7

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 24 - 73

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Новосибирск

1973

ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматриваются дискретные конформные преобразования в двумерном и четырехмерном пространстве-времени. Найдены законы преобразования полей с аномальной и дискретной размерностью. Показано, что для полей с аномальной размерностью требование инвариантности относительно R -преобразования приводит к выражениям типа $|(x-y)^2|^{-d}$ для вакуумных средних.

DISCRETE TRANSFORMATIONS IN THE CONFORMAL INVARIANT FIELD THEORY

B.G. Konopelchenko, M.Ya. Palchik

Abstract

Discrete conformal transformations in the two-dimensional and four-dimensional space-time are considered. Transformation laws of the fields with anomalous and discrete dimension are found. It is shown that the demand of invariance under R -transformation in the case the fields with anomalous dimension result in the expression such as $|(x-y)^2|^{-d}$ for vacuum expectation values.

В работе /1/ показано, что требование инвариантности относительно дискретных конформных преобразований позволяет определить вид двух- и трехточечных вакуумных средних. Однако при этом (см.также /2/) не учитывались свойства пространства состояний в конформно-инвариантной теории, которые приводят к тому, что поля с аномальной размерностью (скалярное и спинорное - в двумерном пространстве-времени и скалярное в четырехмерном) не удовлетворяют аксиомам теории поля и лишь поля с дискретной размерностью $d=\frac{N}{2}+S+n$, $n=0,1,2\ldots$, S -спин, N = 2,4 - размерность пространства-времени) совместимы с ними /3/.

В данной работе дискретные конформные преобразования в двумерном и четырехмерном пространстве-времени рассматриваются с учетом этих свойств. Найдены законы преобразования состояний $\psi^+(x)|0\rangle$ для полей с аномальной и дискретной размерностью. Показано, что для полей с аномальной размерностью требование инвариантности относительно R -преобразования приводит к выражениям типа $|(x-y)^2|^{-d}$ для вакуумных средних.

В /4а/ показано, что в конформно-инвариантной теории кроме обычных Т и Р-отражений имеются дискретные конформные преобразования $\mathcal{L}$ и R:

$$\mathcal{L}x^\mu = -\frac{x^\mu}{x^2}, \qquad Rx^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}$$

Поскольку $\mathcal{L}=TPR$ достаточно рассмотреть только R -преобразование.

Для определенности будем рассматривать двумерное пространство-время.

Пусть $\psi(x)$-поле, преобразующееся по неприводимому представлению конформной группы, с заданными размерностью d и спином S. Как показано в /4б/ состояния

$$\psi^+(x)|0\rangle \tag{1.1}$$

образуют пространство неприводимого представления (d, S) и, следовательно, их свойства определяются структурой представления (d, S). Для характеристики вектора неприводимого пред -

ставления необходимо задавать два квантовых числа (помимо d, s). В качестве этих чисел удобно выбрать собственные значения двух операторов A_3 и B_3, определяемых как /4б/

$$A_3 = -\frac{1}{4}(P_+ + K_+) \quad , \quad B_3 = \frac{1}{4}(P_- + K_-)$$

где $P_\pm = P_0 \pm P_1$, $K_\pm = -K_0 \pm K_1$; K_μ – генераторы специального конформного преобразования, P_μ –сдвигов. Операторы A_3 и B_3 имеют дискретный спектр /4б/

$$A_3 |d,s;m_1,m_2\rangle = (m_{01}+m_1)|d,s;m_1,m_2\rangle,$$
$$B_3 |d,s;m_1,m_2\rangle = (m_{02}+m_2)|d,s;m_1,m_2\rangle \tag{1.2}$$

где m_1, m_2 – целые числа. Для непрерывной серии $m_{01} = m_{02} = 0$, для дискретных серий $m_{01} = \pm\frac{d+s}{2}$, $m_{02} = \pm\frac{d-s}{2}$. Связь между дискретным базисом (1.2) и базисом $|d,s;x\rangle$ в координатном представлении имеет вид /4б/

$$|d,s;x\rangle = \sum_{m_1,m_2} \overset{*}{f}{}^{2-d,-s}_{m_1,m_2}(x)\,|d,s;m_1,m_2\rangle$$

