphi(x), K_\mu] = i\left(x^2\frac{\partial}{\partial x^\mu} - 2x_\mu\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) - 2dx_\mu - 2S\epsilon_{\mu\nu}x_\nu\right)\varphi(x),$$

$$[\varphi(x), D] = i\left(d + \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\varphi(x).$$

где $M_{\mu\nu}$, P_μ, K_μ, D - генераторы конформной группы, $\epsilon_{01} = -1$.

Дальнейшие предположения относятся к пространству состояний.

2. Существует вакуумный вектор $|0\rangle$, преобразующийся по одномерному представлению конформной группы:

$$M_{\mu\nu}|0\rangle = P_\mu|0\rangle = K_\mu|0\rangle = D|0\rangle = 0 \tag{2.2}$$

Этому вектору сопоставляется "состояние без частиц". Предполагается, что вакуум нормирован

$$\langle 0|0\rangle = 1. \tag{2.3}$$

Как будет показано ниже, в представлениях непрерывной серии вакуум не является состоянием с наинизшей энергией.

3. Аналогично обычным одночастичным состояниям введем "одночастичные" конформные состояния. Мы будем сопоставлять этим состояниям векторы гильбертова пространства неприводимого представления конформной группы.

Свободные "конформные состояния" существенно отличаются от состояний обычной частицы. Максимальный набор коммутирующих генераторов двумерной конформной группы состоит из двух операторов. Поэтому для характеристики вектора неприводимого представления двумерной конформной группы необходимо задавать (кроме инвариантов представления) два квантовых числа, в то время, как в группе Пуанкаре достаточно одного. В частности, для описания "конформного состояния" в импульсном представлении, необходимо задать, кроме пространственной компоненты импульса P_1 еще и массу состояния (или компоненту P_0(. Таким образом, масса "конформной частицы" характеризует не "частицу" в целом, как в группе Пуанкаре, а лишь отдельное состояние.

В качестве базисных векторов в пространстве представления удобно выбрать собственные векторы двух операторов A_3 и B_3, определяемых как

$$A_3 = -\frac{1}{4}(P_+ + K_+), \quad B_3 = \frac{1}{4}(P_- + K_-), \tag{2.4}$$

где

$$K_\pm = -K_0 \pm K_1, \quad P_\pm = P_0 \pm P_1 \tag{2.5}$$

Это выбор обусловлен тем, что операторы A_3 и B_3 имеют дискретный спектр, и их собственные векторы нормируемы /3/

$$\begin{aligned} A_3|e_1, e_2; m_1, m_2\rangle &= m_1|e_1, e_2; m_1, m_2\rangle, \\ B_3|e_1, e_2; m_1, m_2\rangle &= m_2|e_1, e_2; m_1, m_2\rangle, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где m_1 и m_2 -целые числа. Введем обозначение

$$|\vec{e}, \vec{m}\rangle \equiv |e_1, e_2; m_1, m_2\rangle \tag{2.7}$$

Векторы $|\vec{e}, \vec{m}\rangle$ описывают "одночастичные" конформные состояния. В представлении (2.6) каждое состояние характеризуется парой чисел m_1, m_2. Числа e_1 и e_2 определяют инварианты представления (1.1,2).

Инвариантная нормировка векторов $|\vec{e}, \vec{m}\rangle$ есть[x] /3/

$$Q^{(\vec{e})}_{\vec{m}, \vec{m}'} = \langle \vec{m}, \vec{e}|\vec{e}, \vec{m}'\rangle = \frac{\Gamma(1-e_1-m_1)}{\Gamma(e_1-m_1)} \cdot \frac{\Gamma(1-e_2-m_2)}{\Gamma(e_2-m_2)} \cdot \delta_{m_1, m_1'} \cdot \delta_{m_2, m_2'} \tag{2.8}$$

Чтобы записать действие генераторов конформной группы на состояния (2.7), удобно перейти к комбинациям

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}(M_{01} - D), \quad A_2 = \frac{1}{4}(K_+ - P_+), \\ B_1 &= -\frac{1}{2}(M_{01} + D), \quad B_2 = \frac{1}{4}(P_- - K_-) \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $K_\pm$ и $P_\pm$ даются формулами (2.5). В терминах операторов $H^A_\pm$ и $H^B_\pm$

$$H^A_\pm = \pm A_1 + i A_2; \quad H^B_\pm = \pm B_1 + i B_2 \tag{2.10}$$

имеем

$$\begin{aligned} H^A_\pm|\vec{e}, \vec{m}\rangle &= (-e_1 \mp m_1)|\vec{e}, m_1 \pm 1, m_2\rangle, \\ H^B_\pm|\vec{e}, \vec{m}\rangle &= (-e_2 \mp m_2)|\vec{e}, m_1, m_2 \pm 1\rangle. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Формулы (2.6), (2.8) и (2.9) полностью определяют пространство "одночастичных" конформных состояний.

x) Как известно /7/, в пространстве неприводимого представления может быть введена инвариантная норма, если и только если значения операторов Казимира в этом представлении действительны. Мы рассматриваем именно такой случай: e_1 и e_2 - действительны.

Заметим, что в неунитарных представлениях некоторые из этих состояний имеют отрицательную норму (раздел УП), т.е. метрика.

Формулы (2.1), а также предположения относительно вакуума и "одночастичных" состояний должны быть выполнены в любой теории с конформно-инвариантным взаимодействием /3/. Характерной особенностью теории без взаимодействия является существование "n-частичных" состояний. Таким образом, мы имеем последнее предположение о структуре "свободного" поля.

4. "Свободное конформное поле" $\varphi(x)$ есть оператор, действующий в пространстве "n-частичных" конформных состояний. Эти состояния определяются обычным образом. Пусть $H^{(1)}$ - пространство "одночастичных" состояний, рассмотренных выше. Введём симметризованное или антисимметризованное (в зависимости от статистики) произведение пространств

$$H^{(n)} = S\{\underbrace{H^{(1)}\otimes H^{(1)}\otimes\cdots\otimes H^{(1)}}_{n}\} \tag{2.12}$$

Это пространство состоит из векторов

$$|\vec{e}, n\rangle = |\vec{e}; \vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n\rangle = \tag{2.13}$$

$$= S\{|\vec{e}, \vec{m}_1\rangle\otimes\dots\otimes|\vec{e}, \vec{m}_n\rangle\},$$

где символ S означает симметризацию или антисимметризацию.

Каждому такому вектору сопоставляется "n-частичное" конформное состояние.

Действие генераторов конформной группы задается формулами

$$A_3|\vec{e}; \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_n\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} m_1^i\}|\vec{e}; \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_n\rangle, \tag{2.14}$$

$$B_3|\vec{e}; \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_n\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} m_2^i\}|\vec{e}; \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_n\rangle$$

$$H_\pm^A|\vec{e}; \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_n\rangle = $$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-e_1 \mp m_1^i)|\vec{e}; \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_{i-1}, \vec{m}_i^A, \vec{m}_{i+1}, \dots, \vec{m}_n\rangle, \tag{2.15}$$

$$H_\pm^B|\vec{e}; \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_n\rangle = $$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-e_2 \mp m_2^i)|\vec{e}; \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_{i-1}, \vec{m}_i^B, \vec{m}_{i+1}, \dots, \vec{m}_n\rangle,$$

где m_α^i $(\alpha = 1, 2)$ - компоненты i-го "вектора" $\vec{m}_i$

$$\vec{m}_i = (m_1^i, m_2^i) \tag{2.16}$$

Векторы $\vec{m}_i^A$ и $\vec{m}_i^B$ равны

$$\vec{m}_i^A = (m_1^i \pm 1, m_2^i)\ ; \quad \vec{m}_i^B = (m_1^i, m_2^i \pm 1) \tag{2.16a}$$

Формулы (2.13) и (2.14-15) определяют "n-частичные" конформные состояния. Нормировочное условие для этих состояний легко получить из определения (2.13). Имеем

$$Q_{\vec{e}}^{(n)} = \langle \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_n, \vec{e}|\vec{e}; \vec{m}_1', \dots, \vec{m}_n'\rangle = \tag{2.17}$$

$$= q_{\vec{m}_1} q_{\vec{m}_2} \cdots q_{\vec{m}_n} S\{\delta_{\vec{m}_1, \vec{m}_1'} \cdots \delta_{\vec{m}_n, \vec{m}_n'}\},$$

где

$$q_{\vec{m}} = \frac{\Gamma(1-e_1-m_1)}{\Gamma(e_1-m_1)} \cdot \frac{\Gamma(1-e_2-m_2)}{\Gamma(e_2-m_2)} \tag{2.18}$$

$$\delta_{\vec{m}, \vec{m}'} = \delta_{m_1, m_1'} \cdot \delta_{m_2, m_2'}.$$

Введём, наконец, полное пространство H состояний поля $\varphi(x)$. Оно определяется, как прямая сумма пространств $H^{(n)}$

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus H^{(n)}, \tag{2.19}$$

где через $H^{(0)}$ обозначен вакуумный вектор $|0\rangle$. Заметим, что векторы, лежащие в разных пространствах $H^{(n)}$ и $H^{(n')}$ ортогональны по определению

$$\langle n, \vec{e} \,|\, \vec{e}, n' \rangle \sim \delta_{n,n'}$$

Пространство H является анализом пространства Фока обычных релятивистских полей.

