

С. 71

И Н С Т И Т У Т ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р

ПРЕПРИНТ И Я Ф 84 - 73

М.Д.Спектор

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОТНОЙ
ПЛАЗМЫ В ГОФРИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ



Новосибирск

1973

+

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЫ В ГОФРИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М.Д. Спектор

АННОТАЦИЯ

Рассматривается гидродинамическая устойчивость плазмы в гофрированном магнитном поле. Получен критерий устойчивости желобковых колебаний, справедливый при произвольных $\beta = \frac{8\pi p}{B^2}$. Показано, что в достаточно длинной системе, всегда существуют неустойчивые почти желобковые возмущения с длиной волны, на много превышающей период гофрировки. Для таких наиболее опасных возмущений решены уравнения движения, и найдены инкременты неустойчивости в случае идеальной плазмы и с учетом вязкости. Вязкость существенна при больших β и может приводить к уменьшению инкрементов в $\sim \sqrt{\beta}$ раз.

В В Е Д Е Н И Е

В работах /1,2/ был предложен метод удержания плотной плазмы в гофрированном магнитном поле. Авторы показали, что разлет плазмы в продольном направлении существенно замедляется в условиях, когда длина свободного пробега частиц многоменьше длины установки. Если в радиальном направлении плазма удерживается не магнитным полем, а проводящей стенкой, то гофрировка не разрушается, даже когда газокINETическое давление плазмы p много больше давления магнитного поля $\frac{B^2}{8\pi}$.

Возникает вопрос об устойчивости плотной плазмы в такой системе. В настоящей работе эта задача рассматривается в гидродинамическом приближении.

Пусть в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , с осью z , направленной вдоль оси системы магнитное поле \vec{B} имеет компоненты B_r и B_z , которые являются периодическими функциями z с периодом l , равным длине одного пробкотрона (см. рис.). Начало отсчета поместим в точку, где поле максимально (в области пробки).

Как известно /3,4/, линеаризованные уравнения собственных колебаний идеальной плазмы сводятся к одному дифференциальному уравнению для смещения $\vec{\xi}$ плазмы из положения равновесия:

$$-\omega^2 \rho \vec{\xi} = \nabla(\vec{\xi} \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \vec{\xi}) + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \vec{B}, \operatorname{rot} [\vec{\xi} \vec{B}]] + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \operatorname{rot} [\vec{\xi} \vec{B}], \vec{B}] - (R \vec{\xi}) \quad (1.1)$$

Здесь ω - собственная частота, γ - показатель адиабаты, ρ , p , \vec{B} - равновесные значения плотности, давления и магнитного поля. Будем считать, что плазма окружена проводящим кожухом, так что граничные условия для $\vec{\xi}$ следующие: нормальная компонента смещения равна нулю на боковой поверхности, и $\vec{\xi} = 0$ на торцах.

Невозмущенные значения давления и магнитного поля связаны уравнением равновесия:

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}] \quad (1.2)$$

В силу самосопряженности уравнений (1.1) их можно исследовать энергетическим методом [3,5]. Тогда вопрос об устойчивости сводится к выяснению знака потенциальной энергии малых колебаний, которая равна:

$$W = \frac{1}{2} \int dV \left\{ \gamma p (\operatorname{div} \vec{\xi})^2 + (\vec{\xi} \nabla p) \operatorname{div} \vec{\xi} + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} [\vec{\xi} \vec{B}])^2 - \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} [\vec{\xi} \vec{B}] [\vec{\xi} \operatorname{rot} \vec{B}] \right\} \quad (1.3)$$

Мы предполагаем малым отношение максимального радиуса системы к длине одного пробкотрона ($\frac{r_{\max}}{l} \ll 1$). Это позволяет найти все величины, характеризующие магнитное поле и решить уравнения колебаний с помощью разложения по этому малому параметру.

Прямой минимизацией выражения (1.3) для потенциальной энергии получен критерий устойчивости желобковых возмущений, справедливый при произвольных $\beta = \frac{8\pi p}{B^2}$. Он отличается от критерия Мерсье [6-9], упрощенного для рассматриваемой конфигурации, наличием членов, учитывающих конечность давления плазмы и существенных при больших β , а от необходимого критерия конвективной устойчивости Каломцева [10] - [] - учетом дестабилизирующей роли токов в плазме.

Характерной особенностью рассматриваемой системы является наличие в ней большого числа пробкотронов, так что возможны почти желобковые колебания с длиной волны, намного превышающей период гофрировки l . Эти колебания могут быть неустойчивы и при выполнении критерия конвективной устойчивости.

Для таких, наиболее опасных возмущений (заметьте, что они являются мелкомасштабными по азимуту) решены уравнения движения и найдены инкременты неустойчивости в случае идеальной плазмы и с учетом вязкости.

2. Геометрия гофрированного магнитного поля

Введем поверхностную систему координат θ, φ, s с метрикой

$$(d\vec{r})^2 = r^2 d\theta^2 + h_s^2 ds^2 + \frac{d\varphi^2}{(rB)^2}, \quad (2.1)$$

θ - азимут; s отсчитывается вдоль магнитного поля, так что элемент длины магнитной силовой линии равен

$$dl = h_s ds = \frac{B_r}{B} dr + \frac{B_z}{B} dz, \quad (2.2)$$

причем на оси системы $h_s = 1$, $s = z$; $2\pi\varphi$ есть магнитный поток в силовой трубке, ограниченной данной магнитной поверхностью;

$$\varphi = \int_0^r B_z r dr \quad (2.3)$$

Уравнение равновесия (2.2) в переменных φ, s принимает вид

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{4\pi} \frac{B}{h_s} \frac{\partial(Bh_s)}{\partial\varphi} \quad (2.4)$$

(давление постоянно на магнитной поверхности и зависит только от φ).

