ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 19 - 73

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Новосибирск
1973

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются общие ограничения, налагаемые на теорию поля требованием конформной инвариантности. Показано, что часть состояний такой теории полностью определяется в рамках конформной кинематики. Исследованы их свойства. Эти свойства таковы, что обычные требования, предъявляемые к теории поля выполняются лишь для узкого класса полей, масштабная размерность которых принимает значения $d = 2 + s + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ где s – спин. При других значениях масштабной размерности появляются состояния с отрицательными нормами, отрицательными P^2 и т.д. Рассмотрена теория, обладающая инфинитезимальной инвариантностью. Требование инфинитезимальной инвариантности ведёт к ослабленному квантованию размерности. Рассмотрены простейшие примеры конформных полей, иллюстрирующие перечисленные свойства.

CONFORMAL INVARIANCE IN THE FIELD THEORY

B.G. Konopelchenko, M.Ya. Palchik

Abstract

General restrictions on the field theory which arise from the assumption of the conformal invariance are considered. It is shown that part of the states of such theory is completely determined in the framework of the conformal kinematic. Properties of these states are investigated.

It is shown that the field theory axioms are compatible with the assumption of the conformal invariance only for the fields with discrete dimensions $d=2+S+n$, $n=0,1,2,\ldots$, (S - spin). When dimension of field has different values it appeared states with negative norms, negative ρ^2 and so on.

Field theory with infinitesimal invariance are also considered. The assumption of the infinitesimal invariance results to weaken condition of quantization of the dimension.

Simplest conformal fields, which illustrate all properties enumerated - conformal fields analogious to the free relativistic fields are considered.

1. Введение

Рассматривается математическая структура теории поля, обладающей строгой конформной инвариантностью. Конформная группа является кинематической группой в такой теории, подобно группе Пуанкаре в обычной релятивистской теории поля.

Поля в конформно-инвариантной теории классифицируются по значениям операторов Казимира конформной группы в неприводимых представлениях. Мы ограничимся рассмотрением полей, преобразующихся по вырожденным представлениям (раздел II). Эти поля характеризуются масштабной размерностью и спином. Они имеют непрерывный спектр масс. Возможны два случая: 1- $0<\rho^2<\infty$, 2- $-\infty<\rho^2<\infty$. В первом случае можно построить поля, удовлетворяющие всем обычным требованиям предъявляемым к теории поля. Однако размерность таких полей принимает только дискретные значения. Во втором случае для построения полей с нормальным спектром масс необходимо ограничиться требованием инфинитезимальной конформной инвариантности. Такие поля (они имеют определенную размерность) удовлетворяют обычным перестановочным соотношением с генераторами конформной группы, однако пространство состояний не инвариантно относительно конечных специальных конформных преобразований (разделы III и У).

Вырожденные представления, соответствующие безмассовым полям, здесь рассматриваться не будут. Безмассовые поля рассматривались в /1/.

В разделе IУ показано, что конформная инвариантность совместима с аксиомами теории поля только для дискретных значений масштабной размерности $d=2+S+n$, где S-спин, n = 0, 1, 2. В случае аномальных размерностей имеются состояния с отрицательной нормой. Причина в том, что соответствующие представления неунитарны. Кроме того часть состояний имеют отрицательные ρ^2. Если предположить инфинитезимальную инвариантность, условие квантования размерности ослабляется: скалярные поля могут иметь аномальную размерность в интервале $1<d<3$. Эти поля соответствуют унитарным представлениям непрерывной серии.

В разделе У рассмотрены простейшие конформные поля, аналогичные свободным релятивистским полям. Они имеют C-числовой коммутатор (антикоммутатор). В случае дискретных размерностей коммутатор (антикоммутатор) отличен от нуля только на световом конусе, если принять обычную связь спина и статистики. Такие поля являются обобщенными свободными полями. Поля с аномальной размерностью также локальны, если предполагать инфинитезимальную инвариантность. В противном случае вакуумные средние содержат множитель $\varepsilon(z^2)\,|z^2|^{-d}$, а коммутатор отличен от нуля вне конуса. Статистика этих полей определяется соглашением.

Рассмотрим также $2(2s+1)$ - компонентные поля. Каждому полю φ_d с размерностью d можно сопоставить сопряженное поле Z_d с размерностью $\tilde{d} = 4-d$. Оба поля преобразуются по эквивалентным представлениям (раздел II). Показано, что поля Z_d являются потенциалами для полей φ_d. Последние могут быть представлены, как ($2d-4$) - кратные производные потенциалов.

В случае безмассовых полей также можно ввести потенциалы Z_λ, преобразующиеся по сопряженным представлениям. Однако размерность потенциалов есть $\tilde{d}_0 = 2-d_0$, где $d_0 = 1+|\lambda|$ каноническая размерность. Таким образом, безмассовое поле может быть представлено в виде $2|\lambda|$ кратной производной потенциала (λ - спиральность). Потенциалы Z_λ аналогичны потенциалу Герца электромагнитного поля.

Отметим, что все результаты этой работы могут быть легко проиллюстрированы на примере двумерной теории поля [2,3]. Поэтому ряд утверждений, касающихся четырехмерного случая обсуждаются кратко.

II. Классификация полей

Конформная группа имеет три оператора Казимира. Поля классифицируются по значениям этих операторов в неприводимых представлениях. Рассмотрим поля, преобразующиеся по унитарным и действительным неунитарным представлениям. В таких представлениях операторы Казимира принимают действительные значения.

Все представления конформной группы делятся на два класса [4] : вырожденные и невырожденные. В вырожденных представлениях операторы Казимира выражаются через два параметра. В качестве таких параметров можно выбрать масштабную размерность в спин. В невырожденных представлениях спин не является инвариантом [5] , и все три оператора Казимира независимы. Поля, соответствующие этим представления бесконечнокомпонентны, и не будут рассматриваться.

Вырожденные представления различаются по спектру масс, возникающему при редукции к группе Пуанкаре. Мы будем главным образом рассматривать те представления, в которых

1. $$0 < p^2 < \infty \tag{2.1}$$

или

2. $$-\infty < p^2 < \infty \tag{2.2}$$

Во втором случае можно ограничиться областью $p^2 > 0$, если рассматривать теорию поля, инвариантную относительно инфинитезимальных преобразований (см. разделы III и У).

Имеются также представления, содержащие только пространственно-подобные импульсы

$$-\infty < p^2 < 0$$

Например, большая часть вырожденных унитарных представлений [5] . Поля, преобразующиеся по таким представлениям, бесконечно компонентны.

Выразим операторы Казимира в вырожденных представлениях через масштабную размерность d и спин s . Операторы Казимира конформной группы C_2 , C_3 , C_4 приведены в приложении I . Выбирая генераторы в вырожденных представлениях в виде

$$J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + \Sigma_{\mu\nu}),\quad P_\mu = i\partial_\mu,\quad D = -i(4-d+x_\nu\partial_\nu),$$

$$K_\mu = i(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x_\nu \partial_\nu - 2(4-d)x_\mu + 2i x_\nu \Sigma_{\mu\nu})$$

где $\Sigma_{\mu\nu}$ - спиновая матрица, находим (см. приложение 1).

$$C_2 = d^2 - 4d + \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu},$$

$$C_3 = \frac{i}{8}(2-d)\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\rho\tau},$$

$$C_4 = \frac{1}{4}\Big[d^4 - 8d^3 + 20d^2 - 16d + \frac{1}{4}(\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu})^2 + \frac{1}{16}(\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\rho\tau})^2 - (d-2)^2\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\Big].$$

Вид спиновой матрицы $\Sigma_{\mu\nu}$ зависит от конкретного выбора представления.