Ш. Квантование

В представлениях непрерывной серии квадрат импульса имеет спектр /2/

$$-\infty < p^2 < \infty$$

Поэтому среди состояний поля $\varphi(x)$ имеются состояния с любым значением p^2 из этого интервала (напомним, что "одночастичные" конформные состояния заполняют всё пространство неприводимого представления). По этой причине поле $\varphi(x)$ нелокально, и нет никаких теоретико-групповых оснований для выбора определенной статистики[x)] (раздел У). Её выбор определяется соглашением. Мы будем считать, что поля, преобразующиеся по представлениям с полуцелым спином, имеют Ферми-статистику. Для всех остальных полей непрерывной серии мы примем бозе - статистику.

Заметим, что существенно иная ситуация возникает, если в качестве состояний поля $\varphi(x)$ выбрать только часть векторов пространства неприводимого представления. А именно только те векторы, для которых $p^2 > 0$. В этом случае можно построить локальные поля, статистика которых определяется спином. Такие поля рассмотрены в разделе 1Х.

x) Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении представлений четырёхмерной группы Пуанкаре, в которых $p^2 < 0$ /8/.

Введём операторы рождения $a^+_{\vec{m}}$ и уничтожения $a_{\vec{m}}$ конформных состояний в представлении (2.6,13). Мы определим их обычным способом. Положим

$$|\vec{e}, \vec{m}\rangle = a^+_{\vec{m}} |0\rangle, \tag{3.1}$$

$$|\vec{e}; \vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^+_{\vec{m}_1} \ldots a^+_{\vec{m}_n} |0\rangle \tag{3.2}$$

или

$$a^+_{\vec{m}} |\vec{e}; \vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_n\rangle = \sqrt{n+1}\, |\vec{e}; \vec{m}, \vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_n\rangle. \tag{3.3}$$

С учетом (2.8) и (3.1), перестановочные соотношения имеют вид

$$\{a_{\vec{m}}, a^+_{\vec{m}'}\}_{\pm} = q_{\vec{m}}\, \delta_{\vec{m},\vec{m}'} \tag{3.4}$$

где $\{A, B\}_{\pm} = AB \pm BA$, знак выбирается в зависимости от статистики; $q_{\vec{m}}$ определяется формулой (2.18).

Из (3.3) и (3.4) находим

$$a_{\vec{m}} |\vec{e}; \vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_n\rangle = \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} q_{\vec{m}}\, \delta_{\vec{m},\vec{m}'} |\vec{e}; \vec{m}_1, \ldots \vec{m}_{i-1}, \vec{m}_{i+1}, \ldots, \vec{m}_n\rangle.$$

При выводе (3.5) учтено, что

$$a_m |0\rangle = 0. \tag{3.6}$$

Найдем перестановочные соотношения операторов $a^+_{\vec{m}}$ и $a_{\vec{m}}$ с генераторами группы. Из (2.14) и (3.3) имеем

$$A_3\, a^+_{\vec{m}_0} |\vec{e};\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle = A_3\sqrt{n+1}\,|\vec{e},\vec{m}_0,\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle =$$

$$= \sqrt{n+1}\,(m^0_1 + m^1_1 + \dots + m^n_1)\,|\vec{e};\vec{m}_0,\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle = \tag{3.7}$$

$$= (m^0_1 + m^1_1 + \dots + m^n_1)\; a^+_{\vec{m}_0}|\vec{e};\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle .$$

С другой стороны

$$a^+_{\vec{m}_0} A_3 |\vec{e};\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle = (m^1_1 + \dots + m^n_1)\, a^+_{\vec{m}_0}|\vec{e};\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle \tag{3.8}$$

Аналогично

$$B_3\, a^+_{\vec{m}_0}|\vec{e};\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle = B_3\sqrt{n+1}\,|\vec{e};\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle =$$

$$= \sqrt{n+1}\,(m^0_2 + m^1_2 + \dots + m^n_2)\,|\vec{e};\vec{m}_0,\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle = \tag{3.9}$$

$$= (m^0_2 + m^1_2 + \dots + m^n_2)\; a^+_{\vec{m}_0}|\vec{e};\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle$$

$$a^+_{\vec{m}_0} B_3 |\vec{e};\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle = (m^1_2 + \dots + m^n_2)\, a^+_{\vec{m}_0}|\vec{e};\vec{m}_1,\dots,\vec{m}_n\rangle \tag{3.10}$$

Числа m^i_α (α =1,2) определены в (2.15).

Из формул (3.7)-(3.10) находим

$$[A_3, a^+_{\vec{m}}] = m_1\, a^+_{\vec{m}} \tag{3.11}$$

$$[B_3, a^+_{\vec{m}}] = m_2\, a^+_{\vec{m}}$$

Аналогичные вычисления с операторами $H^A_\pm$ и $H^B_\pm$ дают

$$[H^A_\pm, a^+_{\vec{m}}] = (-\ell_1 \mp m_1)\, a^+_{m_1\pm 1,\, m_2},$$

$$[H^B_\pm, a^+_{\vec{m}}] = (-\ell_2 \mp m_2)\, a^+_{m_1,\, m_2 \pm 1} \tag{3.12}$$

Для оператора $a_{\vec{m}}$ находим

$$[A_3, a_{\vec{m}}] = -m_1\, a_{\vec{m}},$$

$$[B_3, a_{\vec{m}}] = -m_2\, a_{\vec{m}}, \tag{3.13}$$

$$[H^A_\pm, a_{\vec{m}}] = (-\ell_1 \pm m_1)\, a_{m_1 \mp 1,\, m_2}$$

$$[H^B_\pm, a_{\vec{m}}] = (-\ell_2 \pm m_2)\, a_{m_1,\, m_2 \mp 1} \tag{3.14}$$

IV. Конформное сопряжение

Операторы $a^+_{\vec{m}}$ являются оператором рождения векторов $|\vec{e},\vec{m}\rangle$, образующих пространство неприводимого представления (ℓ_1, ℓ_2) конформной группы. Рассмотрим другой оператор, который рождает векторы

$$|1-\vec{e},\vec{m}\rangle \equiv |1-\ell_1, 1-\ell_2;\vec{m}\rangle \tag{4.1}$$

образующие пространство представления ($1-\ell_1$, $1-\ell_2$). Чтобы различать эти операторы, мы будем обозначать их $a^+_{\vec{e},\vec{m}}$ и $a^+_{1-\vec{e},\vec{m}}$

$$|\vec{e};\vec{m}\rangle = a^+_{\vec{e},\vec{m}}|0\rangle \tag{4.2}$$

$$|1-\vec{e},\vec{m}\rangle = a^{+}_{1-\vec{e},\vec{m}}|0\rangle, \tag{4.3}$$

где индекс $1-\vec{e} \equiv (1-e_1, 1-e_2)$

Представления (e_1, e_2) и ($1-e_1$, $1-e_2$) эквивалентны /2,3/, так как замена

$$e_1 \to 1-e_1 \quad , \quad e_2 \to 1-e_2 \tag{4.4}$$

или

$$d \to 2-d \quad , \quad S \to -S \tag{4.4a}$$

не меняет операторов Казимира конформной группы, а дополнительных инвариантов в непрерывной серии нет. Физический смысл имеют значения операторов Казимира, а не числа e_1 и e_2. Поэтому нет оснований сопоставлять представления (e_1, e_2) и ($1-e_1$, $1-e_2$) различным объектам. Эквивалентность этих пред - ставлений, с учетом последнего замечания, означает, что векторы (4.2) и (4.3) связаны невырожденным преобразованием

$$|\vec{e},\vec{m}\rangle = Q^{(1)}_{\vec{e}}|1-\vec{e},\vec{m}\rangle \tag{4.5}$$

где $Q^{(1)}_{\vec{e}}$ имеет вид метрики (2.8)

$$\left(Q^{(1)}_{\vec{e}}\right)_{\vec{m},\vec{m}'} = q^{\vec{e}}_{\vec{m}} \cdot \delta_{\vec{m},\vec{m}'} \tag{4.6}$$

где

$$q^{\vec{e}}_{\vec{m}} = \frac{\Gamma(1-e_1-m_1)}{\Gamma(e_1-m_1)} \cdot \frac{\Gamma(1-e_2-m_2)}{\Gamma(e_2-m_2)}$$

Преобразование (4.5) рассматривалось в /3/. Используя обычные методы, нетрудно показать, что оно индуцирует аналогичное пре-

образование в пространстве фока

$$|\vec{e};n\rangle = Q_{\vec{e}}|1-\vec{e},n\rangle \tag{4.7}$$

где $Q_{\vec{e}}$ - метрический оператор пространства Фока, определяемый формулами (2.18).