где $f^{d,s}_{m_1,m_2}(x)$ являются собственными функциями операторов A_3 и B_3 в координатной реализации /4б/:

$$f^{d,s}_{m_1,m_2}(x) = C^{d,s}_{m_1,m_2}\left(1+4x_+^2\right)^{\frac{d+s}{2}-1}\cdot\left(1+4x_-^2\right)^{\frac{d-s}{2}-1}\times \tag{1.3}$$

$$\times\left(\frac{1+2ix_+}{1-2ix_+}\right)^{m_{01}+m_1}\cdot\left(\frac{1-2ix_-}{1+2ix_-}\right)^{m_{02}+m_2}$$

$$x_\pm = \frac{1}{2}(x_0 \mp x_1)$$

(Здесь и в дальнейшем мы не будем выписывать коэффициенты $C^{d,s}_{m_1,m_2}$, т.к. они не существенны).

1. Рассмотрим представления непрерывной серии $\mathcal{D}_{SS}(d,s)$ где $|s|<1$, $|s|<d<2-|s|$

В работе /4a/ показано, что

$$\mathcal{U}(R)\,|d,s;m_1,m_2\rangle = \eta\,|d,-s;m_2,m_1\rangle$$

где $\mathcal{U}(R)$ – унитарный оператор, соответствующий R –преобразованию. Из (1.3) вытекает

$$f^{2-d,-s}_{m_1,m_2}(x) = \frac{2^{-2d}}{(x_+^2)^{\frac{d+s}{2}}\,(x_-^2)^{\frac{d-s}{2}}}\, f^{2-d,s}_{m_2,m_1}\left(\frac{x_\mu}{x^2}\right).$$

Учитывая, что

$$(x_+^2 x_-^2)^{\frac{d}{2}} = 2^{-2d}\,|x^2|^d$$

находим

$$\mathcal{U}(R)\,|d,s;x\rangle = \eta\,\frac{1}{|x^2|^d}\left|\frac{x_-}{x_+}\right|^s |d,-s;\frac{x_\mu}{x^2}\rangle. \tag{1.4}$$

Учитывая, что /4/

$$|d,s;x\rangle = \Psi^+_{d,s}(x)\,|0\rangle$$

где $|0\rangle$ – конформно инвариантный вакуум, $\mathcal{U}(R)|0\rangle=|0\rangle$ имеем:

$$\mathcal{U}(R)\,\Psi_{d,s}(x)\,\mathcal{U}^{-1}(R) = \eta\,\frac{1}{|x^2|^d}\left|\frac{x_-}{x_+}\right|^s \Psi_{d,-s}\left(\frac{x_\mu}{x^2}\right).$$

Для двухточечной функции $W_{d,s}(x-y) =$ $= \langle 0|\psi_{d,s}(x)\,\psi^{+}_{d,s}(y)|0\rangle$ имеем

$$W_{d,s}(x-y) = \frac{1}{|x^2|^d}\,\frac{1}{|y^2|^d}\left|\frac{x_-}{x_+}\right|^s \left|\frac{y_-}{y_+}\right|^s W_{d,-s}\left(\frac{x_\mu}{x^2} - \frac{y_\mu}{y^2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$W_{d,s}(x-y) \sim \frac{1}{|(x-y)^2|^d}\left|\frac{x_- - y_-}{x_+ - y_+}\right|^s. \tag{1.5}$$

Не обычные аналитические свойства вакуумных средних возникают из-за того, что состояния поля $\psi(x)$ имеют спектр импульсов

$$-\infty < p^2 < \infty$$

Соответственно в такой теории нет наинизшего энергетического состояния.

Переходя к двухкомпонентным полям $\Phi_{d,s} = \begin{pmatrix}\psi_{d,s}\\ \psi_{d,-s}\end{pmatrix}$

получаем

$$\mathcal{U}(R)\,\Phi_{d,s}(x)\,\mathcal{U}^{-1}(R) = \eta\begin{pmatrix} 0 & \left|\frac{x_-}{x_+}\right|^s \\ \left|\frac{x_-}{x_+}\right|^s & 0\end{pmatrix}\frac{1}{|x^2|^d}\,\Phi_{d,s}\left(\frac{x_\mu}{x^2}\right). \tag{1.6}$$