В случае скалярных полей ($\Sigma_{\mu\nu} = 0$) находим

$$C_2 = d(d-4), \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{1}{4}(C_2+4)C_2 \tag{2.5}$$

Заметим, что операторы Казимира (2.5) инвариантны относительно замены [7]

$$d \to 4-d \tag{2.6}$$

т.е. каждому неприводимому представлению можно сопоставить два скалярных поля: φ_d и φ_{4-d}.

Для представлений с ненулевым спином имеем

$$\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} = 4s(s+1), \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\rho\tau} = \pm 8i\,s(s+1),$$

откуда

$$C_2 = (d-2)^2 - 4 + 2s(s+1),$$

$$C_3 = \pm(d-2)s(s+1), \tag{2.8}$$

$$C_4 = \frac{1}{4}(d-2)^4 - (d-2)^2(s^2+s+1).$$

Замена (2.6) меняет знак оператора C_3. Однако можно рассмотреть $2(2s+1)$ - компонентные поля, преобразующиеся по прямой сумме представлений с двумя знаками оператора C_3. Такие суммы образуют неприводимые представления полной конформной группы с отражениями [9]. Представления полной конформной группы, соответствующие двум значениям размерности d и $\tilde{d} = 4-d$, эквивалентны. Таким образом, опять каждому значению размерности можно сопоставить два поля: φ_d и $\tilde{\varphi}_d = \varphi_{4-d}$

Серия	Операторы Казимира	Спектр операторов Казимира	Спектр масс
I.Основная непрерывная серия	$C_2 = -4-\rho^2,\ C_3 = 0,\ C_4 = \frac{1}{4}\rho^4+\rho^2$	$\rho > 0$	$-\infty < p^2 < \infty$
II.Дополнит. непрерывная серия	$C_2 = -4+\sigma^2,\ C_3 = 0,\ C_4 = \frac{1}{4}\sigma^4-\sigma^2$	$0 \le \sigma < 1$	$-\infty < p^2 < \infty$
III.Дискретная серия $\mathcal{D}^-$	$C_2 = 2(p_0-1)(p_0+2)+(\lambda_0+2)^2$ $C_3 = \pm p_0(p_0+1)(\lambda_0+2)$ $C_4 = \frac{1}{4}(\lambda_0+2)^4-(\lambda_0+2)^2(p_0^2+p_0+1)$	$p_0 = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots,$ $-\lambda_0 = p_0+2, p_0+3, \ldots$	$0 < p^2 < \infty$
IУ.Дискретная серия $\mathcal{D}^+$	$C_2 = 2(p_0-1)(p_0+2)+(\lambda_0-2)^2$ $C_3 = \pm p_0(p_0+1)(\lambda_0-2)$ $C_4 = \frac{1}{4}(\lambda_0-2)^4-(\lambda_0-2)^2(p_0^2+p_0+1)$	$p_0 = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots,$ $\lambda_0 = p_0+2, p_0+3, \ldots$	$0 < p^2 < \infty$

Таблица 1

Как показано в [2,3] на примере двумерной конформной группы, преобразование (2,6) является аналогом поднятия "индекса". Два поля φ_d и φ_{4-d} можно рассматривать, как запись поля φ_d в ко- и контравариантном базисах. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением полей с размерностью

$$d \geq 2 \tag{2.9}$$

Рассмотрим ограничения, налагаемые на размерность условием унитарности представлений. Как показано в [4], требование унитарности ограничивает спектр значений операторов Казимира. Из четырнадцати серий вырожденных унитарных представлений только четыре удовлетворяют условиям (2.1,2) [5].

Из (2.5), (2.3) и таблицы 1 находим, что масштабная размерность в основной непрерывной серии принимает комплексные значения. Для оставшихся трёх серий имеем:

Серия	Спин	Размерность	Дополнительный инвариант $\varepsilon_0 = \frac{p_0}{\lvert p_0 \rvert}$
П	$s=0$	$1<d<3$	нет
Ш $\mathcal{D}^-$	$s=0,\frac{1}{2},1,\ldots$	$d=2+s+n$, $n=0,1,2,\ldots$	− 1
1У $\mathcal{D}^+$	$s=0,\frac{1}{2},1,\ldots$	$d=2+s+n$, $n=0,1,2,\ldots$	+ 1

Таблица 2.

Отметим, что только скалярные поля могут иметь аномальную размерность. Размерность полей с ненулевым спином, соответствующих унитарным представлениям принимает дискретные значения. Поля с ненулевым спином и аномальной размерностью преобразуются по действительным неунитарным представлениям.

III. Пространство состояний

Поле, преобразующееся по неприводимому представлению конформной группы удовлетворяет перестановочным соотношениям[x)]

$$[\psi(x), J_{\mu\nu}] = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + \Sigma_{\mu\nu})\psi(x),$$

$$[\psi(x), P_\mu] = -i\,\partial_\mu\,\psi(x),$$

$$[\psi(x), K_\mu] = i(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x_\nu\partial_\nu - 2d x_\mu + 2i x_\nu\Sigma_{\mu\nu})\psi(x),$$

$$[\psi(x), \mathcal{D}] = i(d + x_\nu\partial_\nu)\psi(x), \tag{3.1}$$

где $\Sigma_{\mu\nu}$ - спиновая матрица, $J_{\mu\nu}$, P_μ, K_μ, $\mathcal{D}$ - генераторы группы.

Введём нормированный вакуум $|0\rangle$

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{3.2}$$

Он преобразуется по тривиальному представлению

$$J_{\mu\nu}|0\rangle = P_\mu|0\rangle = K_\mu|0\rangle = \mathcal{D}|0\rangle = 0. \tag{3.3}$$

Пространство состояний поля $\psi(x)$ состоит из векторов $\psi^+(x)|0\rangle$, $\psi^+(x)\,\psi^+(y)\,|0\rangle$, и т.д.

---

x) Для определенности мы будем рассматривать здесь только поля, соответствующие верхнему знаку в формуле (2.8). Поля, соответствующие нижнему знаку рассмотрены в разделе У.

Рассмотрим состояния

$$\psi^{+}(x)|0\rangle \tag{3.4}$$

где $\psi(x)$ – поле, преобразующееся по представлению (d,s). Используя (3.1) и (3.3) можно показать [2], что состояния (3.4) образуют пространство неприводимого представления[x)] (d,s), каков бы ни был характер взаимодействия. Это позволяет полностью описать состояния (3.4) в рамках кинематики. Заметим, что в случае группы Пуанкаре вектор $\psi^{+}(x)|0\rangle$, где $\psi(x)$ – взаимодействующее поле, имеет проекции на состояния с различными значениями p^2, и его групповая структура задаётся динамикой теории.