Для операторов $a^{+}_{\vec{e},\vec{m}}$ и $a^{+}_{1-\vec{e},\vec{m}}$ имеем

$$a^{+}_{\vec{e},\vec{m}} = Q_{\vec{e}}\; a^{+}_{1-\vec{e},\vec{m}}\; Q^{-1}_{\vec{e}} \tag{4.8}$$

Легко проверить, что

$$Q^{-1}_{\vec{e}} = Q_{1-\vec{e}}. \tag{4.9}$$

Используя диагональность оператора $Q_{\vec{e}}$, можно представить правую часть (4.8) в виде

$$Q_{\vec{e}}\; a^{+}_{1-\vec{e},\vec{m}}\; Q^{-1}_{\vec{e}} = q^{\vec{e}}_{\vec{m}}\; a^{+}_{1-\vec{e},\vec{m}} \quad ($$

Откуда следует

$$a^{+}_{\vec{e},\vec{m}} = q^{\vec{e}}_{\vec{m}}\; a^{+}_{1-\vec{e},\vec{m}}. \tag{4.10}$$

Аналогичные соотношения имеют место для операторов уничтожения $a_{\vec{e},\vec{m}}$ и $a_{1-\vec{e},\vec{m}}$

$$a_{\vec{e},\vec{m}} = Q_{1-\vec{e}}\, a_{1-\vec{e},\vec{m}}\, Q^{-1}_{1-\vec{e}} = q^{\vec{e}}_{\vec{m}}\, a_{1-\vec{e},\vec{m}}\,. \tag{4.11}$$

Для дальнейших целей удобно ввести операцию "конформного сопряжения". Мы определим её как эрмитово сопряжение плюс преобразование (4.4) и будем обозначать символом "$\dagger$" (не путать со знаком эрмитова сопряжения " + ")

$$A^{\dagger} \equiv Q A^{+} Q^{-1} \tag{4.12}$$

где A -произвольный оператор, действующий в пространстве Фока. Очевидно, что

$$(A^{\dagger})^{\dagger} = A. \tag{4.13}$$

Из (4.8), (4.11), (4.12) вытекает, что конформное сопряжение от операторов $a_{\vec{e},\vec{m}}$ и $a^{+}_{\vec{e},\vec{m}}$ есть

$$a^{+}_{1-\vec{e},\vec{m}} = (a_{\vec{e},\vec{m}})^{\dagger}, \tag{4.14}$$

$$a_{1-\vec{e},\vec{m}} = (a^{+}_{\vec{e},\vec{m}})^{\dagger} \tag{4.15}$$

Ввиду (4.13) справедливы и обратные соотношения.

Рассмотрим математический смысл конформного сопряжения. Для этого заметим, что преобразование (4.5,7) аналогично опусканию индексов в обычном тензорном анализе. Действительно, оператор $Q_{\vec{e}}$ преобразования (4.7) совпадает с инвариантной метрикой пространства Фока. Скалярное произведение двух векторов $|f\rangle$ и $|\varphi\rangle$ пространства Фока можно представить в форме /3/

$$\langle \varphi | f \rangle = \sum\nolimits_{1} \langle \varphi | 1-\vec{e}; n\rangle \langle n, \vec{e} | \vec{e}, n' \rangle \langle n'; 1-\vec{e} | f \rangle =$$

$$= \sum\nolimits_{1} \langle \varphi | 1-\vec{e}; n\rangle \{Q_{\vec{e}}\}_{n,n'} \langle n'; 1-\vec{e} | f\rangle = \tag{4.16а}$$

$$= \sum\nolimits_{1} \langle \varphi | \vec{e}; n\rangle \langle n; 1-\vec{e} | f \rangle \tag{4.16б}$$

где знак $\sum_1$ означает суммирование по всем квантовым числам "n - частичных" состояний и по числу n,

$\{Q_{\vec{e}}\}_{n,n'} = \delta_{n,n'} \langle n; \vec{e} | \vec{e}; n\rangle$ -символическая запись метрического оператора пространства Фока.

В формуле (4.16а) суммирование осуществляется с помощью метрики, а в (4.16б) один "индекс опущен". Компоненты $\langle n; \vec{e} | f\rangle$ и $\langle n; 1-\vec{e} | f\rangle$ можно рассматривать как $ко$ -и контравариантные компоненты вектора $|f\rangle$, а векторы $|\vec{e}; n\rangle$ и $|1-\vec{e}; n\rangle$ - как векторы $ко$ - и контравариантного базисов пространства Фока.

Таким образом, операторы $a^{+}_{\vec{m}}$ и $a^{\dagger}_{\vec{m}}$ можно расматривать как один оператор рождения, взятый в $ко$ - и контравариантном базисах. Заметим, что при использовании такого формализма все формулы существенно упрощаются. В частности, перестановочные соотношения принимают вид

$$\{a_{\vec{m}}, a^{\dagger}_{\vec{m}'}\}_{\pm} = \delta_{\vec{m},\vec{m}'} \tag{4.17}$$

Учитывая изложенное выше, можно ограничиваться рассмотрением операторов $a_{\vec{e},\vec{m}}$ и $a^{+}_{\vec{e},\vec{m}}$. Индекс $\vec{e}$ в обозначении этих операторов мы будем опускать, а операторы $a_{1-\vec{e},\vec{m}}$ и $a^{+}_{1-\vec{e},\vec{m}}$ обозначать знаком конформного сопряжения.

Заметим в заключение, что необходимость рассматривать конформное сопряжение возникает из-за того, что метрика в пространстве Фока отлична от единичной. Как будет показано в разделе У1, в случае унитарных представлений можно так переформулировать теорию, что конформное сопряжение совпадает с эрмитовым сопряжением. Однако в неунитарных представлениях введения конформного сопряжения избежать нельзя, и это связано с иденфинитностью метрики в неунитарных представлениях.

У. Квантованные поля

Полевой оператор $\varphi(x)$ полностью определяется своими перестановочными соотношениями (2.1) с генераторами группы. Мы перепишем их в более удобном для наших целей виде

$$[\varphi(x), A_3] = i\left\{\frac{1}{4}\partial_{+} + x_{+}^{2}\partial_{+} + 2e_1 x_{+}\right\}\varphi(x) \tag{5.1}$$

$$[\varphi(x), B_3] = -i\left\{\frac{1}{4}\partial_- + x_-^2\partial_- + 2e_2 x_-\right\}\varphi(x),$$

$$[\varphi(x), H_\pm^A] = -\left\{\pm i e_1 \pm i x_+\partial_+ + \frac{1}{4}\partial_+ - x_+^2\partial_+ - 2e_1 x_+\right\}\varphi(x),$$

$$[\varphi(x), H_\pm^B] = -\left\{\pm i e_2 \pm i x_-\partial_- - \frac{1}{4}\partial_- + x_-^2\partial_- + 2e_2 x_-\right\}\varphi(x)$$

где $x_\pm = \frac{1}{2}(x_0 \mp x_1)$; $\partial_\pm = \partial_0 \pm \partial_1$ операторы A_3, B_3 и $H_\pm^A$, $H_\pm^B$ даются формулами (3.4,5) и (2.9,10). Положим

$$\varphi(x) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{+\infty} f_{\vec{m}}^{1-\vec{e}}(x)\, a_{\vec{m}} \tag{5.2}$$

где $f_{\vec{m}}^{1-\vec{e}}(x)$ – неизвестные пока функции. Напомним /2/, что числа m_1, m_2 в представлениях непрерывной серии принимают все целые значения в интервале от $-\infty$ до ∞. Подставим (5.2) в (5.1). Учитывая (3.14), находим

$$\tilde{A}_3 f_{\vec{m}}^{1-\vec{e}}(x) = m_1 f_{\vec{m}}^{1-\vec{e}}(x); \quad \tilde{B}_3 f_{\vec{m}}^{1-\vec{e}}(x) = m_2 f_{\vec{m}}^{1-\vec{e}}(x) \tag{5.3}$$

$$\tilde{H}_\pm^A f_{\vec{m}}^{1-\vec{e}}(x) = -(1-e_1 \pm m_1) f_{m_1\pm1, m_2}^{1-\vec{e}}(x)$$

$$\tilde{H}_\pm^B f_{\vec{m}}^{1-\vec{e}}(x) = -(1-e_2 \pm m_2) f_{m_1, m_2\pm1}^{1-\vec{e}}(x), \tag{5.3a}$$

где

$$\tilde{A}_3 = -i\left\{\frac{1}{4}\partial_+ + x_+^2\partial_+ + 2(1-e_1)x_+\right\} \tag{5.4}$$

$$\tilde{H}_\pm^A = \left\{\pm i e_1 \pm i x_+\partial_+ + \frac{1}{4}\partial_+ - x_+^2\partial_+ - 2e_1 x_+\right\} \tag{5.4a}$$