Отметим еще равенство, вытекающее из того условия, что ds (2.2) является полным дифференциалом:

$$-rB \frac{\partial h_s}{h_s \partial\varphi} = \frac{\partial\alpha}{h_s \partial s} = \alpha \quad (2.5)$$

Здесь $\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_r}{B_z} = \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)_\varphi$, α - кривизна (знакопеременная) магнитной силовой линии.

В конкретных расчетах удобнее, однако, использовать вместо переменных φ, s величины $r_0(\varphi)$ и z , где r_0 - минимальный радиус данной магнитной поверхности (в области пробки). Первые члены разложения величин B_z и ρ по степеням r_0 имеют вид (при разложении по r_0 всюду подразумевается малость $\frac{r_{\max}}{l}$):

$$B_z = \frac{B_0}{f(z)} \left(1 + \beta(z) r_0^2 \right),$$

$$\rho = \rho_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} a r_0^2,$$

причем $f(0) = \min f = 1$. Если обозначить через B_m магнитное поле в пробке ($z=0$)

$$B_m(z_0) = B_0(1 + b(0)z_0^2)$$

то магнитный поток равен

$$\Phi = \int_0^{z_0} B_m(z') z' dz' \quad (2.7)$$

Сравнение выражений (2.3) и (2.7) позволяет найти первые члены разложения:

$$z = \sqrt{f} z_0 \left[1 + \frac{b(0) - b(z)}{4} z_0^2 \right]$$

тогда

$$B_z \equiv B_z \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} B_0 z_0 \frac{\dot{f}}{f^{3/2}}$$

(точкой обозначена производная по Z).

Мы считаем известными магнитное поле на оси системы $\frac{B_0}{f(z)}$ и зависимость давления ρ от z_0 , тогда разложения ос-

тальных величин определяются с помощью уравнения равновесия, которое в переменных z_0, Z приводится к виду:

$$\frac{d\rho}{dz_0} = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial B^2}{\partial z_0} \right)_{z_0} + \frac{z_0 B_m}{4\pi z} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{z_0}$$

Подставляя сюда выражения для z, B_z, B_r, B_m, ρ найдем:

$$b(z) = -\frac{af^2}{2} + \frac{f^2}{4} \left(\frac{\dot{f}}{f^2} \right),$$

после чего легко определяются остальные величины.

Вычислим еще с необходимой точностью величины, которые потребуются в дальнейшем

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\ell} \frac{h_s ds}{B} \equiv \int_0^{\ell} \frac{dz}{B_z(z, z)} \approx \frac{1}{B_0} \int_0^{\ell} (1 - b(z_0^2)) f dz = \\ &= \frac{\ell}{B_0} \left\{ \langle f \rangle + \frac{z_0^2}{2} [a \langle f^3 \rangle + \frac{3}{2} \langle \dot{f}^2 \rangle] \right\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} U_1 &= \int \frac{h_s ds}{B^3} \approx \frac{\ell}{B_0^3} \langle f^3 \rangle, \\ \langle F(z) \rangle &= \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} F(z) dz \end{aligned} \quad (2.9)$$

3. Устойчивость желобковых колебаний

Потенциальная энергия колебаний (1.3) в переменных θ, s, Φ записывается в виде:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int dV \left\{ \gamma \rho (\operatorname{div} \vec{\xi})^2 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \xi^3}{z h_s \partial s} \right)^2 + \frac{B^2}{4\pi} \left[\frac{z \partial \left(\frac{\xi^3}{z} \right)}{h_s \partial s} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B^2}{4\pi} \left(\frac{\partial \xi^3}{\partial \Phi} + \frac{4\pi}{B^2} \frac{d\rho}{d\Phi} \xi^3 + \frac{\partial \xi^3}{z \partial \theta} \right)^2 + 2 \frac{d\rho}{d\Phi} \frac{\partial h_s}{h_s \partial \Phi} \left(\frac{\xi^3}{z} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\xi^3 = z B \xi_\Phi$; $\xi_\Phi, \xi_\theta, \xi_{||}$ — смещения соответственно по нормали к магнитной поверхности, по азимуту и вдоль силовой линии невозмущенного магнитного поля.

В подынтегральном выражении для потенциальной энергии дестабилизирующим является только последний член. Если давление плазмы падает наружу $\frac{d\rho}{d\Phi} < 0$, то, как, как следует из равенства (2.5), этот член отрицателен в области, где $\frac{\partial \alpha}{h_s \partial s} < 0$, т.е. там, где магнитные силовые линии выпуклы наружу.

Таким образом, неустойчивость возникает из-за наличия областей с неблагоприятной кривизной магнитного поля — ситуация, аналогичная случаю резкой границы плазма-магнитное поле [3].