По аналогии с обычными одночастичными состояниями, назовём векторы, принадлежащие пространству неприводимого представления (т.е. состояния $\psi^{+}(x)|0\rangle$) "одночастичными" конформными состояниями. Поскольку масса не является инвариантом представления, конформные состояния характеризуются пятью квантовыми числами. Можно выбрать, например, 4 – импульс p_μ и проекцию спина σ

$$|p;\sigma\rangle \equiv |p_\mu;\sigma\rangle \equiv |d,s;\, p_0,p_1,p_2,p_3;\,\sigma\rangle . \tag{3.5}$$

Заметим, что обычные одночастичные состояния характеризуются четырьмя квантовыми числами

$$|\vec{p};\sigma\rangle \equiv |m,s;\, p_1,p_2,p_3;\sigma\rangle .$$

Подчеркнем, что хотя соотношения (3.1) выражают инвариантность теории относительно инфинитезимальных преобразований конформной группы, рассматриваемая теория инварианта относительно произвольных конечных преобразований. Последнее достигается тем, что конформные состояния заполняют всё пространство представления. Имеется другая возможность. Будем сопоставлять конформные состояния только тем векторам пространства представления, которые удовлетворяют условию $p^2>0$ (в представлениях, где спектр масс $-\infty < p^2 < \infty$; например, в представлениях непрерывной серии). При этом перестановочные соотношения (3.1) по-прежнему выполняются [3], однако пространство состояний поля $\psi(x)$ не инвариантно относительно конечных специальных конформных преобразований. В этом смысле можно говорить об инвариантности теории относительно инфинитезимальных преобразований. В этом разделе мы будем предполагать, что для полей, преобразующихся по представлениям со спектром масс (2.2), имеет место инфинитезимальная инвариантность. При этом знак p_0 является дополнительным инвариантом. Таким образом, для конформных состояний с любыми размерностью и спином имеем

$$0<p^2<\infty\,, \qquad p_0>0 . \tag{3.6}$$

x) вообще говоря взятого с некоторой кратностью

Инвариантная нормировка конформных состояний находится стандартным способом

$$\langle p';\sigma'|p;\sigma\rangle = \theta(p^2)\theta(p_0)(p^2)^{d-2-s}\,\Pi^{(s)}_{\sigma\sigma'}(p)\,\delta(p-p'), \tag{3.7}$$

где

$$\Pi^{(s)}_{\sigma\sigma'}(p) = t^{\mu_1\ldots\mu_{2s}}_{\sigma\sigma'}\, p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_{2s}},$$

$t^{\mu_1\ldots\mu_{2s}}_{\sigma\sigma'}$ — $(2s+1)$ – рядная числовая матрица [10].

Генераторы конформной группы в нормировке (3.7) имеют вид

$$J_{\mu\nu}|p;\sigma\rangle = i(p_\mu\partial_\nu - p_\nu\partial_\mu)|p;\sigma\rangle + i(\Sigma_{\mu\nu})_{\sigma\tau}|p;\tau\rangle, \tag{3.8}$$

$$P_\mu|p;\sigma\rangle = p_\mu|p;\sigma\rangle,$$

$$K_\mu|p;\sigma\rangle = i(p_\mu\partial^2 - 2(p\partial)\partial_\mu - 2d\,\partial_\mu)|p;\sigma\rangle - 2(\Sigma_{\mu\nu})_{\sigma\tau}\partial_\nu|p;\tau\rangle,$$

$$D|p;\sigma\rangle = (d + p_\mu\partial_\mu)|p;\sigma\rangle .$$

Векторы (3.4) могут быть представлены в виде суперпозиции конформных состояний (3.5)

$$\psi^+_\sigma(x)|0\rangle = \int d^4p\, e^{-ipx}\theta(p^2)\theta(p_0)|p;\sigma\rangle. \tag{3.9}$$

Скалярное произведение таких векторов есть инвариантная двух - точечная функция

$$\langle 0|\psi_\sigma(x)\psi^+_\tau(y)|0\rangle = W_{\sigma\tau}(x-y), \tag{3.10}$$

где

$$W_{\sigma\tau}(z) = \int d^4p\, \theta(p^2)\theta(p_0)(p^2)^{d-2-s}\,\Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(p)\,e^{-ipz} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\, 2^{2(d-2-s)}\,\Gamma(d-s-1)\cdot\Gamma(d-s)\,\times \tag{3.11}$$

$$\times\, \Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(i\partial)\,(z^2-i\varepsilon z_0)^{-(d-s)}$$

Вычисление $W(z)$ приведено в приложении II.

Рассмотрим далее, состояния

$$\psi^+(x)\psi^+(y)|0\rangle \tag{3.12}$$

В отличие от (3.4) они имеют проекции на векторы из разных неприводимых представлений конформной группы. Спектр размерностей d и спинов s, содержащихся в (3.122), задается динамикой теории. Однако проекция на любое заданное неприводимое представление

$$\langle p,\sigma'; d',s'|\psi^+_{d,s,\sigma}(x)\,\psi^+_{d,s,\tau}(y)|0\rangle \tag{3.13}$$

определяется кинематикой и может быть найдена из (3,1,3,7). Фурье-образ (по импульсу) от (3.13) является инвариантным трехточечником. Последний, как известно [11], определяется конформной симметрией с точностью до коэффициентов. В теориях, где кроме поля $\psi_{d,s}(x)$ имеются другие поля $\psi_{d',s'}(x)$ Фурье-образ от (3.13) может быть представлен в виде

$$\langle 0|\psi_{d',s'}(z)\,\psi^+_{d,s}(x)\,\psi^+_{d,s}(y)|0\rangle$$

Среди представлений (d', s'), дающих вклад в (3.12) может содержаться и представление (d, s). Но из этого не следует, что соответствующий трехточечник отличен от нуля (даже если поле $\psi_{d,s}(x)$ нейтрально), т.к. векторы (3.4) и (3.9) могут быть ортогональны в силу конкретного устройства динамики. Пример такой теории рассмотрен в разделе У.

Аналогичным образом можно рассмотреть векторы $\psi^+(x)\psi^+(y)\psi^+(z)|0\rangle$ и т.д. Для этого удобно перейти от перестановочных соотношений (3.1) к уравнениям для вакуумных средних полей [12]. Ограничения, налагаемые на них требованием конформной симметрии общеизвестны [11].

1У. Квантование размерности

Часть состояний поля $\psi(x)$ (конформные состояния (3.4) или (3.9) полностью определяются кинематикой теории. Рассмотрим, при каких условиях их свойства совместимы с аксиомами теории поля. Мы будем рассматривать теорию, инвариантную относительно произвольных конформных преобразований.

1. Положительность нормы.

Инвариантная метрика конформных состояний дается формулами (3.6). Она является метрикой пространства неприводимого представления. Вообще, в пространстве неприводимого представления может быть введена инвариантная метрика лишь тогда, когда операторы Казимира в этом представлении имеют действительные значения [13]. Это возможно в двух случаях:

а) унитарные представления: инвариантная метрика положительно определена;

б) действительные неунитарные представления. Инвариантная метрика существует, но не положительно определена [13] .

Применительно к конформной группе эти утверждения подробно рассмотрены в [2] для двумерного пространства – времени.

В пространстве представления конформной группы можно выбрать вместо (3,5), дискретный базис [4,5] . Этот базис состоит из собственных векторов максимальной компактной подгруппы ($SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1)$). Рассмотрение полей в этом базисе, делает более наглядным утверждение об индефинитности метрики и проведено в [2,3] для конформных полей в двумерном пространстве-времени. Аналогичные вычисления в четырехмерном случае сложнее, но результат очевиден. Поэтому мы ограничимся рассмотрением конформных состояний в импульсном базисе.

В этом случае неприводимые неунитарные представления реализуются в пространстве функций $f(p)$, сингулярных в нуле. Сингулярность такова, что интегралы, выражающие инвариантные скалярные произведения

$$\int d^4p\, \mu(p)\, f^*(p)\, f(p) \tag{4.1}$$

не положительно определены. Например, в случае скалярного поля имеем [5] при $p \to 0$

$$\mu(p)\, |f(p)|^2 \sim |\vec{p}|^{2(\sigma-2)} |\varphi(p)|^2$$

где $\sigma = \pm(d-2)$, $\varphi(p)$ – произвольная функция, конечная в нуле и убывающая на бесконечности. Интеграл (4.1) положителен для всех основных функций $\varphi(p)$ если

$$0 \le \sigma < 1 \qquad \text{или} \qquad 1 < d < 3$$

что соответствует унитарным представлениям. Вне этого интервала интеграл (4.1) не положителен для некоторых основных функций [14] .