Операторы $\tilde{B}_3$ и $\tilde{H}_\pm^B$ получаются из (5.4) и (5.4а) заменой $e_1 \to e_2$, $x_+ \to -x_-$, $\partial_+ \to -\partial_-$. Решение уравнений (5.3),(5.3а) рассмотрено в /3/. Оно имеет вид

$$f_{\vec{m}}^{1-\vec{e}}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, i^{-m_1-m_2}\, 2^{-2(e_1+e_2)}\, \frac{(1+2ix_+)^{m_1-e_1}}{(1-2ix_+)^{m_1+e_1}} \cdot \frac{(1-2ix_-)^{m_2-e_2}}{(1+2ix_-)^{m_2+e_2}}. \tag{5.5}$$

и нормируется условием

$$\int d^2x\, d^2y\, f_{\vec{m}}^{1-\vec{e}}(x)\, Q_{1-\vec{e}}(x-y)\, f_{\vec{m}'}^{1-\vec{e}}(y) = g_{\vec{m}}^{1-\vec{e}} \cdot \delta_{\vec{m},\vec{m}'} \tag{5.6}$$

где $g_{\vec{m}}^{\vec{e}}$ -даётся формулой (3.5), а $Q_{1-\vec{e}}(z)$ однородная функция

$$Q_{\vec{e}}(z) = \frac{\Gamma(e_1)\Gamma(1-e_1)}{2\Gamma(1-2e_1)} \cdot \frac{\Gamma(e_2)\Gamma(1-e_2)}{\Gamma(1-2e_2)}\, |z_+|^{-2e_1} \cdot |z_-|^{-2e_2} \tag{5.7}$$

$$(e_1, e_2 \neq \tfrac{1}{2})$$

При $e_1 = e_2 = \frac{1}{2}$ вместо (5.7) имеем

$$Q_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2}\delta(z_+) \cdot \delta(z_-) = \delta(z)$$

Фазовый множитель в (5.5) выбран из условия согласования с (5.3а). Окончательно, для поля $\varphi(x)$ имеем

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, 2^{-2(e_1+e_2)} \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} i^{-m_1-m_2}\, \frac{(1+2ix_+)^{m_1-e_1}}{(1-2ix_+)^{m_1+e_1}} \cdot \frac{(1-2ix_-)^{m_2-e_2}}{(1+2ix_-)^{m_2+e_2}} \cdot a_{\vec{m}} \tag{5.8}$$

Взяв эрмитово сопряжение, получим

$$\varphi^+(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, 2^{-2(\ell_1+\ell_2)} \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} i^{m_1+m_2} \frac{(1-2ix_+)^{m_1-\ell_1}}{(1+2ix_+)^{m_1+\ell_1}} \cdot \frac{(1+2ix_-)^{m_2-\ell_2}}{(1-2ix_-)^{m_2-\ell_2}} \cdot a^+_{\vec{m}} \tag{5.9}$$

Формулы (5.8,9) выражают конформные поля через операторы рождения и уничтожения. Обратные формулы можно получить,используя (5.6). Имеем (см.также (5.18)),

$$a_{\vec{m}} = q^{\vec{\ell}}_{\vec{m}} \int d^2x\, d^2y\, \overset{*}{f}{}^{1-\vec{\ell}}_{\vec{m}}(x)\, Q_{1-\vec{\ell}}(x-y)\, \varphi(y)\,, \tag{5.10}$$

$$a^+_{\vec{m}} = q^{\vec{\ell}}_{\vec{m}} \int d^2x\, d^2y\, \varphi^+(y)\, Q_{1-\vec{\ell}}(y-x)\, f^{1-\vec{\ell}}_{\vec{m}}(x)\,. \tag{5.11}$$

<u>Конформно сопряженные поля.</u> По определению конформно сопряженное поле получается из поля $\varphi(x)$ взятием эрмитова сопряжения и заменой $\vec{\ell} \to 1-\vec{\ell}$. Имеем, следовательно

$$\varphi^\dagger(x) \equiv Q_{1-\vec{\ell}}\, \varphi^+(x)\, Q^{-1}_{1-\vec{\ell}} = \sum_{\vec{m}} \overset{*}{f}{}^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}\, a^+_{\vec{m}} \tag{5.12}$$

Воспользуемся теперь соотношением, доказанным в /3/

$$q^{\vec{\ell}}_{\vec{m}} \cdot f^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}(x) = \int Q_{1-\vec{\ell}}(x-y)\, f^{1-\vec{\ell}}_{\vec{m}}(y)\, d^2y \tag{5.13}$$

Отсюда следует

$$\overset{*}{f}{}^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}(x) \cdot a^+_{\vec{m}} = q^{1-\vec{\ell}}_{\vec{m}} \cdot \overset{*}{f}{}^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}(x)\, a^+_{\vec{m}} =$$

$$= \int Q_{1-\vec{\ell}}(x-y)\, f^{1-\vec{\ell}}_{\vec{m}}(y)\, a^+_{\vec{m}}\, d^2y\,.$$

Окончательно

$$Q_{1-\vec{\ell}}\, \varphi^+(x)\, Q_{\vec{\ell}} = \int d^2y\, Q_{1-\vec{\ell}}(x-y)\, \varphi^+(y) \tag{5.14}$$

или

$$\varphi^\dagger(x) = \int d^2y\, Q_{1-\vec{\ell}}(x-y)\, \varphi^+(y)\,. \tag{5.15}$$

Аналогично, для поля $\varphi^+(x)$ имеем

$$(\varphi^+(x))^\dagger \equiv Q_{\vec{\ell}}\, \varphi(x)\, Q_{1-\vec{\ell}} = \sum_{\vec{m}} f^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}(x)\, (a^+_{\vec{m}})^\dagger =$$

$$= \int d^2y\, Q_{1-\vec{\ell}}(x-y)\, \varphi(y)\,. \tag{5.16}$$

Обратные формулы получаются также, как (5.10). В частности, для $a^+_{\vec{m}}$ находим

$$a^+_{\vec{m}} = q^{1-\vec{\ell}}_{\vec{m}} \int d^2x\, d^2y\, \varphi^\dagger(x)\, Q_{\vec{\ell}}(x-y)\, f^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}(y)\,. \tag{5.17}$$

Заметим, что формулы (5.10) можно упростить, если воспользоваться соотношением (5.13). Так, вместо (5.10) имеем

$$a_{\vec{m}} = \int d^2x\, \overset{*}{f}{}^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}(x)\, \varphi(x) \tag{5.18}$$

$$a^+_{\vec{m}} = \int d^2x\, \varphi^+(x)\, f^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}(x)\,.$$

Формулы (5.8-11) и (5.15-17) решают задачу о построении конформных полей, соответствующих непрерывной серии. Характерной особенностью этих полей является их неэрмитовость. Причина в том, что суммирование по m_1 и m_2 в формулах (5.8,9) распространяется на все целые значения, положительные и отрицательные. Заметим, что в представлениях дискретных серий ситуации существенно иная. Как показано в /2/, в этом случае имеются дополнительные инварианты – знак m_1 и знак m_2, т.е. сумма в формулах (5.8,9) может быть инвариантным образом разбита на две части. (Аналогично, в импульсном представлении возникает возможность инвариантного разделения на будущий и прошлый конус). Поскольку в непрерывной серии такое разбиение невозможно, поле (5.8) нельзя представить в виде суперпозиции операторов рождения и уничтожения, и оно не может быть сделано эрмитовым x). По этой же причине нельзя инвариантным образом ввести античастицы. В дискретных сериях эти трудности не возникают. Найдем коммутатор (или антикоммутатор) полей $\varphi(x)$ и $\varphi^+(x)$. Поскольку коммутатор (антикоммутатор) есть с-число, имеем

$$\{\varphi(x), \varphi^+(y)\}_\pm = \langle 0|\varphi(x)\varphi^+(y)|0\rangle \tag{5.19}$$

Для вычисления вакуумного среднего в правой части достаточно заметить, что $\varphi^+(x)$ и $\varphi(x)$ можно рассматривать как операторы рождения и уничтожения в x -представлении

$$|\vec{\ell}, x\rangle = \varphi^+(x)|0\rangle \tag{5.20}$$

где $|\vec{\ell}, x\rangle$ -векторы, введенные в /3/

$$|\vec{\ell}, x\rangle = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} f^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}(x)\,|\vec{\ell}, \vec{m}\rangle \tag{5.21}$$

Как показано, в /3/, эти векторы образуют пространство неприводимого представления конформной группы, и нормированы условием:

x) Аналогичную структуру имеют поля, преобразующиеся по пространственно-подобным ($p^2 < 0$) представлениям группы Пуанкаре /8/.

$$\langle x, \vec{\ell}|\vec{\ell}, y\rangle = Q_{\vec{\ell}}(x-y) \tag{5.22}$$

где функция $Q_{\vec{\ell}}(z)$ определена в (5.7)