В силу аксиальной симметрии системы мы можем выбрать зависимость от азимута в виде

$$\xi_\varphi = \xi_\varphi(\varphi, s) \cos m\theta, \quad \xi_\theta = \xi_\theta(\varphi, s) \sin m\theta, \quad \xi_H = \xi_H(\varphi, s) \cos m\theta.$$

Минимизируем в выражении (3,1) первый и четвертый члены по величине $\text{div} \vec{\xi}_\theta = \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta}$. Используя уравнения движения (1,1) можно показать, что возмущения, минимизирующие сумму этих членов по $\text{div} \vec{\xi}_\theta$, соответствуют мелкомасштабным по азимуту собственным колебаниям, таким, что $m \rightarrow \infty, \xi_\theta \rightarrow 0$, но $m \xi_\theta$ — конечно. Для таких колебаний третий член в выражении (3,1) обращается в нуль, и минимизированное выражение для потенциальной энергии после усреднения осциллирующих множителей $\cos^2 m\theta$ и $\sin^2 m\theta$ приобретает вид:

$$W_1 = \frac{\pi}{2} \int \frac{h_s ds d\varphi}{B} \left\{ \frac{\gamma p}{1 + \frac{4\pi \gamma p}{B^2}} \left(\text{div} \vec{\xi}_H + 2 \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} \xi^3 \right)^2 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \xi^3}{\partial s} \right)^2 + 2 \frac{dp}{d\varphi} \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} \left(\xi^3 \right)^2 \right\} \quad (3.2)$$

Соответствующие уравнения колебаний записываются следующим образом:

$$-\omega^2 \xi^3 = \frac{r^2 B^3}{4\pi} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r^2 B} \frac{\partial \xi^3}{\partial s} \right) - 2r^2 B^2 \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} \left[\gamma p \frac{\text{div} \vec{\xi}_H + 2 \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} \xi^3}{1 + \frac{4\pi \gamma p}{B^2}} + \frac{dp}{d\varphi} \xi^3 \right],$$

$$-\omega^2 \xi_H = \frac{\partial}{\partial s} \left[\gamma p \frac{\text{div} \vec{\xi}_H + 2 \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} \xi^3}{1 + \frac{4\pi \gamma p}{B^2}} \right] \quad (3.3)$$

Относительно симметричных колебаний, не зависящих от θ , заметим, что они, как это следует из уравнений (3,1) разделяются на две ветви: первая $\xi_\varphi, \xi_H = 0, \xi_\theta \neq 0$; вторая $\xi_\theta = 0, \xi_\varphi, \xi_H \neq 0$. Ветвь $\xi_\theta \neq 0$ устойчива, так как в этом случае в выражении (3,2) для потенциальной энергии остается только третий неотрицательный член. Для второй же ветви критерий устойчивости мягче, а инкремент (если развивается неустойчивость) меньше, чем для колебаний, рассматриваемых нами.

Минимизируем теперь выражение

$$W_1 - \int \lambda(\varphi) \text{div} \vec{\xi}_H \frac{h_s ds d\varphi}{B}$$

по величине $\text{div} \vec{\xi}_H = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\xi_H}{B} \right)$. Неопределенный множитель $\lambda(\varphi)$ находится из условия $\int \text{div} \vec{\xi}_H \frac{h_s ds}{B} = 0$ (ξ_H обращается в нуль на торцах).

Минимальная потенциальная энергия равна

$$W_2 = \frac{\pi}{2} \int \frac{h_s ds d\varphi}{B} \left\{ \gamma p \frac{\left[\int \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} \xi^3 \frac{h_s ds}{B} \right]^2}{N^2 U^2 \left(1 + \frac{4\pi \gamma p U_1}{U} \right)} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \xi^3}{\partial s} \right)^2 + 2 \frac{dp}{d\varphi} \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} \left(\xi^3 \right)^2 \right\}$$

где $U = \int \frac{h_s ds}{B}, U_1 = \int \frac{h_s ds}{B^3}, N$ — число пробкотронов.

Для желобковых возмущений, постоянных вдоль магнитного поля ($\frac{\partial \xi^3}{\partial s} = 0$), в формуле (3,4) можно провести интегрирование вдоль силовых линий, для чего используем равенство, вытекающее из уравнения равновесия (2,4):

$$2 \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} = \frac{B}{h_s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h_s}{B} \right) - \frac{4\pi}{B^2} \frac{dp}{d\varphi} \quad (3.5)$$

В итоге получаем следующий критерий устойчивости желобковых возмущений [5]:

$$\left(\frac{dU}{dr_0} - 4\pi U_1 \frac{dp}{dr_0} \right) \left(\gamma p \frac{dU}{dr_0} + U \frac{dp}{dr_0} \right) > 0 \quad (3.6)$$

из формул (2.8), (2.9) для U и U_1 найдем с точностью до членов порядка τ_0^2

$$\frac{dU}{dz_0} - 4\pi U_1 \frac{dp}{dz_0} = \frac{3}{2} \frac{lr_0}{B_0} \langle f^2 \rangle > 0, \quad (3.7)$$

е. первая скобка в выражении (3.6) всегда положительна.^{x)} Следовательно в аксиально-симметричной системе магнитная яма ($\frac{dU}{dz_0} < 0$), создаваемая за счет градиента давления, не стабилизирует желобковых возмущений.

С учетом условия (3.7) критерий устойчивости (3.6) принимает вид:

$$\gamma p \frac{dU}{dz_0} + U \frac{dp}{dz_0} > 0 \quad (3.8)$$

Подставляя сюда значения всех величин, найденные в разделе 2, получим:

$$-a < \frac{\frac{3}{2} \langle f^2 \rangle}{\langle f^3 + \frac{2}{\gamma p} f \rangle} \quad (3.9)$$

или с той же точностью:

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r_0} < \frac{3 \langle f^2 \rangle}{\langle f^3 + \frac{2}{\gamma p} f \rangle} \frac{1}{\beta_0} \tau_0^2, \quad (3.10)$$

здесь $\beta_0 = \frac{8\pi p_0}{B_0^2}$

В случае больших критерий (3.9) сводится, очевидно, к условию $\frac{dU}{dz_0} > 0$:

x) Учет следующих членов разложения показывает, что величина $\frac{dU}{dz_0} - 4\pi U_1 \frac{dp}{dz_0}$, положительная при перепадах давления, допустимых уравнением равновесия: $|\frac{dp}{p}| < \frac{1}{\beta}$

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r_0} < \frac{3 \langle f^2 \rangle}{\langle f^3 \rangle} \frac{1}{\beta_0} \tau_0^2 \quad (3.11)$$

Если, как это обычно бывает, пробочное отношение таково, что $R-1 \sim 1$, то $\langle f^2 \rangle \sim \frac{1}{\tau_0^2}$, и критерий конвективной устойчивости плотной плазмы ($\beta \gg 1$) принимает вид:

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r_0} < A \frac{1}{\beta} \frac{\tau_0^2}{l^2}$$

A - коэффициент порядка единицы.