Из (1.6) вытекает также закон преобразования поля $\psi_{d,s}(x)$ относительно специального конформного преобразования (т.к. $K_\mu = R\,P_\mu\,R$).

$$\mathcal{U}(c)\,\psi_{d,s}(x)\,\mathcal{U}^{-1}(c) = \left|1 + 2(c,x) + c^2x^2\right|^{-d} \times$$

$$\times \left|\frac{1 + 4c_+x_-}{1 + 4c_-x_+}\right|^s \psi_{d,s}\left(\frac{x_\mu + c_\mu x^2}{1 + 2(c,x) + c^2x^2}\right). \tag{1.7}$$

Поля из непрерывной серии не допускают инвариантного разбиения на положительно- и отрицательно-частотные части и поэтому нельзя инвариантным образом определить зарядовое сопряжение.

Трансформационные свойства поля $\Psi_{d,s}(x)$ относительно P, T и $\mathcal{L}$ - отражений очевидны.

2. Поля с дискретной размерностью $d = 1+|s|+n,\ n = 0,1,2,\ldots$ В этом случае имеем

$$f^{2-d,-s}_{m_1,m_2}(x) = \frac{2^{-2d}}{(x_+)^{d+s}(x_-)^{d-s}} f^{2-d,s}_{m_2,m_1}\left(\frac{x_\mu}{x^2}\right).$$

Отсюда

$$U(R)|d,s;x\rangle = \eta \frac{1}{(x^2)^d}\left(\frac{x_-}{x_+}\right)^s |d,-s;\frac{x_\mu}{x^2}\rangle. \tag{1.8}$$

Закон преобразования (1.8) не противоречит выражению для двухточечной функции с обычными правилами обхода /4б/:

$$\langle 0|\Psi(x)\Psi^+(y)|0\rangle \sim \frac{1}{\left[(x-y)^2 - i\varepsilon(x_0-y_0)\right]^d}\left(\frac{x_- - y_-}{x_+ - y_+}\right)^s.$$

Для поля $\Psi_{d,s}(x)$ имеем

$$U(R)\Psi_{d,s}(x)U^{-1}(R) = \eta\frac{1}{(x^2)^d}\left(\frac{x_-}{x_+}\right)^s \Psi_{d,-s}\left(\frac{x_\mu}{x^2}\right). \tag{1.9}$$

Поскольку для полей с дискретной размерностью /4/

$$p^2 > 0 \qquad \varepsilon(p_0) = \frac{p_0}{|p_0|} = inv.$$

возможно инвариантное введение конформных частиц и античастиц. Операции P, T (сильного и слабого отражения) и зарядового сопряжения могут быть определены так же, как и для релятивистских полей. Для свободных конформных полей /3/ (которые являются обобщенными свободными полями) это следует из разложения

$$\psi_{d,s}(x) = \int_0^\infty dm^2 \, (m^2)^{\frac{d-1}{2}} \, \psi_{m,s}(x)$$

где $\psi_{m,s}(x)$ —свободное релятивистское поле с массой m и спином s.

Можно ввести как сильное, так и слабое R —преобразование.

Теория свободных конформных полей /3/ CPT и $C\mathcal{L}R_W$ -инвариантна (CPT = $C\mathcal{L}R_W$).

II.

Рассмотрим четырехмерное пространство. В этом случае также можно ввести дискретный базис /5/. Трансформационные свойства этого базиса относительно дискретных преобразований рассмотрены в /6/. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю двумерного пространства. В результате имеем:

1. Скалярное поле с аномальной размерностью d: $1<d<3$

$$\mathcal{U}(R)\,|\,d;x\rangle = \eta \, \frac{\varepsilon(x^2)}{|x^2|^d} \, \Big|\, d; \frac{x_\mu}{x^2}\Big\rangle.$$

Отсюда

$$\langle 0|\varphi(x)\,\varphi^+(y)|0\rangle \sim \frac{\varepsilon\big((x-y)^2\big)}{|(x-y)^2|^d}$$

2. Поля с дискретной размерностью /3б/ $d = 2+s+n$.

Обозначим через $\psi_\sigma(x)$ —поле с размерностью d, преобразующееся по представлению $(s,0)$ группы Лоренца, через $\chi_\sigma(x)$ —поле, преобразующееся по представлению $(0,s)$.