2. Спектральность.

В случае полей, образующихся по действительным неунитарным представлениям, а также унитарным представлениям непрерывной серии, спектр масс конформных состояний есть[x)]

$$-\infty < p^2 < \infty \tag{4.2}$$

Состояния полей, соответствующих унитарным представлениям дискретных серий имеют спектр масс

$$0 < p^2 < \infty \tag{4.3}$$

Таким образом, для полей с аномальной размерностью (не равной значениям из дискретной серии) не выполняются обычные требования, предъявляемые к теории поля:

1. Имеются состояния с отрицательной нормой
2. Имеются состояния с мнимыми массами – $p^2 < 0$.

Подчеркнем, что этот вывод имеет общий характер и не зависит от конкретного устройства взаимодействия.

Указанные трудности не возникают лишь для значений размерности, соответствующих представлениям дискретных серий. Таким образом, требование совместимости конформной инвариантности (относительно конечных преобразований) с аксиомами теории поля приводит к квантованию размерности

$$d = 2 + s + n \tag{4.4}$$

В теориях, где размерность зависит от константы связи, это ведет к квантованию заряда. Например, в модели Тирринга [2,3] .

Рассмотрим теорию поля, инвариантную относительно инфинитезимальных преобразований. В этом случае спектр масс ограничен областью (4.3) для всех полей. В частности, допустимы скалярные поля, преобразующиеся по унитарным представлениям непрерывной серии. Таким образом, требование инфинитезимальной

---

x) Спектр масс унитарных представлений найден в [5] . Вопрос о спектре масс в действительных неунитарных представлениях с ненулевым спином требует дополнительного исследования. Заметим,однако, что аналогичные представления конформной группы в двумерном пространстве-времени [15,2] имеют спектр масс (4.2).

конформной инвариантности ведет к ослабленному квантованию размерности:

а) для скалярного поля

$$1<d<3 \quad \text{или} \quad d=2+n, \quad n=1,2,\ldots$$

б) для полей с ненулевым спином размерность по-прежнему определяется формулой (4.4).

У. "Свободные" конформные поля

Рассмотрим простейшие примеры конформных полей $\psi(x)$ подобных свободным релятивистским полям. Векторы $\psi^{+}(x)|0\rangle$ определяемые кинематикой, аналогичны одночастичным состояниям. Определим векторы $\psi^{+}(x)\,\psi^{+}(y)\,|0\rangle$ и т.д. по аналогии с n -частичными состояниями свободных релятивистских полей. Тогда пространство состояний поля $\psi(x)$ состоит из векторов

$$|p_1,\sigma_1;\,p_2,\sigma_2;\ldots;p_n,\sigma_n\rangle = \tag{5.1}$$
$$= S\left\{|p_1,\sigma_1\rangle\otimes|p_2,\sigma_2\rangle\otimes\ldots\otimes|p_n,\sigma_n\rangle\right\}$$

где $|p,\sigma\rangle$ - "одночастичное" конформное состояние, знак S означает симметризацию или антисимметризацию в зависимости от статистики.

Аналогичные поля в двумерном пространстве-времени подробно рассмотрены в [3]. Здесь мы ограничимся кратким описанием основных этапов построения полей.

Пусть $|0\rangle$ - вакуумное состояние, определенное формулами (3.3.3). Введем операторы рождения $a^{+}_{\sigma}(p)$ и уничтожения $a_{\sigma}(p)$ конформных состояний

$$a_{\sigma}(p)|0\rangle = 0, \quad a^{+}_{\sigma}(p)|0\rangle = |p,\sigma\rangle. \tag{5.2}$$

С учетом инвариантной нормировки (3.7) перестановочные соотношения имеют вид

$$\left\{a_{\sigma}(p),\, a^{+}_{\tau}(p')\right\}_{\pm} = (p^2)^{d-2-s}\,\Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(p)\,\delta^{(4)}(p-p'), \tag{5.3}$$

где знак $\pm$ выбирается в соответствии со статистикой, матрица $\Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(p)$ определена в (3.7). Состояния (5.1) имеют вид

$$|p_1,\sigma_1;\ldots;p_n,\sigma_n\rangle = a^{+}_{\sigma_1}(p_1)\ldots a^{+}_{\sigma_n}(p_n)\,|0\rangle. \tag{5.4}$$

Из (3.8) и (5.1, 2.4) нетрудно найти перестановочные соотношения операторов $a_{\sigma}(p)$ и $a^{+}_{\sigma}(p)$ с генераторами конформной группы.

Если импульсы конформных состояний ограничены условием $p^2>0$, появляется дополнительный инвариант $\varepsilon(p_0)$

Это позволяет ввести еще пару операторов рождения и уничтожения $b^{+}_{\sigma}(p)$ и $b_{\sigma}(p)$, аналогичных операторам рождения и уничтожения античастиц. Они удовлетворяют соотношениям, подобным (5.2) и (5.3). В нормировке (5.2) операторы $a_{\sigma}(p)$ $a^{+}_{\sigma}(p)$, $b^{+}_{\sigma}(p)$ и $b_{\sigma}(p)$ связаны с полями $\psi_{\sigma}(x)$ и $\psi^{+}_{\sigma}(x)$ Фурье-преобразованием

$$\psi_{\sigma}(x) \sim \int d^4p\,\theta(p^2)\,\theta(p_0)\left\{a_{\sigma}(p)\,e^{-ipx} + b^{+}_{\sigma}(p)\,e^{ipx}\right\} \tag{5.5}$$

Заметим, что структура полей $\psi_{\sigma}(x)$ полностью определяется их трансформационными свойствами относительно преобразований группы Пуанкаре и растяжений. При этом перестановочные соотношения (3.1) полей $\psi_{\sigma}(x)$ с генераторами K_{μ} выполняются автоматически.

Рассмотрим конкретные поля.

1. <u>Дискретная серия</u> (унитарные представления)

Масштабная размерность полей, преобразующихся по пред - ставлениям дискретной серии принимает дискретные значения $d=2+s+n$, где $n = 0,1 \ldots$ Каждому значению масштабной размерности и спина можно сопоставить два поля в соответствии с двумя знаками оператора Казимира C_3. Согласно (2.47) эти поля различаются трансформационными свойствами при лоренцевых преобразованиях. Одно поле преобразуется по пред - ставлению $(s, 0)$ группы Лоренца, другое – по представлению $(0, s)$. Имеем [8] :

$$(s,0) \ : \qquad \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\rho\tau} = i8s(s+1). \tag{5.6}$$

$$(0,s) \ : \qquad \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\rho\tau} = -8is(s+1). \tag{5.7}$$

Пусть $\psi_\sigma(x)$ – поле, преобразующееся по представлению дискретной серии (d, s) и соответствующее значению $C_3 = (d-2)s(s+1)$; $\chi_\sigma(x)$ – поле, соответствующее значению $C_3 = -(d-2)s(s+1)$.