4. Неустойчивость длинноволновых возмущений.

Стабилизация торцами

Покажем теперь, что даже если плазма устойчива относительно желобковых колебаний, в достаточно длинной системе всегда можно построить возмущения, для которых потенциальная энергия W_2 (3.4) отрицательна.

Рассмотрим первое слагаемое в подынтегральном выражении (3.4). Поскольку величины B и $\frac{\partial h_s}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2B} \frac{\partial \alpha}{\partial s}$ являются четными функциями S (или Z), то выбрав в качестве возмущения любую нечетную функцию, можно первый член обратить в нуль. Если, кроме того, характерный масштаб изменения ξ^3 вдоль силовой линии много больше длины одного пробочного на l , то в третьем члене множитель $2 \frac{\partial h_s}{\partial \varphi}$ можно заменить его средним значением вдоль S . Эта величина, согласно (3.5), равна

$$\frac{1}{U} \int 2 \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} \frac{h_s ds}{B} = \frac{1}{U} \left(\frac{dU}{d\varphi} - 4\pi U_1 \frac{dp}{d\varphi} \right)$$

и всегда положительна. Следовательно, третье слагаемое в (3.3) будет отрицательным ($\frac{dp}{d\varphi} < 0$). Наконец, в достаточно длинной системе (точное условие будет указано ниже) можно выбрать почти однородные вдоль S возмущения ξ^3 с масштабом столь большим, что третье слагаемое в (3.4) станет по модулю

больше второго, а вся потенциальная энергия — отрицательной.

Это означает, что в плазме при падающем наружу давлении возможны длинноволновые нарастающие возмущения, локализованные преимущественно в областях с неблагоприятной кривизной магнитного поля.

Можно показать, что построенные нами возмущения, минимизирующие выражение W_2 (3.2) по величине $\text{div} \vec{\xi}_r$ не удовлетворяют, вообще говоря, уравнениям движения (3.3), т.е. не являются собственными колебаниями системы. Можно, однако, найти собственные колебания, близкие к построенным возмущениям. Для этого обратимся к уравнениям колебаний (3.3).

Возьмем дивергенцию от обеих частей второго уравнения ($\text{div} \vec{\xi}_r = \frac{B}{h_r} \frac{\partial}{\partial s} (\frac{\xi_r}{B})$) и введем вместо функции $\text{div} \vec{\xi}_r$ новую неизвестную y , равную

$$y = \frac{4\pi r p}{B_0^2} \frac{\text{div} \vec{\xi}_r + 2 \frac{\partial h_r}{\partial s} \xi^3}{1 + \frac{4\pi r p}{B^2}} \quad (4.1)$$

Кроме того перейдем от переменных φ, s к переменным ζ, z и воспользуемся равенством (2.5). Тогда уравнения движения (3.3) записываются в форме:

$$-\omega^2 \frac{4\pi r p}{B_0^2} \left\{ \left(\frac{B_0^2}{4\pi r p} + \frac{B_0^2}{B^2} \right) y + 2 \frac{B_z}{r B^2} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \xi^3 \right\} = B_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_z}{B^2} \frac{\partial y}{\partial z} \right) \quad (4.2)$$

$$-\omega^2 \frac{4\pi r p}{B_0^2} \xi^3 = \frac{r^2 B^2 B_z}{B_0^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{B_z}{r B^2} \frac{\partial \xi^3}{\partial z} \right] + 2 r B_z \frac{\partial \alpha}{\partial z} \left(y + \frac{4\pi r p}{B_0^2 B_m} \frac{d\varphi}{dz} \xi^3 \right) \quad (4.3)$$

Эта система уравнений для y и ξ^3 с периодическими по ζ коэффициентам. Ее решение мы можем искать поэтому в виде:

$$\xi^3 = A(r) B_0 v(r, z) e^{ikz}, \quad y = A(r) u(r, z) e^{ikz}$$

где u и v — периодические функции z с периодом l . Система (4.2-3) решается с помощью разложения всех величин по степеням ζ (мы ограничимся членами второго порядка).

Заметим предварительно следующее. Сравнение в выражении (3.2) для потенциальной энергии положительного второго и дестабилизирующего третьего членов показывает, что волновое число есть величина не ниже первого порядка по ζ , а член нулевого порядка в разложении функции v не зависит от z (ведь мы ищем такие колебания, что ξ^3 почти постоянно вдоль силовой линии). Далее, сравнение в уравнении (4.3) левой части и последнего члена в правой части показывает, что квадрат частоты ω^2 есть величина второго порядка малости по ζ .

Итак, пусть разложения функций u и v таковы:

$$v = 1 + v_1 + v_2 + \dots, \quad u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

В уравнении (4.2) члены нулевого порядка дают (все величины, характеризующие магнитное поле, были найдены в разделе 2):

$$\frac{d}{dz} \left(f \frac{du_0}{dz} \right) = 0$$

и из условия периодичности u_0 ($u_0(l) = u_0(0)$) следует $u_0 = \text{const}$.