Поскольку при R —преобразовании оператор Казимира C_3 меняет знак /6/ находим

$$\mathcal{U}(R)\,\psi_\sigma(x)\,\mathcal{U}^{-1}(R) = \eta\,\frac{1}{(x^2)^{d+s}}\,\Pi^{(s)}_{\sigma\Sigma}(x)\;\chi_\Sigma\left(\frac{x_\mu}{x^2}\right), \tag{2.1}$$

$$\mathcal{U}(R)\,\chi_\sigma(x)\,\mathcal{U}^{-1}(R) = \eta'\,\frac{1}{(x^2)^{d+s}}\,\overline{\Pi}^{(s)}_{\sigma\Sigma}(x)\,\psi_\Sigma\left(\frac{x_\mu}{x^2}\right).$$

где

$$\Pi^{(s)}_{\sigma\Sigma}(x) = t^{\mu_1\ldots\mu_{2s}}_{\sigma\Sigma}\,x_{\mu_1}\ldots x_{\mu_{2s}}\;;\quad t^{\mu_1\ldots\mu_{2s}}_{\sigma\Sigma} -$$

– симметричный бесследный тензор; $\overline{\Pi}(x) = \Pi(x_0, -\vec{x})$.

Закон преобразования (2.1) совместим с вакуумными средними, имеющими обычные правила обхода /3б/

$$\langle 0|\,\psi_\sigma(x)\,\psi^+_\Sigma(y)\,|0\rangle \sim \Pi^{(s)}_{\sigma\Sigma}(i\partial)(-\Box)^{d-2-s}\left[(x-y)^2 - i\varepsilon(x_0-y_0)\right]^{-2} \sim$$

$$\sim\;\Pi^{(s)}_{\sigma\Sigma}((x-y))\quad\left[(x-y)^2 - i\varepsilon(x_0-y_0)\right]^{d+s}.$$

Поскольку для свободного конформного поля /3б/

$$\psi_{d,s}(x) = \int\limits_0^\infty dm^2\,(m^2)^{\frac{d-2}{2}}\,\psi_{m,s}(x)$$

где $\psi_{m,s}(x)$ – свободное релятивистское поле с массой m и спином s, операции P, T и зарядового сопряжения определяются так же, как и в релятивистской теории. Так же, как и в двумерном случае имеется CPT и $C\mathcal{L}R_W$ –инвариантность.

В заключение выпишем закон преобразования поля $\psi_{d,s}(x)$ при специальном конформном преобразовании

$$\mathcal{U}(c)\,\psi_\sigma(x)\,\mathcal{U}^{-1}(c) = \frac{1}{\left(1+2(c,x)+c^2x^2\right)^{d+s}} \times$$

$$\times\, \Pi^{(s)}_{\sigma\tau}(x)\,\overline{\Pi}^{(s)}_{\tau\rho}\left(\frac{x_\mu}{x^2}+c_\mu\right)\psi_\rho\left(\frac{x_\mu+c_\mu x^2}{1+2(c,x)+c^2x^2}\right).$$

Для поля $\chi_\sigma(x)$ с заменой $\Pi(x)\to\overline{\Pi}(x)$. В частных случаях $s=0,\frac{1}{2},1$ получаем результаты работы /2/.

Л и т е р а т у р а

1. E.J. Schreir, Phys. Rev., <u>3D</u>, 980 (1971).

2. R. Nobili, preprint IFPTH-1/72, Padova (1972).

S. Ferrara, R. Gatto, A.F. Grillo, G. Parisi, Lett. Nuovo Cim., <u>4</u>, 115 (1972).

3. а) Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 94-72(1972).

   б) Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик, препринт ИЯФ СО АН СССР (1973).

4. Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик, препринт ИЯФ СО АН СССР,

   а) 44-72, б) 90-72 (1972).

5. Tsu Yao, J. Math. Phys., <u>8</u>, 1931 (1967), <u>9</u>, 1615 (1968).

6. Б.Г.Конопельченко, препринт ИЯФ СО АН СССР, 39-72 (1972).

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати I2.IУ.73г. № МН08I83
Усл. 0,5 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ №24 . ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,нв.