Рассмотрим поле $\psi_\sigma(x)$. Согласно разделу III и (5.1) все состояния этого поля имеют положительную норму, а их – импульсы времени-подобны ($p^2 > 0$).
Нормируем конформные состояния $|p,\sigma\rangle$ условием

$$\langle p,\sigma | p',\sigma'\rangle = \delta_{\sigma\sigma'}\cdot\delta(p-p'). \tag{5.8}$$

В такой нормировке имеем, вместо (5.3)

$$\{a_\sigma(p), a^+_{\sigma'}(p')\}_\pm = \delta_{\sigma\sigma'}\cdot\delta(p-p'). \tag{5.9}$$

Рассмотрим трансформационные свойства операторов $\psi_\sigma(x)$ и $a_\sigma(p)$. Для поля $\psi_\sigma(x)$ имеем

$$\mathcal{U}[\Lambda,a]\,\psi_\sigma(x)\,\mathcal{U}^{-1}[\Lambda,a] = \mathcal{D}^{(s)}_{\sigma\tau}[\Lambda^{-1}]\,\psi_\tau(\Lambda x+a),$$

$$\mathcal{U}[\lambda]\,\psi_\sigma(x)\,\mathcal{U}^{-1}[\lambda] = \lambda^d\,\psi_\sigma(\lambda x). \tag{5.10}$$

Найдем закон преобразования конформных состояний. При лоренцевых преобразованиях они ведут себя, как состояния свободной частицы с массой $\sqrt{p^2}$. Используя результат работы [10], и учитывая нормировку (5.8), находим

$$\mathcal{U}[\Lambda]\,|p,\sigma\rangle = \mathcal{D}^{(s)}_{\sigma\tau}[L^{-1}(\overrightarrow{\Lambda p})\Lambda L(\vec p)]\,|\Lambda p,\tau\rangle, \tag{5.11}$$

где $L(\vec p)$ – буст, соответствующий массе $\sqrt{p^2}$,
$\mathcal{D}^{(s)}_{\sigma\tau}(R)$ – $(2s+1)$ –рядное унитарное представление группы $SO(3)$. Закон преобразования при растяжениях есть

$$\mathcal{U}(\lambda]\,|p,\sigma\rangle = \lambda^{-2}\,|\lambda^{-1}p,\sigma\rangle. \tag{5.12}$$

Используя (5.1) (5.4) и (5.11, 12) находим

$$\mathcal{U}[\Lambda,\lambda]\,a_\sigma(p)\,\mathcal{U}^{-1}[\Lambda,\lambda] = \lambda^{-2}\,\mathcal{D}^{(s)}_{\sigma\sigma'}[L^{-1}(\vec p)\Lambda^{-1}L(\overrightarrow{\Lambda p})]\,a_{\sigma'}(\lambda^{-1}\Lambda p). \tag{5.13}$$

Взяв эрмитово сопряжение от (5.13), получим

$$\mathcal{U}[\Lambda,\lambda]\,a^+_\sigma(p)\,\mathcal{U}^{-1}[\Lambda,\lambda] = \lambda^{-2}\{C\,\mathcal{D}^{(s)}[L^{-1}(\vec p)\Lambda^{-1}L(\overrightarrow{\Lambda p})]\,C^{-1}\}_{\sigma\sigma'}\,a^+_{\sigma'}(\lambda^{-1}\Lambda p). \tag{5.14}$$

где C $-(2s+1)$ -рядная матрица, такая что

$$C\mathcal{D}^{(s)}(R)C^{-1}=\overset{*}{\mathcal{D}}{}^{(s)}(R)$$

При обычной реализации генераторов вращений имеем [10] :

$$C_{\sigma\sigma'}=(-1)^{s+\sigma}\delta_{\sigma,-\sigma'}$$

Операторы рождения $b^{+}_{\sigma}(p)$ и уничтожения $b_{\sigma}(p)$ имеют такие же трансформационные свойства.

Сравнивая (5.10) и (5.13, 14) находим для поля $\psi_{\sigma}(x)$:

$$\psi_{\sigma}(x)=\psi^{(+)}_{\sigma}(x)+\psi^{(-)}_{\sigma}(x) \tag{5.15}$$

где

$$\psi^{(+)}_{\sigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4p\,\theta(p^2)\theta(p_0)(p^2)^{\frac{d-2}{2}}\mathcal{D}^{(s)}_{\sigma\sigma'}[L(\vec{p})]a_{\sigma'}(p)e^{-ipx}, \tag{5.16}$$

$$\psi^{(-)}_{\sigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4p\,\theta(p^2)\theta(p_0)(p^2)^{\frac{d-2}{2}}\{\mathcal{D}^{(s)}[L(\vec{p})]C^{-1}\}_{\sigma\sigma'}b^{+}_{\sigma'}(p)e^{ipx}, \tag{5.17}$$

где $\mathcal{D}^{(s)}[L(\vec{p})]$ $-(2s+1)$-рядное представление "буста".

Аналогично, для поля $\chi_{\sigma}(x)$ имеем

$$\chi_{\sigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4p\,\theta(p^2)\theta(p_0)(p^2)^{\frac{d-2}{2}}\times \tag{5.18}$$

$$\times\{\mathcal{D}^{(s)}_{\sigma\sigma'}[L(-\vec{p})]a_{\sigma'}(p)e^{-ipx}+(-1)^{2s}(\mathcal{D}^{(s)}[L(-\vec{p})]C^{-1})_{\sigma\sigma'}b^{+}_{\sigma'}(p)e^{ipx}\}.$$

Найдем перестановочные соотношения для поля $\psi_{\sigma}(x)$. Имеем

$$\{\psi_{\sigma}(x),\psi^{+}_{\tau}(y)\}_{\pm}=\frac{1}{i}\Delta^{d,s}_{\sigma\tau}(x-y),$$

где

$$\Delta^{d,s}_{\sigma\tau}(z)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\theta(p^2)\theta(p_0)(p^2)^{d-2-s}\times \tag{5.19}$$

$$\times\,\Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(p)\cdot\{e^{-ipz}\pm e^{ipz}\},$$

где

$$\Pi^{(s)}(p)=(p^2)^s\mathcal{D}^{(s)}[L(\vec{p})](\mathcal{D}^{(s)}[L(\vec{p})])^{+}.$$

Окончательно находим (см.приложение II).

$$\Delta^{d,s}_{\sigma\tau}(z)=\frac{2}{\pi}\Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(i\partial)(-\Box)^{d-2-s}\varepsilon(z_0)\,\delta'(z^2). \tag{5.20}$$

Перестановочная функция отлична от нуля только на световом конусе. Подчеркнем, что при вычислениях подразумевалась обычная связь между спином и статистикой. В противном случае поля нелокальны.

Перестановочная функция для полей $\chi_{\sigma}(x)$ получается из (5.20) заменой

$$\Pi^{(s)}(i\partial)\to\overline{\Pi}^{(s)}(i\partial)=[C\Pi^{(s)}(i\partial)C^{-1}]^{*}=\Pi^{(s)}(i\partial_0,-i\vec{\partial}).$$

Кроме $2s+1$ - компонентных полей $\psi_{\sigma}(x)$ и $\chi_{\sigma}(x)$ можно рассмотреть $2(2s+1)$ -компонентные поля

$\Phi(x)$, преобразующиеся по представлениям конформной группы с отражениями

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}.$$

Согласно (5.15) и (5.18) имеем

$$\{\psi_\sigma(x), \chi^+_\tau(y)\}_\pm = \frac{1}{i}\tilde{\Delta}_{\sigma\tau}(x-y),$$

где

$$\tilde{\Delta}_{\sigma\tau}(z) = \frac{2}{\pi}\delta_{\sigma\tau} 2^{2(d-2)}\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(2-d)}\varepsilon(z_0)\frac{\theta(z^2)}{(z^2)^d}. \quad (5.21)$$

Учитывая (5.21), находим

$$\{\varphi_{d,s}(x), \bar{\varphi}_{d,s}(y)\}_\pm = \frac{1}{i}\mathcal{D}(x-y),$$