Члены первого порядка по ζ имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[f \left(iku_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right] = 0$$

и снова вследствие периодичности u_1 , находим

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = iku_1 \left(\frac{1}{f} \left\langle \frac{1}{f} \right\rangle - 1 \right)$$

Аналогично во втором порядке периодичность функции u_2 позволяет найти

$$u_0 = \frac{\frac{3}{2} \frac{\omega^2}{c_A^2} \langle f^2 \rangle}{\frac{\omega^2}{c_A^2} \langle f^3 + \frac{2}{\gamma p_0} f \rangle - \left\langle \frac{k^2}{f} \right\rangle} \quad (4.4)$$

где $c_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho}$

В уравнении (4.3) члены первого порядка дают $\dot{v}_i = 0$ члены второго порядка имеют вид:

$$-\frac{\omega^2}{c_A^2} = \frac{l}{f^2} \left(-k^2 + \frac{d^2 v_z}{dz^2} \right) + \frac{r_0^2}{\sqrt{f}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{f}}{\sqrt{f}} \right) (u_0 + a)$$

Подставляя сюда u_0 (4.4), умножая обе части на f^2 и усреднения по Z , получим дисперсионное соотношение для собственных колебаний:

$$1 = \frac{k^2 + \frac{3}{2} \langle f^2 \rangle a r_0^2}{\frac{\omega^2}{c_A^2} \langle f^2 \rangle} + \frac{\frac{9}{4} \langle f^2 \rangle^2 r_0^2}{\frac{\omega^2}{c_A^2} \langle f^3 + \frac{2}{\gamma\beta_0} f \rangle - \frac{k^2}{\langle \frac{1}{f} \rangle}} \frac{1}{\langle f^2 \rangle} \quad (4.5)$$

При $k=0$ условие $\omega^2 > 0$ совпадает, естественно, с условием (3.9) устойчивости желобковых возмущений. Уравнение (4.5) квадратное относительно величины $\frac{\omega^2}{c_A^2}$ и имеет два положительных корня при условии

$$-\frac{3}{4} \langle f^2 \rangle \beta_0 \frac{d \ln p}{d \ln r_0} < k^2$$

Таким образом, при растущем наружу давлении плазма устойчива.

Если же давление плазмы падает к периферии, то для длинноволновых возмущений, при

$$k^2 < k_0^2 \equiv -\frac{3}{4} \langle f^2 \rangle \beta_0 \frac{d \ln p}{d \ln r_0} \quad (4.6)$$

один из корней уравнения (4.5) отрицателен, что соответствует неустойчивости.

В системе, ограниченной проводящими торцами, ввиду граничного условия $\dot{v}_i = 0$ на торцах, значения волновых чисел огра-

ничены снизу величиной $k_{\min} \approx \frac{\pi}{Nl}$. Поэтому при выполнении условия

$$-\frac{3}{4} \langle f^2 \rangle \beta_0 \frac{d \ln p}{d \ln r_0} < \left(\frac{\pi}{Nl} \right)^2 \quad (4.7)$$

система будет устойчива (стабилизирующий эффект проводящих торцов [4]).

Если плазма устойчива относительно желобковых возмущений, т.е. если выполняется неравенство (3.10), то условие стабилизации торцами имеет вид:

$$N \leq \frac{\pi}{\langle f^2 \rangle l r_0} \sim \frac{l}{r_0} \quad \text{при } \beta \gg 1,$$

$$N \leq \frac{\pi}{\sqrt{\gamma\beta_0} \langle f^2 \rangle l r_0} \sim \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \frac{l}{r_0} \quad \text{при } \beta \ll 1.$$

Рассмотрим теперь случай, когда давление падает более круто, чем в (3.10). Максимальное изменение давления в случае больших β $|\frac{\Delta p}{p}| \leq \frac{1}{\beta}$, а в случае малых β — $|\frac{\Delta p}{p}| \leq 1$.

Условие (4.7) тогда принимает вид:

$$N \leq \frac{2\pi}{3l\sqrt{\langle f^2 \rangle}} \sim 1 \quad \text{при } \beta \gg 1$$

$$N \leq \frac{2\pi}{3\sqrt{\beta_0} l \sqrt{\langle f^2 \rangle}} \sim \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \quad \text{при } \beta \ll 1$$

Поскольку для продольного удержания плазмы необходимо большое число пробкетронов [1,2], то как видно из приведенных условий в плазме высокого давления ($\beta \gg 1$), стабилизация торцами, вообще говоря, отсутствует.

Эффект вмороженности силовых линий в проводящие торцы является единственным стабилизирующим эффектом. Если условие (4.7) не выполняется, то плазма в гофрированном поле всегда неустойчива (при падающем давлении). Инкремент неустойчи-

вести обращается в нуль при $k = k_0$ (4.6) и, если устойчивы желобковые возмущения (3.10), при $k = 0$.