Таким образом, окончательно имеем

$$\{\varphi(x), \varphi^+(y)\}_\pm = \frac{\Gamma(\ell_1)\Gamma(1-\ell_1)}{2\Gamma(1-2\ell_1)} \cdot \frac{\Gamma(\ell_2)\Gamma(1-\ell_2)}{\Gamma(1-2\ell_2)} |z^2|^{-d} \left|\frac{z_-}{z_+}\right|^s \tag{5.23}$$

$$z = x - y.$$

Для скалярного поля $(s=0)$ с размерностью $d = 1$ имеем

$$\{\varphi(x), \varphi^+(y)\}_- = \delta(x-y).$$

В дальнейшем в формулах типа (5.23) мы будем подразумевать, что $\ell_1, \ell_2 \neq \frac{1}{2}$ ($d \neq 1$, $s \neq 0$). Вид соответствующих формул в случае $\ell_1, \ell_2 = \frac{1}{2}$ ($d=1, s=0$) очевиден.
Заметим, что правая часть (5.23) не равна нулю вне конуса, и следовательно поля $\varphi(x)$ не локальны. Этот результат не является неожиданным. Локальность несовместима с конформной инвариантностью, если только размерность поля не равна целому или полуцелому числу. Действительно, специальное конформное преобразование связывает пространственно-временные точки, лежащие внутри и вне светового конуса. И только поверхность светового конуса остается инвариантной. Это означает, что микропричинность совместима с конформной инвариантностью лишь в том случае, когда коммутатор пропорционален $\delta(x^2)$ и её производным. Последнее возможно лишь в случае целой и полуцелой размерности поля (точнее, когда $2\ell_1$ и $2\ell_2$ – целые числа, однако эти значения выпадают из непрерывной серии). Можно показать, что имен-

но такая ситуация возникает в случае представлений дискретных серий и безмассовых представлений.

Для конформно сопряженных полей $\varphi^{t}(x)$ и $(\varphi^{t}(x))^{+}$ имеют место формулы, аналогичн ые (5.19–23)

$$|1-\vec{e}, x\rangle = \varphi^{t}(x)|0\rangle, \tag{5.24}$$

$$\langle x, 1-\vec{e}\,|\,1-\vec{e}, y\rangle = Q_{1-\vec{e}}(x-y). \tag{5.25}$$

По этому

$$\{(\varphi^{t}(x))^{+}, \varphi^{t}(y)\}_{\pm} = \langle 0|(\varphi^{t}(x))^{+}\varphi^{t}(y)|0\rangle = \tag{5.26}$$

$$= \frac{\Gamma(e_1)\Gamma(1-e_1)}{2\Gamma(2e_1-1)}\cdot\frac{\Gamma(e_2)\Gamma(1-e_2)}{\Gamma(2e_2-1)}\left|(x-y)^2\right|^{d-2}\left|\frac{x_+-y_+}{x_--y_-}\right|^{s}.$$

Отметим, что масштабная размерность d^{t} и спин s^{t} конформно-сопряженного поля $\varphi^{t}(x)$ есть $d^{t} = 2-d$, $s^{t} = -s$.

Приведем вид коммутатора (антикоммутатора) поля $\varphi(x)$ и конформно сопряженного поля $\varphi^{t}(x)$ (ср. с формулой (4.17))

$$\{\varphi(x), \varphi^{t}(y)\}_{\pm} = \delta(x-y). \tag{5.27}$$

Это выражение легко может быть получено из)5.23), если учесть доказанное в /3/ соотношение

$$\int d^2 z\, Q_{\vec{e}}(x-z)\,Q_{1-\vec{e}}(z-y) = \delta(x-y). \tag{5.28}$$

Из (5.27) видно, что поле $\varphi(x)$ и конформно сопряженное поле $\varphi^{t}(y)$ локальны относительно друг друга.

Рассмотрим в заключение, импульсное представление полей

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int d^2 p\, a_p\, e^{-ipx} \tag{5.29}$$

$$\varphi^{+}(x) = \frac{1}{2\pi}\int d^2 p\, a_p^{+}\, e^{ipx} \tag{5.30}$$

Интегрирование в этих формулах распространено на всё импульсное пространство. Операторы a_p и a_p^{+} учничтожают и рождают конформные состояния с 2-импульсом

$$|\vec{e}, p\rangle \equiv |\vec{e}, p_\mu\rangle = a_p^{+}|0\rangle. \tag{5.31}$$

и удовлетворяют инвариантным перестановочным соотношениям

$$\{a_p, a_q^{+}\}_{\pm} = q_{\vec{e}}(p)\,\delta(p-q) \tag{5.32}$$

где

$$q_e(p) = |p^2|^{d-1}\left|\frac{p_+}{p_-}\right|^{s} \tag{5.33}$$

Как показано в /3/, векторы $|\vec{e}, p\rangle$.

$$\langle p, \vec{e}\,|\,\vec{e}, p'\rangle = q_{\vec{e}}(p)\,\delta(p-p') \tag{5.34}$$

образуют пространство неприводимого представления конформной группы.

Отметим, что состояния $|\vec{e}, p\rangle$ могут иметь любые импульсы, лежащие в интервале

$$-\infty < p^2 < \infty \tag{5.35}$$

Поэтому знак ρ_0 не является инвариантом относительно конформных преобразований /2/, и в такой теории нет наинизшего энергетического состояния.

VI. Двухкомпонентные поля и вакуумные средние

Рассмотрим поля, преобразующиеся по представлениям полной конформной группы с отражениями /2/. Для этого необходимо рассмотреть прямые суммы представлений

$$(\ell_1, \ell_2) \oplus (\ell_2, \ell_1)$$

соответствующие им поля двухкомпонентны и имеют вид

$$\psi_{\vec{\ell}} = \begin{pmatrix} \varphi_{\ell_1,\ell_2} \\ \varphi_{\ell_2,\ell_1} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Для краткости мы ограничимся рассмотрением полей со спином

$$s = \ell_1 - \ell_2 = \frac{1}{2} \tag{6.2}$$

Найдем вакуумные средние этих полей. Удобно ввести двумерные матрицы Дирака

$$\gamma_0 = \sigma_2, \quad \gamma_1 = -i\sigma_1; \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = -\sigma_3$$

Положим

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0$$

Имеет, согласно (5.23) и (6.2)

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}_+ = \frac{1}{i} Q_d(x-y) \tag{6.3}$$

$$Q_d(z) = i\pi \cdot \frac{\Gamma(d-\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2}-d)} \frac{\hat{z}}{|z^2|^{d+\frac{1}{2}}} \tag{6.4}$$

где

$$\hat{z} = i|\gamma_\mu z_\mu| = i\begin{pmatrix} 0 & -|z_0 - z_1| \\ |z_0 + z_1| & 0 \end{pmatrix}$$

Учитывая, что

$$\psi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\bar{\psi}(x) = 0$$

находим для вакуумных средних

$$\langle 0|\psi(x_1)\dots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\dots\bar{\psi}(y_n)|0\rangle = \tag{6.5}$$

$$= i^{-n} S_{\{y\}} \left\{ \prod_{k=1}^{n} Q_d(x_k - y_k) \right\}.$$

где $S_{\{y\}}$ означает антисимметризацию по переменным y_k.

Для конформно сопряженного поля имеем

$$\psi^\dagger(x) = i\int d^2y\, \hat{Q}_d^{-1}(x-y)\psi^+(y) = \begin{pmatrix} -i\varphi^+_{\ell_2,\ell_1} \\ i\varphi^+_{\ell_1,\ell_2} \end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

где

$$\hat{Q}_d^{-1}(z) = \frac{1}{i}\pi \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-d)}{2\Gamma(d-\frac{3}{2})} \hat{z}\, |z^2|^{d-\frac{5}{2}}$$

$$\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\}_+ = \delta(x-y). \tag{6.7}$$

VII. Унитарные и неунитарные и неунитарные представления непрерывной серии

1. Унитарные представления. Условие унитарности для представлений непрерывной серии имеет вид

$$0 < \ell_1 < 1, \quad 0 < \ell_2 < 1 \tag{7.1}$$

В терминах спина $s = \ell_1 - \ell_2$ и масштабной размерности $d = \ell_1 + \ell_2$, имеем вместо (7.1)

$$-1 < s < 1 \quad ; \quad |s| < d < 2 - |s| \tag{7.2}$$

В этих неравенствах крайне значения не достигаются. Заметим, что область (7.1) инварианта относительно замены $\ell_1 \to 1 - \ell_1$, $\ell_2 \to 1 - \ell_2$. Таким образом, в интервал (7.1) попадают как само поле $\varphi(x)$, преобразующееся по унитарному представлению (ℓ_1, ℓ_2), так и конформно сопряженное поле, преобразующееся по представлению $(1-\ell_1, 1-\ell_2)$.

Рассмотрим пространство Фока, соответствующее унитарному представлению (ℓ_1, ℓ_2). Нетрудно показать, что если выполняется условие (7.1), то $\frac{\Gamma(\ell - m)}{\Gamma(1-\ell-m)} > 0$ при всех m. Таким образом, метрика (2.17) пространства Фока положительно определена, и в пространстве Фока можно выбрать ортонормированный базис, не нарушая ковариантности теории /3/.