где

$$\bar{\Phi}(x) = \Phi^+(x)\gamma^0, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

и

$$\mathcal{D}(z) = \frac{2}{\pi}\begin{pmatrix} 2^{2(d-2)}\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(2-d)}\varepsilon(z_0)\frac{\theta(z^2)}{(z^2)^d}, & (-\Box)^{d-2-s}\,\bar{\Pi}^{(s)}(i\partial)\varepsilon(z_0)\delta'(z^2) \\ (-\Box)^{d-2-s}\,\bar{\Pi}^{(s)}(i\partial)\varepsilon(z_0)\delta'(z^2), & 2^{2(d-2)}\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(2-d)}\varepsilon(z_0)\frac{\theta(z^2)}{(z^2)^d} \end{pmatrix}$$

Отметим, что для полей $\varphi_d(x)$ с целым спином коммутатор отличен от нуля только на конусе.

$$\{\varphi_d(x), \bar{\varphi}_d(y)\}_\pm = \frac{2}{\pi i}(-\Box)^{d-2-s}\varepsilon(z_0)\begin{pmatrix} -(-\Box)^{s}, & \Pi^{(s)}(i\partial) \\ \bar{\Pi}^{(s)}(i\partial), & -(-\Box)^{s} \end{pmatrix}\delta'(z^2).$$

<u>Присоединенные поля</u>

Поскольку при замене $d \to 4-d$ оператор Казимира C_3 меняет знак, полю $\psi_d(x)$ ($\chi_d(x)$) можно сопоставить поле $\tilde{\psi}_{\tilde{d}}(x)$ ($\tilde{\chi}_{\tilde{d}}(x)$) с $\tilde{d} = 4-d$:

$$\tilde{\psi}_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4p\,\theta(p^2)\theta(p_0)(p^2)^{\frac{2-d}{2}} \times \quad (5.23)$$

$$\times\{\mathcal{D}^{(s)}_{\sigma\sigma'}[L(-\vec{p})]a_{\sigma'}(p)e^{-ipx} + (-1)^{2s}(\mathcal{D}[L(-\vec{p})]C)_{\sigma\sigma'}b^+_{\sigma'}(p)e^{ipx}\}.$$

Для поля $\tilde{\psi}_\sigma(x)$

$$\{\tilde{\psi}_\sigma(x), \tilde{\psi}^+_\tau(y)\}_\pm = \frac{1}{i}Q_{\sigma\tau}(x-y),$$

где

$$Q_{\sigma\tau}(z) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\theta(p^2)\theta(p_0)(p^2)^{2-d-s}\,\bar{\Pi}_{\sigma\tau}(p)\times$$

$$\times\{e^{-ipz} \pm e^{ipz}\} = \bar{\Pi}_{\sigma\tau}(i\partial)\hat{Q}(z); \quad (5.24)$$

$$\hat{Q}(z) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\theta(p^2)\theta(p_0)(p^2)^{2-d-s}(e^{-ipz} - e^{ipz}).$$

Присоединенное поле $\tilde{\psi}_\sigma(x)$ связано с полем $\psi_\sigma(x)$ дифференцированием

$$\psi_\sigma(x) = (-\Box)^{d-2-s}\,\Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(i\partial)\tilde{\psi}_\tau(x),$$

и эти поля взаимно локальны

$$\{\varphi_\sigma(x), \tilde{\varphi}^+_\tau(y)\}_\pm = \frac{2}{\pi i}\,\varepsilon(x_0-y_0)\,\delta'((x-y)^2)\,\delta_{\sigma\tau}.$$

Аналогично можно построить присоединенное поле $\tilde{\chi}_\sigma(x)$ и $2(2s+1)$ -компонентные присоединенные поля.

В случае безмассовых полей оператор Казимира C_3 меняет знак при замене $d \to 2-d$. Каждому безмассовому полю $\psi(x)$ можно сопоставить присоединенное поле $Z(x)$ с размерностью $\tilde{d} = 2-d = 1-|\lambda|$. ($\lambda$ -спиральность). Поле $\psi(x)$ может быть представлено в виде $2|\lambda|$ кратной производной потенциала $Z(x)$.

2. Поля с аномальной размерностью (унитарные и действительные неунитарные представления.

а) Рассмотрим скалярные поля. Они преобразуются по представлениям непрерывной серии. Размерность принимает любые (кроме дискретных) значения. Если потребовать инвариантности теории относительно конечных конформных преобразований, то состояния $|p,\sigma\rangle$ имеют спектр масс (2.2). Положим поэтому

$$[a(p), a(p')] = |p^2|^{d-2}\,\delta^{(4)}(p-p'), \qquad (5.21)$$

Для поля $\varphi_d(x)$ имеем

$$\varphi_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4p\, a(p)\, e^{-ipx} \qquad (5.22)$$

Учитывая (5.21) находим ($d \neq 2$)

$$[\varphi_d(x), \varphi_d^+(y)] = \frac{1}{i}\Delta_d(x-y), \qquad (5.23)$$

где

$$\Delta_d(z) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\, |p^2|^{d-2} e^{-ipz} =$$

$$= -\frac{2^{2d-3}}{(2\pi)^2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi d}{2}\,\varepsilon(z^2)\cdot\frac{1}{|z^2|^d}$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x>0 \\ -1, & \text{при } x<0 \end{cases}$$

Отметим, что для выбора бозе - статистики нет никаких теоретико-групповых оснований. Статистика определяется соглашением.

Согласно разделу II, каждому полю $\varphi_d(x)$ с размерностью d можно сопоставить поле $\tilde{\varphi}(x)$ с размерностью $\tilde{d} = 4-d$

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4p\, |p^2|^{2-d} a(p)\, e^{-ipx} \qquad (5.24)$$

Поля $\varphi_d(x)$ и $\tilde{\varphi}_d(x)$ преобразуются по эквивалентным представлениям. Имеют место соотношения

$$\varphi_d(x) = \int d^4y\, \frac{1}{i}\Delta_d(x-y)\,\tilde{\varphi}_d(y) \qquad (5.25)$$

$$[\varphi_d(x), \tilde{\varphi}_d^+(y)] = \delta^{(4)}(x-y). \qquad (5.26)$$

Вакуумные средние полей $\langle 0|\varphi_d(x)\,\tilde{\varphi}_d(y)|0\rangle = \frac{1}{i}\Delta_d(x-y)$ не имеют обычных аналитических свойств: они содержат множитель $\varepsilon(z^2)\,|z^2|^{-d}$. Это связано с наличием отрицательных p^2 в спектре масс конформных состояний. Аналогичная ситуация в случае полей с произвольным спином и аномальной размерностью.

Для того, чтобы построить поля с обычными свойствами, необходимо ограничиться требованием инвариантности теории относительно специальных конформных преобразований. Ограничим спектр масс конформных состояний $|p\rangle$ условием $p^2 > 0$.

Тогда вместо (5.21) имеем

$$[a(p),\, a^+(p')] = (p^2)^{d-2}\,\theta(p^2)\,\theta(p_0)\;\delta(p-p') \qquad (5.27)$$

Хотя конечные специальные конформные преобразования нарушают условие $p^2>0$, перестановочные соотношения операторов $a(p)$ с генераторами K_μ совместимы с этим условием. Поэтому поле $\varphi^{(+)}(x) \cong \int d^4p\,\theta(p^2)\,\theta(p_0)\,a(p)\,e^{-ipx}$ удовлетворяет соотношениям (3.1).