Анализ дисперсионного уравнения (4.5) показывает, что при выполнении условия

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r_0} < \frac{3 \langle f^2 \rangle r_0^2}{\beta \langle f^3 + \frac{2}{\gamma \beta} f \rangle} \left(1 + \frac{\langle f^2 \rangle l^2}{\langle \frac{1}{f} \rangle \langle f^3 + \frac{2}{\gamma \beta} f \rangle} \right) \quad (4.8)$$

совпадающего по порядку величины с условием (3.10), максимум инкремента достигается при k_{ext} в промежутке $0 < k_{ext} < k_0$ (точное выражение для k_{ext} довольно громоздкое). Максимальный инкремент при $\beta \gg 1$ равен

$$\gamma \approx \frac{1}{4} \frac{C_A}{l} \beta \left| \frac{d \ln p}{d \ln r_0} \right| \frac{l}{r_0} \leq \frac{C_A}{l} \frac{r_0}{l} \quad (4.9)$$

Если давление падает более круто, чем в (4.8), то максимальным инкрементом обладают желобковые колебания с $k=0$ (или для конечной системы с $k_{min} \approx \frac{\pi}{Nl}$):

$$\gamma(k=0, \beta \gg 1) = \frac{1}{2} \frac{C_A}{l} \sqrt{\frac{3 l^2 \langle f^2 \rangle}{\langle f^2 \rangle} \left[\beta \left| \frac{d \ln p}{d \ln r_0} \right| - \frac{3 \langle f^2 \rangle l^2}{\langle f^3 \rangle} \right]}$$

Если градиент давления существенно больше критического (4.8), то максимальный инкремент равен:

$$\gamma \sim \frac{C_A}{l} \sqrt{\beta \left| \frac{d \ln p}{d \ln r_0} \right|} \leq \frac{C_A}{l} \quad (4.10)$$

5. Влияние вязкости на неустойчивость

Рассмотрим теперь влияние сил вязкого трения на колебания плазмы высокого давления ($\beta \gg 1$). Считая плазму замагниченной, учтем в уравнениях движения только продольную ионную вязкость. Тогда уравнение колебаний (1.1) примет вид

$$-\omega^2 \rho \vec{\xi}_\alpha + \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = -(\hat{K} \vec{\xi})_\alpha \quad (5.1)$$

где тензор вязких натяжений равен [11]:

$$\pi_{\alpha\beta} = 3i\omega\eta_0 \left(h_\alpha h_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) \left(\vec{h} (\vec{h} \nabla) \vec{\xi} - \frac{1}{3} \text{div} \vec{\xi} \right)$$

здесь \vec{h} - единичный вектор в направлении магнитного поля, $\eta_0 = \frac{\mu T}{v_i}$ - коэффициент вязкости ионов, v_i - ионная частота кулоновских столкновений.

Предположим далее, что инерционными членами можно пренебречь по сравнению с вязкими. Это справедливо при условии

$$|\gamma_{vis}| \ll |\gamma_{ug}| \quad (5.2)$$

где γ_{ug} - инкремент неустойчивости для идеальной плазмы, а γ_{vis} инкремент, вычисленный с пренебрежением инерционными членами.

Умножив обе части уравнения (5.1) скалярно на $\vec{\xi}$ и проинтегрировав по объему, получим:

$$\frac{3}{2} i\omega \int \eta_0 \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial s} + \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} \xi^\alpha - \frac{1}{3} \text{div} \vec{\xi} \right)^2 dV = W \quad (5.3)$$

где W (см. (1.3)) - потенциальная энергия колебаний. Из равенства (5.3) следует, что все выводы об устойчивости, сделанные выше, справедливы и при учете вязкости. Вязкое трение, если оно существенно, может привести лишь к уменьшению инкремента неустойчивости. Аналогично тому, как это делалось в третьем разделе, минимизируем выражение

$$W - \frac{3}{2} i\omega \int \eta_0 \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial s} + \frac{\partial h_s}{\partial \varphi} \xi^\alpha - \frac{1}{3} \text{div} \vec{\xi} \right)^2 dV$$

по величине $\frac{m\tilde{\xi}_0}{z}$. Тогда равенство (5.3) приводится к виду

$$\frac{3}{2} i\omega\eta \left(\frac{\partial \tilde{\xi}_n}{h_s \partial s} + \frac{\partial h_s}{h_s \partial \varphi} \tilde{\xi}^3 \right)^2 \frac{h_s ds d\varphi}{B} = W_i \quad (5.4)$$

W_i см. (3.2),

а уравнения колебаний записываются следующим образом:

$$3i\omega\eta \frac{\partial h_s}{h_s \partial \varphi} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}_n}{h_s \partial s} + \frac{\partial h_s}{h_s \partial \varphi} \tilde{\xi}^3 \right) = -\frac{B}{4\pi h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{r^2 B} \frac{\partial \tilde{\xi}^3}{h_s \partial s} \right] + \quad (5.5)$$

$$+ \frac{B^2}{4\pi} \left[\operatorname{div} \vec{\xi}_n + 2 \frac{\partial h_s}{h_s \partial \varphi} \tilde{\xi}^3 \right] + 2 \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{\partial h_s}{h_s \partial \varphi} \tilde{\xi}^3$$

$$3i\omega\eta \frac{B}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}_n}{h_s \partial s} + \frac{\partial h_s}{h_s \partial \varphi} \tilde{\xi}^3 \right) \right] = \frac{\partial}{h_s \partial s} \left[\frac{B^2}{4\pi} \left(\operatorname{div} \vec{\xi}_n + 2 \frac{\partial h_s}{h_s \partial \varphi} \tilde{\xi}^3 \right) \right]$$

(здесь учтено условие $\beta \gg 1$).

Решения снова ищем в классе возмущений, таких, что величина $\tilde{\xi}^3$ почти постоянна вдоль силовой линии:

$$\tilde{\xi}^3 = A(r_0) B_0 e^{ikz} (1 + V_1 + V_2 + \dots)$$

Из равенства (5.4) следует, что инкремент $\gamma = -i\omega$ является величиной второго, либо нулевого порядка по z_0 .