Введем векторы

$$|\vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_n\rangle = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\Gamma(\ell_1 - m_1^i)}{\Gamma(1-\ell_1-m_1^i)} \cdot \frac{\Gamma(\ell_2 - m_2^i)}{\Gamma(1-\ell_2-m_2^i)} \right\}^{1/2} |\vec{\ell}, \vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_n\rangle \tag{7.3}$$

Эти векторы нормированы на 1

$$\langle \vec{m}_1, \ldots \vec{m}_n | \vec{m}'_1 \ldots \vec{m}'_n\rangle = S\left\{ \delta_{\vec{m}_1, \vec{m}'_{i_1}} \cdots \delta_{\vec{m}_n, \vec{m}'_{i_n}} \right\} \tag{7.4}$$

Преобразование (6.3) переводит операторы $a^+_{\vec{m}}$ и $a_{\vec{m}}$ в

$$\alpha^+_{\vec{m}} = \left(q^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}\right)^{-\frac{1}{2}} a^+_{\vec{m}}, \quad \alpha_{\vec{m}} = \left(q^{\vec{\ell}}_{\vec{m}}\right)^{-\frac{1}{2}} a_{\vec{m}}. \tag{7.5}$$

При этом перестановочные соотношения принимают вид

$$\{\alpha_{\vec{m}}, \alpha^+_{\vec{m}'}\}_{\pm} = \delta_{\vec{m}, \vec{m}'} \tag{7.6}$$

а конформное сопряжение совпадает с обычным эрмитовым сопряжением

$$\overset{+}{\alpha}_{\vec{m}} = \alpha^+_{\vec{m}} \tag{7.7}$$

Заметим, что в результате преобразования (7.3) изменяется вид генераторов группы /2/. В частности, вместо (3.12) имеем

$$\left[H^A_{\pm}, \alpha^+_{\vec{m}}\right] = -\sqrt{(\ell_1 \pm m_1)(1 - \ell_1 \pm m_1)}\; \alpha^+_{m_1 \pm 1, m_2}, \tag{7.8}$$

$$\left[H^B_{\pm}, \alpha^+_{\vec{m}}\right] = -\sqrt{(\ell_2 \pm m_2)(1 - \ell_2 \pm m_2)}\; \alpha^+_{m_1, m_2 \pm 1}.$$

Аналогичные соотношения для $\alpha_{\vec{m}}$ получаются из (7.8) эрмитовым сопряжением, с учетом эрмитовости операторов алгебры:

$$A_i^+ = A_i \quad ; \quad B_i^+ = B_i$$

Заметим, что преобразование типа (7.3) существует и в координатном пространстве. Однако оно приводит к нелокальным преобразованиям полей, изменяющим масштабную размерность, и требует дополнительного исследования. Здесь мы не будем рассматривать такие преобразования.

2. <u>Неунитарные представления.</u> Мы ограничимся рассмотрением рением неунитарных представлений (ℓ_1, ℓ_2) таких, что

$$\text{либо} \quad \ell_1 > 1, \quad \ell_2 < 0$$

$$\text{либо} \quad \ell_1 < 0, \quad \ell_2 > 1 \tag{7.10}$$

Все остальные представления могут быть получены из указанных конформным сопряжением (при этом происходит замена $\vec{e}\to 1-\vec{e}$). Для размерности d и спина s имеем в неунитарных представлениях

$$d<|s|>1 \ , \quad d>2-|s| \tag{7.11}$$

Конформное сопряжение приводит к замене значений из интервали (6,11) на

$$s\to -s \ , \quad d\to 2-d \tag{7.12}$$

Рассмотрим пространство Фока$_{e_1,e_2}$, соответствующее неунитарному представлению (e_1, e_2), где лежат в интервале (7.10). Нетрудно убедиться, что метрика пространства Фока (2,17) индефинита. Действительно

$$\frac{\Gamma(e-m)}{\Gamma(1-e-m)} = \frac{m+1-e}{m+e}\cdot\frac{\Gamma(e-m-1)}{\Gamma(-e-m)}.$$

Множитель $\frac{m+1-e}{m+e}<0$, если m лежит в интервале

$$-e<m<e-1 \tag{7.13}$$

Следовательно величина $\frac{\Gamma(e-m)}{\Gamma(1-e-m)}$, которая входит в выражение (2.17) для метрики пространства Фока, меняет знак каждый раз, когда m меняется на единицу в интервале (7.13). Таким образом, часть векторов пространства Фока имеет отрицательную норму. Это является следствием общей теоремы из теории групп /7,3/, согласно которой инвариантная метрика в пространстве неприводимого неунитарного представления (см.сноску на стр. 14) индефинита. По этой причине в неунитарных представлениях нельзя сделать преобразование базиса типа (7.3), и конформное сопряжение не сводится к эрмитову сопряжению ни при какой инвариантной нормировке базиса.

УШ. Генераторы конформной группы

Рассмотрим явную реализацию генераторов конформной группы в пространстве состояний поля $\varphi(x)$. Введем оператор числа "частиц" $n_{\vec m}$ с квантовыми числами $\vec m = (m_1, m_2)$. Нетрудно убедиться, что он имеет вид

$$n_{\vec m} = a^+_{\vec m}\, a_{\vec m} \tag{8.1}$$

где $a^+_{\vec m}$ -оператор, конформно сопряженный к $a_{\vec m}$. Оператор полного числа "частиц" есть

$$N = \sum_{\vec m=-\infty}^{\infty} a^+_{\vec m}\, a_{\vec m} \tag{8.2}$$

$$N|\vec e; n\rangle = n|\vec e; n\rangle$$

Найдем явные выражения для операторов A_3, B_3, $H^A_\pm$ и $H^B_\pm$. Эти выражения могут быть получены, как "решение" уравнений (2.14), или (3.11-14).

Нетрудно проверить, что они имеют вид

$$A_3 = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} m_1\, a^+_{\vec m}\, a_{\vec m}$$

$$B_3 = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} m_2\, a^+_{\vec m}\, a_{\vec m} \tag{8.3}$$

$$H^A_\pm = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} \left[-(1-e_1)\mp m_1\right] a^+_{m_1\pm 1, m_2}\, a_{m_1,m_2}$$

$$H^B_\pm = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} \left[-(1-e_2)\mp m_2\right] a^+_{m_1, m_2\pm 1}\, a_{m_1,m_2}.$$

Для того, чтобы найти выражения этих операторов через поля, можно воспользоваться формулами (5.17-18), и соотношением полноты для функций $f^{\vec{e}}_{\vec{\mu}}(x)$ /3/

$$\sum_{\vec{\mu}=-\infty}^{\infty} f^{1-\vec{e}}_{\vec{\mu}}(x)\, f^{\vec{e}}_{\vec{\mu}}(y) = \delta(x-y).$$

Удобнее, однако, рассмотреть непосредственно перестановочные соотношения (2.1) генераторов конформной группы с полями. Нетрудно проверить, что они выполняются, если положить

$$M_{\mu\nu} = i\int d^2x\, \psi^\dagger(x)\left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + S\epsilon_{\mu\nu}\right)\psi(x)$$

$$P_\mu = -i\int d^2x\, \psi^\dagger(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x) \tag{8.4}$$

$$K_\mu = i\int d^2x\, \psi^\dagger(x)\left(x^2\frac{\partial}{\partial x^\mu} - 2x_\mu\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) - 2d x_\mu - 2S\epsilon_{\mu\nu}x_\nu\right)\psi(x)$$

$$D = i\int d^2x\, \psi^\dagger(x)\left(d + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)$$

Для проверки совместимости (7.4) и (2.1) используются формулы (5.27,28) и соотношения

$$\left(\partial^x_\pm + \partial^y_\pm\right) Q_{\vec{e}}(x,y) = 0$$

$$\left(2e_{1,2} + x_\pm \partial^x_\pm + y_\pm \partial^y_\pm\right) Q_e(x,y) = 0$$

$$\left(2e_{1,2}(x_\pm + y_\pm) + x^2_\pm \partial^x_\pm + y^2_\pm \partial^y_\pm\right) Q_e(x,y) = 0$$

Напомним, что поля $\psi^+(x)$ и $\psi^\dagger(x)$ связаны нелокальным преобразованием (см. (5.15)). В частности, для 2-импульса имеем

$$P_\mu = -i\int d^2x\, d^2y\, Q_{1-\vec{e}}(x-y)\, \psi^+(x)\frac{\partial}{\partial y^\mu}\psi(y) = \tag{8.5}$$

$$= -\frac{i}{2}\int d^2x\, d^2y\, Q_{1-\vec{e}}(x-y)\left\{\psi^+(x)\,\partial_\mu\psi(y) - \left(\partial_\mu\psi^+(x)\right)\cdot\psi(y)\right\}.$$

По этой причине в рассматриваемой теории поля не существует локального тензора энергии - импульса.