б) Рассмотрим поля с произвольным спином s и аномальной размерностью $d \neq 2+s+n$. Пусть $\psi_\sigma(x)$ – поле соответствующее значению (5.6) оператора C_3. Имеем

$$\psi_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4p\,\theta(p^2)\,\theta(p_0)\left\{a_\sigma(p)\,e^{-ipx} + b^+_\sigma(p)\,e^{ipx}\right\}, \qquad (5.28)$$

где операторы $a_\sigma(p)$ и $b^+_\sigma(p)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (5.3).

Для полей $\psi_\sigma(x)$ находим

$$\{\psi_\sigma(x),\, \psi^+_\tau(y)\}_\pm = \frac{1}{i}\,\Delta_{\sigma\tau}(x-y), \qquad (5.29)$$

где

$$\Delta_{\sigma\tau}(z) = \frac{2}{\pi}\,2^{2(d-2-s)}\,\frac{\Gamma(d-s)}{\Gamma(2-d+s)}\,\Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(i\partial)\,\frac{\varepsilon(z_0)\,\theta(z^2)}{(z^2)^{d-s}}.$$

Аналогичные формулы для полей $\chi_\sigma(x)$ соответствующие значению (5.7) оператора C_3, получаются из (5.3) и (5.29) заменой

$$\Pi^{(s)}(i\partial) \to \overline{\Pi}^{(s)}(i\partial).$$

Отметим, что перестановочная функция (5.24) отлична от нуля только внутри светового конуса. При вычислении (5.24) предполагается обычная связь спина и статистики.

Авторы благодарны А.З.Паташинскому за научное руководство и Ю.Б.Румеру за полезные обсуждения.

Приложение 1.

Операторы Казимира конформной группы имеют вид [4]

$$C_2 = \frac{1}{2}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + K_\mu P^\mu - 4i\mathcal{D} - \mathcal{D}^2,$$

$$C_3 = \frac{1}{4}\left(W^\mu K_\mu + K_\mu W^\mu\right) - \frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau}\mathcal{D}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}_{\rho\tau},$$

$$\begin{aligned}4C_4 = {} & K_\mu K^\mu P_\nu P^\nu - 4K^\mu \mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\nu\rho}P_\rho - \\ & - 4K^\mu\mathcal{J}_{\mu\nu}P^\nu(\mathcal{D}+6i) + \frac{3}{4}\left(\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)^2 + \\ & + \frac{1}{16}\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}_{\rho\tau}\right)^2 + \\ & + \mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\left(\mathcal{D}^2 + 8i\mathcal{D} - C_2 - 22\right) - \mathcal{D}^4 - 16i\mathcal{D}^3 + \\ & + 80\mathcal{D}^2 + 128i\mathcal{D} + 36C_2 - 16iC_2\mathcal{D} - 2C_2\mathcal{D}^2\end{aligned} \qquad (\text{П.1,1})$$

где

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau}P_\nu\mathcal{J}_{\rho\tau}$$

Генераторы конформной группы в реализации (2.3) удовлетворяют соотношениям

$$\{\mathcal{J}_{\mu\nu}|x>\}_{x=0} = \Sigma_{\mu\nu}|x=0>,$$

$$\{P_\mu|x>\}_{x=0} = \{i\frac{\partial}{\partial x^\mu}|x>\}_{x=0},$$

$$\{K_\mu|x>\}_{x=0} = 0, \qquad (\text{П.1.2})$$

$$\{\mathcal{D}|x>\}_{x=0} = -i(4-d)|x=0>.$$

Поскольку операторы Казимира инвариантны относительно сдвигов, достаточно вычислить их значение в точке $x=0$.

Учитывая (П.1.2) получаем

$$\begin{aligned}\{C_2|x>\}_{x=0} = {} & \Big\{\frac{1}{2}\left(i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \Sigma_{\mu\nu}\right)\times \\ & \times\left(i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + \Sigma^{\mu\nu}\right) + i^2\big(ix^2\partial_\mu - \\ & - 2ix_\mu(x\partial) - 2i(4-d)x_\mu - 2x_\nu\Sigma_{\mu\nu}\big)i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \\ & - 4i^2(4-d+x_\nu\partial_\nu) - i^2(4-d+x_\nu\partial_\nu)^2\Big\}|x>_{x=0} = \\ = {} & \left(d^2 - 4d + \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right)|x=0>.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\{C_3|x>\}_{x=0} = \{ \frac{1}{4} [\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} i \frac{\partial}{\partial x^\nu} \times$$

$$\times (i x_\rho \partial_\nu - i x_\nu \partial_\rho + \Sigma_{\rho\tau})(i x^2 \partial_\mu - 2 i x_\mu (x\partial) -$$

$$- 2i(4-d) x_\mu - 2 x_\nu \Sigma_{\mu\nu}) + (i x^2 \partial_\mu - 2 i x_\mu (x\partial) -$$

$$- 2i(4-d) x_\mu - 2 x_\nu \Sigma_{\mu\nu}) \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} \times$$

$$\times i \frac{\partial}{\partial x^\nu} (i x_\rho \partial_\nu - i x_\nu \partial_\rho + \Sigma_{\rho\nu}) -$$

$$- \frac{1}{8} \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} i (4 - d + x\partial)(i x_\mu \partial_\nu - i x_\nu \partial_\mu + \Sigma_{\mu\nu}) \times$$

$$\times (i x_\rho \partial_\tau - i x_\tau \partial_\rho + \Sigma_{\rho\tau}) \} |x>_{x=0} =$$

$$= - \frac{i(d-2)}{8} \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma_{\rho\tau} |x=0>.$$

Соответственно для C_4

$$\{C_4|x>\}_{x=0} = \frac{1}{4} \{ \frac{3}{4} (\Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu})^2 +$$

$$+ \frac{1}{16} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma_{\rho\tau})^2 + \Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \times$$

$$\times (i^2 (4-d)^2 - 8 i^2 (4-d) - C_2 - 22) - (-i(4-d))^4 -$$

$$- 16 i (i(d-4))^3 + 80 (i(d-4))^2 + 128 i i (d-4) +$$

$$+ 36 C_2 - 16 i C_2 i (d-4) - 2 C_2 (i(d-4))^2 \} |x=0> =$$

$$= \{ \frac{1}{4} (d-2)^4 - (d-2)^2 + \frac{1}{4} (\Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu})^2 +$$

$$+ \frac{1}{16} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma_{\rho\tau})^2 -$$

$$- (d-2)^2 (\Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu})^2 \} |x=0>.$$

Приложение II

Вычислим двухточечную функцию

$$W_{\sigma\tau}(x-y) = \langle 0|\, \psi_\sigma(x)\, \psi^+_\tau(y)\, |0\rangle$$

для спина s и произвольной размерности d.

Из (3.17) имеем

$$W_{\sigma\tau}(z) = \Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(i\partial)\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\theta(p^2)\,\theta(p_0)\,(p^2)^{d-2-s}\, e^{-ipz} =$$

$$= \Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(i\partial)\, Q^+(z).$$

Интегрируя по углам получаем

$$Q^+(z) = -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty dp_0\, e^{-ip_0 z_0}\int_0^{p_0} p\,dp\,(p_0^2-p^2)^{d-2-s}\sin pr \qquad (П.II.1)$$

где $p = \sqrt{\vec{p}^{\,2}}$, $r = x_i x_i$ $(i = 1,2,3)$.