В первом случае разложение величины $\tilde{\xi}_n$ начинается с минус первого порядка по z_0 :

$$\tilde{\xi}_n = A(r_0) e^{ikz} (\tilde{\xi}_{-1} + \tilde{\xi}_0 + \dots)$$

Дисперсионное соотношение получается из уравнений (5.5) аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе:

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{v_i}{\beta} \frac{k^2}{\langle f^2 \rangle} \frac{-\frac{3}{4} \langle f^2 \rangle \beta_0 \frac{d \ln \rho}{d \ln r_0} - k^2}{\frac{9}{4} \langle f^2 \rangle^2 z_0^2 + \langle f^3 \rangle \left(k^2 + \frac{3}{4} \langle f^2 \rangle \beta_0 \frac{d \ln \rho}{d \ln r_0} \right)} \quad (5.6)$$

Если выполняется критерий устойчивости желобковых возмущений (3.11), то инкремент (5.6) положителен в интервале волновых чисел

$$0 < k^2 < k_0^2 \equiv -\frac{3}{4} \langle f^2 \rangle \beta_0 \frac{d \ln \rho}{d \ln r_0}$$

и достигает максимума

$$\gamma \sim v_i \left| \frac{d \ln \rho}{d \ln r_0} \right| \leq \frac{v_i}{\beta} \frac{z_0^2}{l^2} \quad (5.7)$$

Сравнение "вязкого" инкремент (5.7) с инкрементом (4.9) для идеальной плазмы показывает, что вязкость существенна, если (5.1)

$$1 \ll \sqrt{\beta} \frac{\lambda}{z_0} \quad (5.8)$$

где λ — длина свободного пробега частиц.

Если условие (3.11) не выполняется, то, как следует из (5.6), неустойчивость развивается при волновых числах

$$\frac{3}{4} \langle f^2 \rangle \left(-\beta_0 \frac{d \ln \rho}{d \ln r_0} - \frac{3 \langle f^2 \rangle z_0^2}{\langle f^3 \rangle} \right) \equiv k_1^2 < k^2 < k_0^2$$

Однако вблизи k_i выражение (5.6) неприменимо (знаменатель обращается в нуль). Последовательный учет следующих членов разложения в уравнениях (5.5) показывает, что при $k=k_i$ инкремент обращается в нуль, а вблизи k_i имеет резкий максимум

$$\gamma \sim \frac{\nu_i}{\beta} k_i l$$

При больших градиентах давления

$$\gamma \sim \frac{\nu_i}{\beta} \sqrt{\beta_0 \left| \frac{d \ln p}{d \ln r_0} \right|} \leq \frac{\nu_i}{\beta} \quad (5.9)$$

Рассмотрим теперь случай, когда инкремент γ является величиной нулевого порядка по r_0 . Тогда разложение величины ξ_{ii} начинается также с нулевого порядка:

$$\xi_{ii} = A(r_0) e^{ikz} (\xi_0 + \xi_1 + \dots)$$

При этом система уравнений (5.5) приводится к виду (оставлены только главные члены):

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{i\omega}{\nu_i} \beta_0 f^{3/2} (\sqrt{f}) \left[\ddot{\xi}_0 - f^{1/2} (\sqrt{f}) \ddot{\xi}_0 \right] &= \frac{1}{r_0^2} (-k^2 + \ddot{V}_2) + \\ &+ f^{3/2} (\sqrt{f}) \left\{ \frac{\beta_0}{r_0^2} \frac{d \ln p}{d \ln r_0} + \frac{2}{f^2} \left[\frac{1}{f} (f \dot{\xi}_0) - 2 f^{1/2} (\sqrt{f}) \right] \right\} \quad (5.10) \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2} \frac{i\omega}{\nu_i} \beta_0 \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial z} \left[f \dot{\xi}_0 - f^{3/2} (\sqrt{f}) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{f} (f \dot{\xi}_0) - \frac{2}{f^{3/2}} (\sqrt{f}) \right]$$

Систему (5.10) можно решить лишь при дополнительном предположении о малости величины R^{-1} (условие слабой гофрировки). Дисперсионное соотношение имеет вид

$$-i\omega = \frac{2}{3} \frac{\nu_i}{\beta_0} \frac{1}{r_0^2 \langle f^2 (\sqrt{f})^2 \rangle} \left[-\frac{3}{4} \langle f^2 \rangle \beta_0 \frac{d \ln p}{d \ln r_0} - \frac{9}{4} \langle f^2 \rangle^2 r_0^2 - k^2 \right] \quad (5.11)$$

Инкремент (5.11) положителен для волновых чисел

$$k^2 < k_i^2$$

и только при условии, что неустойчивы желобковые возмущения ($k=0$). Они же обладают максимальным инкрементом.

Для больших градиентов давления, существенно превышающих критическое значение (3.11), инкремент неустойчивости равен

$$\gamma \sim \nu_i \frac{l^2}{r_0^2} \left| \frac{d \ln p}{d \ln r_0} \right| \leq \frac{\nu_i}{\beta} \frac{l^2}{r_{max}^2} \quad (5.12)$$

Сравнение инкремента (5.12) с аналогичным выражением (4.10) для идеальной плазмы показывает, что в этом случае вязкость существенна, если

$$l \ll \sqrt{\beta} \frac{\lambda r_{max}^2}{l^3} \quad (5.13)$$

Таким образом, в плазме высокого давления ($\beta \gg 1$) вязкость может играть значительную роль. Как следует из условий (5.8,13), на границе применимости нашего приближения ($r_{max} \sim l$) и гидродинамического приближения ($\lambda \sim l$) эффекты вязкого трения приводят к уменьшению инкремента неустойчивости в $\sim \sqrt{\beta}$ раз по сравнению со случаем идеальной плазмы.