IX. Инфинитезимальная конформная инвариантность

До сих пор рассматривалась теория поля, инвариантная относительно любых конечных преобразований конформной группы. В основе этой теории лежат перестановочные соотношения (2.1) и предположение об "однозначных" конформных состояниях. Соотношения (2.1) выражают инвариантность теории относительно инфинитезимальных преобразований. Инвариантность относительно конечных преобразований обеспечивается тем, что каждому вектору пространства неприводимого представления сопоставляется определенное состояние поля $\varphi(x)$. При этом состояния поля $\varphi(x)$ могут иметь любые импульсы в интервале

$$-\infty < p^2 < \infty \tag{9.1}$$

Рассмотрим часть пространства неприводимого представления (e_1, e_2), ограниченную условием

$$p^2 > 0 \tag{9.2}$$

Эта часть пространства инвариантна относительно конечных растяжений, конечных преобразований Лоренца и сдвигов. Однако конечные специальные конформные преобразования меняют знак и не оставляют такое пространство инвариантным. Тем не менее мы можем рассмотреть поля, состояния которых удовлетворяют условию (9.2). Такая теория поля инвариантна относительно инфинитезимальных преобразований в том смысле, что перестановочные соотношения (2.1), по-прежнему, выполняются. Кроме того теория инвариантна относительно конечных преобразований группы Пуанкаре и конечных растяжений.

Если ограничить пространство состояний условием (9.2), то в теории появляется дополнительный инвариант – знак энергии $sgn\, p_0$. Область $p^2 > 0$ может быть инвариантным образом разделена на две части:

1) верхний конус $p^2 > 0, \quad p_0 > 0$ (9.3)

2) нижний конус $p^2 > 0, \quad p_0 < 0$ (9.4)

Это означает, что каждой конформной "частице" можно сопоставить "античастицу". Введение "античастиц" позволяет построить локальные поля. Статистика таких полей определяется, как обычно, спином. Однако двумерный аналог спина плохо определен в представлениях непрерывной серии: он принимает непрерывный ряд значений. Если ограничиться только целыми и полуцелыми значениями, то требование локальности поля приводит к обычной связи спина и статистики.

В случае произвольного спина, не равного целому или полуцелому, построение локальных полей невозможно. Мы будем рассматривать только поля с целым или полуцелым спином. Положим

$$\{\varphi(x), \varphi^+(y)\} = \varphi(x)\varphi^+(y) - \eta\varphi^+(y)\varphi(x) \tag{9.5}$$

где $\eta = \pm 1$

Условие локальности запишем в виде

$$\{\varphi(x), \varphi^+(y)\} = 0, \quad \text{при } (x-y)^2 < 0 \tag{9.6}$$

Мы покажем, что поле $\varphi(x)$ локально, если положить

$$\eta = e^{2i\pi s} \tag{9.7}$$

где s –спин.

Построение поля $\varphi(x)$ удобно провести в импульсном представлении. Рассмотрим вектор пространства неприводимого представления (ℓ_1, ℓ_2)

$$|\vec{\ell}, p\rangle \equiv |\ell_1, \ell_2; p_0, p_1\rangle \tag{9.8}$$

удовлетворяющие условию

$$p^2 > 0, \quad p_0 > 0 \tag{9.9}$$

Инвариантная нормировка векторов есть / /

$$\langle p, \vec{\ell}\,|\,\vec{\ell}, p'\rangle = q_{\vec{\ell}}(p)\,\delta(p-p') \tag{9.10}$$

где

$$q_{\vec{\ell}}(p) = (p^2)^{d-1}\left(\frac{p_+}{p_-}\right)^s \theta(p^2)\,\theta(p_0)\,\delta(p-p') \tag{9.10a}$$

При таком выборе нормировки действие генераторов конформной группы задаётся формулами

$$P_\pm|\vec{\ell}, p\rangle = p_\pm|\vec{\ell}, p\rangle; \quad D_\pm|\vec{\ell}, p\rangle = (\ell_\pm + p_\pm\partial_\pm)|\vec{\ell}, p\rangle$$

$$K_\pm|\ell, p\rangle = -4\left(p_\pm\partial_\pm^2 + 2(1-\ell_\pm)\partial_\pm\right)|\vec{\ell}, p\rangle \tag{9.11}$$

где $\ell_+ = \ell_1$, $\ell_- = \ell_2$

Введём операторы рождения и уничтожения конформных состояний

$$|\vec{\ell}, p\rangle = a^+_{\ell, p}|0\rangle, \quad a_{\ell, p}|0\rangle = 0 \tag{9.12}$$

В соответствии с (9.10) положим

$$\{a_{e,p}, a^+_{e,p'}\} = a_{e,p}a^+_{e,p'} - \eta a^+_{e,p'}a_{e,p}$$

$$= (p^2)^{d-1-s}(p_+)^{2s}\,\theta(p^2)\theta(p_0)\,\delta(p-p') \qquad (9.13)$$

и

$$\{a_{e,p}, a_{e,p'}\} = a_{e,p}a_{e,p'} - \eta a_{e,p'}a_{e,p} = 0$$

Определим "n-частичные" конформные состояния

$$|\vec{e}; p_1, \dots p_n\rangle = a^+_{e,\vec{p}_1}\dots a^+_{e,\vec{p}_n}|0\rangle$$

Так же как в случае теории, инвариантной относительно конечных специальных конформных преобразований, можно показать, что пространство состояний полей, преобразующихся по действительным неунитарным представлениям

$$\underline{s=0}: \ d>2 \ \text{либо} \ d<0; \quad \underline{s=\tfrac{1}{2}}: \ d>\tfrac{3}{2} \ \text{либо} \ d<\tfrac{1}{2} \qquad (9.13а)$$

имеет индефинитную метрику. Действительно, пространство состояний из сингулярных в нуле функций /3/, определенных в интервале (9.9). Соответствующие скалярные произведения содержат интегралы вида:

$$\int_0^\infty dp\,\theta(p)\,p^{2e-1}|f(p)|^2 \quad \text{и} \quad \int_0^\infty dp\,\theta(p)\,p^{1-2e}|f(p)|^2$$

где $f(p)$ конечные в нуле и экспоненциально убывающие на бесконечности функции. Согласно /10/, эти интегралы не положительны: первый при $e<0$, а второй – при $e>1$. В случае

унитарных представлений, метрика пространства состояний положительно определена.

Используя (9,11), можно найти коммутаторы операторов a и a^+ с генераторами конформной группы и построить поле $\varphi(x)$, удовлетворяющее соотношениям (2,1). С учётом (9) это поле имеет вид

$$\varphi^{(+)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int d^2p\,\theta(p^2)\,\theta(p_0)\,a_p\,e^{-ipx} \qquad (9.14)$$

Используя соотношение /9/ (, см.замечание к формуле (5.23)

$$\int dp_\pm\,\theta(p_\pm)\,p_\pm^{2e_\pm-1}\,e^{-ip_\pm x_\pm} = -i\Gamma(2e_\pm)\,e^{-\frac{i\pi}{2}(2e_\pm-1)}\,\frac{1}{(x_\pm - i\varepsilon)^{2e_\pm}}$$

находим

$$\{\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(+)+}(y)\} = \frac{1}{i}\Delta^{(+)}(x-y)$$

где

$$\Delta^{(+)}(z) = \frac{i}{4\pi^2}\int d^2p\,\theta(p^2)\,\theta(p_0)\,(p^2)^{d-s-1}(p_+)^{2s}e^{-ipz} =$$

$$= \frac{i}{8\pi^2}\int dp_+\,dp_-\,\theta(p_+)\,\theta(p_-)\,p_+^{2e_1-1}\,p_-^{2e_2-1}\,e^{-ip_+z_+}\,e^{-ip_-z_-} = \qquad (9.15)$$

$$= \frac{i}{8\pi^2}\Gamma(d+s)\,\Gamma(d-s)\,e^{-i\pi d}\,(z^2 - i\varepsilon z_0)^{-d-s}\,(z_-)^{2s}.$$

Введём, далее, операторы $b_{\vec{e},p}$ и $b^{+}_{\vec{e},p}$ рождения и уничтожения "античастиц". Аналогично (9.14) определим поле

$$\varphi^{-}(x) = \frac{1}{2\pi}\int d^2p\,\theta(p^2)\,\theta(p_0)\,b^{+}_{\vec{e},p}\,e^{ipx} \qquad (9.16)$$

Для этого поля имеем

$$\{\varphi^{(-)}(x),\ \varphi^{(-)}(y)^{+}\} = \frac{1}{i}\,\Delta^{(-)}(x-y) \qquad (9.17)$$

где

$$\Delta^{(-)}(z) = -\frac{i}{8\pi^2}\,e^{i\pi d}\,\eta\,\Gamma(2e_1)\Gamma(2e_2)(z_{+}+i\varepsilon)^{-2e_1}(z_{-}+i\varepsilon)^{-2e_2} = \qquad (9.17a)$$

$$= -\frac{i}{8\pi^2}\,\eta\,e^{i\pi d}\,\Gamma(d+s)\Gamma(d-s)\,(z^2+i\varepsilon z_0)^{-d-s}\,(z_{-})^{2s}$$

Функции $\Delta^{(+)}(z)$ и $\Delta^{(-)}(z)$ связаны соотношениям

$$\overset{*}{\Delta}{}^{(+)}(z) = (-1)^{2s}\cdot\Delta^{(-)}(z)$$

Введём поле $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x) \qquad (9.18)$$

Покажем, что это поле локально. Имеем

$$\{\varphi(x),\ \varphi^{+}(y)\} = \frac{1}{i}\,\Delta(x-y) \qquad (9.19)$$

где $\Delta(z) = \Delta^{(+)}(z) + \Delta^{(-)}(z) =$

$$= i^{2s}\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{\Gamma(d-s)}{\Gamma(1-d+s)}\cdot(z^2)^{-d-s}(z_{-})^{2s}\,\theta(z^2)\,\varepsilon(z_0).$$

При вычислении $\Delta(z)$ использовалась формула /9/

$$(x\mp i\varepsilon)^{\lambda} = \theta(x)(x)^{\lambda} + e^{\mp i\lambda\pi}\,\theta(-x)(-x)^{\lambda} \qquad (9.20)$$

Перестановочная функция $\Delta(z)$ равна нулю вне светового конуса. При её вычислении предполагалось, что фазовый множитель η, фигурирующий в выражениях (13) и (17а) определен формулой (9.7). Таким образом в случае целого спина имеем бозе-статистику, а в случае полуцелого спина - ферми-статистику. Аналогичное рассмотрение показывает, что при других (непрерывных) значениях спина поле $\varphi(x)$ не локально при любом выборе статистики.