Поскольку [17]

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos zx\, dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{(\frac{z}{2})^{\nu}}\, J_\nu(z)$$

то

$$\int_0^{p_0} p\,dp\,(p_0^2-p^2)^{d-2-s}\sin pr = -2^{d-\frac{3}{2}-s}\, p_0^{d-\frac{3}{2}-s}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma(d-1-s)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^{d-\frac{3}{2}-s}}\, J_{d-\frac{3}{2}-s}(p_0 r)\right]. \qquad (П.II.2)$$

Для выполнения последнего интегрирования в (П.2) воспользу - емся формулами [17]

$$\int_0^\infty dx\, \sin(xz_0)\, x^\alpha J_\alpha(xr) = \qquad (П.II.3)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, 2^\alpha r^\alpha}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)}\, \varepsilon(z_0)\, \theta(z_0^2-r^2)\, (z_0^2-r^2)^{-\alpha-\frac{1}{2}},$$

$$\int_0^\infty dx\, \cos(z_0 x)\, x^\alpha J_\alpha(rx) =$$

$$= -2^\alpha\frac{\sin(\alpha\pi)}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\tfrac{1}{2}+\alpha)\,\theta(z_0^2-r^2)\, r^\alpha (z_0^2-r^2)^{-\alpha-\frac{1}{2}} +$$

$$+ 2^\alpha\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)}{\sqrt{\pi}}\, r^\alpha\, \theta(r^2-z_0^2)\, (r^2-z_0^2)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \qquad (П.II.4)$$

Из (П.II.3) и (П.II.4) имеем ($z^2 = z_0^2 - r^2$)

$$\int_0^\infty dp_0\, e^{-ip_0 z_0}\, p_0^{d-\frac{3}{2}-s}\, J_{d-\frac{3}{2}-s}(p_0 r) =$$

$$= 2^{d-\frac{3}{2}-s}\, r^{d-\frac{3}{2}-s}\, \varepsilon(z_0)\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-d+2+s)}\, \frac{\theta(z^2)}{(z^2)^{d-1-s}} \qquad (П.II.5)$$

$$-i 2^{d-\frac{3}{2}-s}\, r^{d-\frac{3}{2}-s}\Big(\frac{\cos(d-s)\pi}{\sqrt{\pi}}\Gamma(d-1-s)\, \frac{\theta(z^2)}{(z^2)^{d-1-s}} -$$

$$- \Gamma(d-1-s) \cdot \frac{\theta(-z^2)}{(-z^2)^{d-1-s}}.$$

Подставляя (П.II.5) в (П.II.1) и учитывая, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} = -2\frac{\partial}{\partial(z^2)}$$

получаем

$$\overset{+}{Q}(z) = \frac{1}{\pi} 2^{2(d-2-s)} \frac{\Gamma(d-s)}{\Gamma(-d+2+s)} \varepsilon(z_0) \frac{\theta(z^2)}{(z^2)^{d-s}} +$$

$$+ \frac{i}{\pi^2} 2^{2(d-2-s)} \Gamma(d-s)\Gamma(d-1-s)\left\{ \cos(d-s)\pi \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\theta(z^2)}{(z^2)^{d-s}} + \theta(-z^2)\frac{1}{(-z^2)^{d-s}} \right\}. \qquad (\text{П.II.6})$$

Наконец, поскольку [18]

$$(z^2 - i\varepsilon z_0)^\lambda = \theta(z^2)(z^2)^\lambda + \varepsilon(z_0)e^{-i\pi\lambda}\theta(-z^2)(-z^2)^\lambda$$

имеем

$$\overset{+}{Q}(z) = \frac{1}{\pi^2} 2^{2(d-2-s)} \Gamma(d-s-1)\Gamma(d-s)\frac{1}{(z^2 - i\varepsilon z_0)^{d-s}}. \qquad (\text{П.II.7})$$

Таким образом

$$W^{d,s}_{\sigma\tau}(z) = \frac{1}{\pi^2} 2^{2(d-2-s)} \Gamma(d-s-1)\Gamma(d-s) \times \qquad (\text{П.II.8})$$

$$\times \Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(i\partial)\frac{1}{(z^2 - i\varepsilon z_0)^{d-s}}.$$

Коммутатор (антикоммутатор)

$$\{\varphi_\sigma(x), \varphi^+_\tau(y)\}_\pm = \frac{1}{i}\Delta_{\sigma\tau}(x-y)$$

равен

$$\Delta_{\sigma\tau}(z) = \frac{2}{\pi} 2^{2(d-2-s)} \frac{\Gamma(d-s)}{\Gamma(-d+2+s)} \times \qquad (\text{П.II.9})$$

$$\times \Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(i\partial)\,\varepsilon(z_0)\frac{\theta(z^2)}{(z^2)^{d-s}}$$

При $d = 2+s+n$ ($n = 0, 1, 2, \dots,$) (дискретные серии) имеем

$$\Delta_{\sigma\tau}(z) = \frac{2}{\pi} 2^{2(d-2-s)} \Gamma(d-s-1)\Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(i\partial) \times \qquad (\text{П.II.10})$$

$$\times \varepsilon(z_0)\frac{\partial^{d-s-1}}{\partial(z^2)^{d-s-1}}\delta(z^2).$$

Поскольку

$$2^{2(d-2-s)}(d-s-2)!\,\frac{\partial^{d-2-s}}{\partial(z^2)^{d-2-s}}\delta'(z^2)=(-1)^{d-2-s}\,\delta'(z^2)$$

$\Delta_{\sigma z}(z)$ приводится к виду (5.10).

Для $d=1+s$ из (П.II.9) следует

$$\Delta_{\sigma z}(z)=\Gamma(0)\cdot\frac{1}{2\pi}\,\Pi^{(s)}(i\partial)\,\mathcal{E}(z_0)\,\delta(z^2).$$

Т.е. поля с $d\to 1+s$ отличаются от безмассовых бесконечной константой $\sqrt{\Gamma(0)}$.

Литература

/ 1 / S. Weinberg, Phys. Rev., 134B, 882 (1964)
G. Mack, I. Todorov, J. Math. Phys, 10, 2078 (1969).

/ 2 / Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик, препринт ИЯФ СО АН СССР, 90-72 (1972).

/ 3 / Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик, препринт ИЯФ СО АН СССР, 94-72,... (1972).

/ 4 / Tsu Yao, J. Math. Phys., 8, 1931 (1967), 9, 1615 (1968).

/ 5 / Tsu Yao, J. Math. Phys., 12, 315 (1971).

/ 6 / G. Mack, A. Salam, Ann. Phys (N.Y), 53, 174 (1969).

/ 7 / S. Ferrara, R. Gatto, A.E. Grillo, G. Parisi, Lett. Nuovo Cim., 4, 115 (1972).

/ 8 / С.Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.

/ 9 / Б.Г.Конопельченко, препринт ИЯФ СО АН СССР, 39-72 (1972).

/10/ S. Weinberg, Phys. Rev., 133 B, 1318 (1964).

/11/ A. A. Migdal, Phys. Lett., B37, 98 (1971).

/12/ D. J. Gross, J. Wess, Phys. Rev., 2D, 753 (1970).

/13/ М.Хамермеш. Теория групп и её применение к физическим проблемам "Мир" 1966.
Ю.М.Широков, ЖЭТФ, 33, 861 (1957).

/14/ И.М.Гельфанд, Н.Я.Виленкин, Обобщенные функции, вып.4, М., 1961.

/15/ Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик, препринт ИЯФ СО АН СССР, 44-72 (1972).

/16/ F. Gürsey, S. Orfanidis, preprint, Yale University (1972).

/17/ И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1963.

/18/ И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Обобщенные функции. Вып.1,М., 1958.

Ответственный за выпуск С.Т.Родионов
Подписано к печати 29.3.73г. МН 08138
Усл. 1,7 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 19 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР , нв.