Сравнение характерного времени развития неустойчивости $\frac{\Lambda}{\gamma}$ (Λ — кулоновский логарифм) с временем продольного расширения плазмы [1,2] $\tau_{||} \sim \frac{N^2}{\nu_i}$ показывает, что при условии $\beta > \frac{N^2}{\Lambda}$ время удержания плазмы определяется последним, а не первым.

В заключение автор благодарит Д.Д.Рютова за постановку задачи и постоянное внимание к работе, В.Д.Шафранова за полезные обсуждения и ряд ценных замечаний.

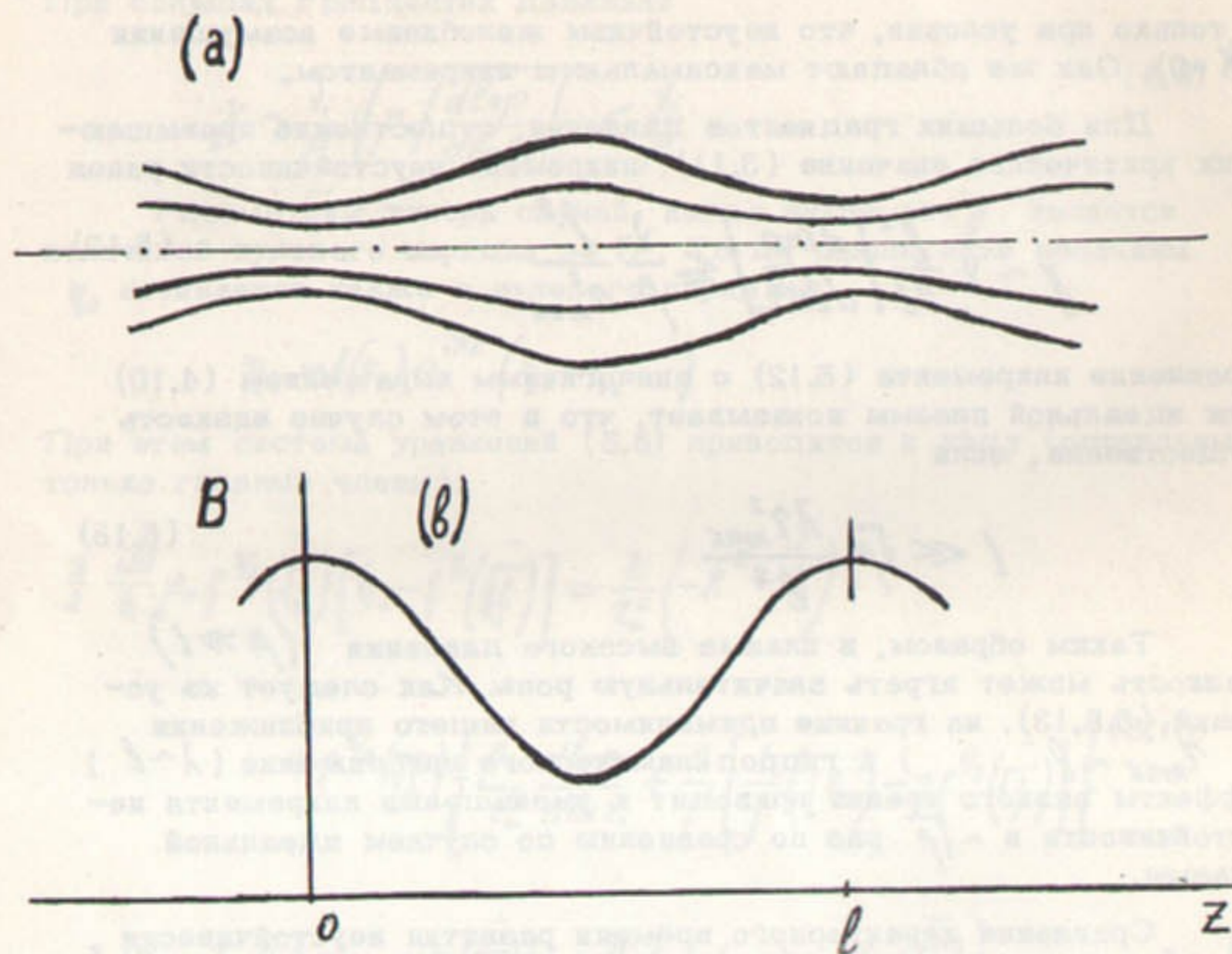


Рис. Гофрированное магнитное поле.

(а) - силовые линии;

(б) - напряженность магнитного поля на оси системы.

Литература

1. Будкер Г.И., Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Письма в ЖЭТФ 14, 5, 320 (1971).
2. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Ядерный Синтез 12, 6, 627 (1972).
3. Кадомцев Б.Б. В сб. "Вопросы теории плазмы". Вып. 2, М.Госатомиздат, 1963, стр. 132.
4. Михайловский А.Б. "Теория плазменных неустойчивостей", т.2, М.Атомиздат, 1971.
5. Bernstein I.B. et al. Proc. Roy. Soc., A244, 17 (1958).
6. Mercier C. Int. Conf. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Res., Salzburg, 1961, p.95.
7. Bineau M., Ibid., p.35.
8. Green J.M., Johnson J.L., Phys. Rev. Lett., 7, 401 (1961)
9. Соловьев Л.С. ЖЭТФ 53, 627 (1967).
10. Кадомцев Б.Б. В сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", т.1У, М., изд-во АН СССР, 1958, стр.380.
11. Брагинский С.И. В сб. "Вопросы теории плазмы". Вып.1, М., Госатомиздат, 1963, стр. 183.