Так же, как в разделе У можно рассмотреть конформно сопряженные поля. Однако вместо (5.27) имеем

$$\{\varphi(x),\ \varphi^{+}(y)\}_{\pm} = \varepsilon(x_0-y_0)\,\delta((x-y)^2)$$

Приведём выражение для вакуумных средних поля $\varphi(x)$

$$\langle 0|\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\,\varphi^{+}(y_1)\ldots\varphi^{+}(y_n)|0\rangle = S^{\pm}_{\{j\}}\Big\{\prod_{k=1}^{n}\Delta^{+}(x_k-y_{j_k})\Big\}$$

где $S^{\pm}_{\{j\}}$ означает симметризацию или антисимметризацию (в зависимости от статистики) по по всем индексам j_k.

Из всех рассмотренных полей только скалярные ($s=0$) и спинорные (s =1/2) поля преобразуются по унитарным представлениям. Условие унитарности ограничивает размерность таких полей интервалами

$$s=0 \qquad 0<d<2 \qquad (9.21а)$$

$$s=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}<d<\frac{3}{2} \qquad (9.21б)$$

Эти поля локальны и все их состояния имеют положитетельную норму. Поэтому они являются обобщенными свободными полями и могут быть представлены в виде суперпозиции свободных полей /11/. Например, для скалярных полей имеем (d лежит в интервале (9.21б)

$$\varphi_d(x) = \int_0^\infty d\mu^2 (\mu^2)^{\frac{d-1}{2}} \varphi_\mu(x)$$

где $\varphi_\mu(x)$ -свободное поле с массой μ.

Подчеркнем, что условия (9.21а,б) имеют общий характер и не зависят от конкретного устройства динамики. В /3/ показано, что требование совместимости конформной инвариантности (относительно конечных преобразований) с аксиомами теории поля ведёт к квантованию размерностей

$$d = l + s + n \,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9.22}$$

где s -целый или полуцелый спин. Эти значения размерности и спина соответствуют представлениям дискретных серий. Если предполагать только инфинитезимальную инвариантность, то условие (9.22) ослабляется в случае скалярных и спинорных полей: допустимы также аномальные значения размерности в интервалах (9.2.1а,б). (В случае с высшими спинами аномальные размерности по-прежнему запрещены, т.к. в пространстве состояний таких полей имеются духи). В теориях, где масштабная размерность зависит от константы связи, условия (9.21а,б) и (9.22) ведут к ограничениям на заряд. В частности в модели Тирринга ($s = \frac{1}{2}$) имеем / 6 /

$$d = \frac{1}{2} + \frac{g^2}{1-g^2} \,, \qquad g = \frac{\lambda}{2\pi}$$

где λ -константа связи.
Из (9.21б) и (9.22) находим

$$g^2 < \frac{1}{2} \qquad \text{либо} \qquad g^2 = \frac{n+1}{n+2} \,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

При других значениях λ в модели Тирринга имеются состояния с отрицательной нормой

Рассмотранная теория поля не может быть инвариантной относительно R преобразования x) $\left(R x^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \right)$.

x) Для рассмотрения R -преобразования следует перейти к двухкомпонентным полям, преобразующимся по представлению $(\ell_1, \ell_2) \oplus (\ell_2, \ell_1)$.

Действительно, в силу соотношения $K_\mu = R\, P_\mu R^{-1}$ (где K_μ - генератор специального конформного преобразования), пуанкаре инвариантность и инвариантность относительно R -преобразования эквивалентны инвариантности относительно конечных специальных конформных преобразований, что приводит к нарушению условия (9.2).

X. Заключение. Обобщения на случай четырехмерного пространства - времени

Приведем краткое описание четырехмерной конформной группы. Все её представления делятся на два класса - вырожденные и невырожденные /12/. В вырожденных представлениях операторы Казимира выражаются через два параметра - спин и размерность. В невырожденных представлениях спин не является инвариантом, а операторы Казимира выражаются через три независимых параметра. Таким образом, представления двумерной конформной группы являются моделью вырожденных представлений четырехмерной группы. Аналога невырожденных представлений в двумерном пространстве нет. Однако, если ограничиться исследованием конечнокомпонентных полей, достаточно рассмотреть вырожденные представления.

Эти представления исследованы в работах /12/. Так же как и в двумерном случае, среди вырожденных представлений конформной группы имеются непрерывная серия, дискретные серии ($p^2 > 0$ и $p^2 < 0$) и представления, где $p^2 = 0$. В представлениях дискретных серий с $p^2 > 0$ и в представлениях с $p^2 = 0$ имеется дополнительный инвариант - знак энергии. В непрерывной серии дополнительных инвариантов нет, а p^2 может принимать значения в интервале.

$$-\infty < p^2 < \infty \,, \quad \text{кроме} \quad p^2 = 0 \tag{10.1}$$

В отличие от двумерной группы в представлениях непрерывной серии спин равен нулю. Можно показать, что размерность d может принимать любые (кроме некоторых дискретных) значения. Следует подчеркнуть, что аномальные значения размерности возможны только в этой серии представлений. Условие унитарности есть

$$1 < d < 3 \tag{10.2}$$

Остальные значения размерности соответствуют неунитарным представлениям. Операторы Казимира в непрерывной серии инвариантны относительно замены /13/

$$d \to 4-d$$

Таким образом, структура представлений непрерывной серии четырехмерной конформной группы аналогична структуре соответствующих представлений двумерной группы, и основные результаты легко обобщаются на четырехмерный случай.

Заметим, в заключение, следующее. Конформная инвариантность в реальной физической теории заведомо является приближенной, т.к. нарушается существованием масс частиц. Если предполагать, что поля с аномальной размерностью являются пределом реальных релятивистских полей на малых пространственно-временных расстояниях, то теория должна быть инвариантна относительно инфинитезиальных специальных конформных преобразований (раздел IX). В противном случае (инвариантность относительно конечных преобразований) в теории появляются состояния с нежелательными свойствами ($p^2 < 0$ и т.д.). Однако и в случае инфинитезимальной инвариантности размерность должна лежать в интервале (10.2). Если она принимает значения вне этого интервала, то в теории, неизбежно появляются духовые состояния (с отрицательной нормой). Исключение составляют целые и полуцелые значения размерности. Можно показать, что в этом случае теория удовлетворяет всем обычным требованиям /3/.

Авторы благодарят А.З.Паташинского за научное руководство и Ю.Б.Румера за стимулирующий интерес к работе.

Литература

1. А.Вайтман. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей "Наука", М., 1968.
2. Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 44-72, Новосибирск, 1972.
3. Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик. Препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1972.
4. S. Weinberg, Phys. Rev. 133B, 1318 (1964). ibid. 134B, 882 (1964).
5. W. Thirring, Ann. Phys., 3, 91 (1961).
6. K. Johnson, Nuovo. Cim., 20, 773 (1961), K. Wilson, Phys. Rev., D2, 1473, (1970). F. Scarf, J. Wess, Nuovo Cim., 26 150 (1962).
7. Ю.Н.Широков. ЖЭТФ, 33, 861, (1957).
8. M. E. Arons, E. Sudarshan, Phys. Rev., 173, 1622 (1968).
9. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Обобщенные функции. Вып. 1, М., 1959.
10. И.М.Гельфанд, И.Я.Виленкин. Обобщенные функции. Вып.4, М., 1961.
11. A. L. Licht, J. Math. Phys., 4, 1443 (1963).
12. Tsu Yao, J. Math. Phys., 8, 1931 (1967), 9, 1615 (1968), 12, 315 (1971).
13. S. Ferrara, R. Gatto, A. E. Grillo, G. Parisi, Lett. Nuovo Cim., 4, 115 (1972).

Ответственный за выпуск Б.Г.Конопельченко
Подписано к печати 29/XII-72г. МН16531
Усл. 2,1 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 94 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,вг