

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

9

К. 89

ПРЕПРИНТ И Я Ф 29 - 73

Е.А.Кузнецов

ОБ ИНДУЦИРОВАННОМ РАССЕЙАНИИ
ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Новосибирск

1973

ОБ ИНДУЦИРОВАННОМ РАССЕЙЯНИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Е.А.Кузнецов

А Н Н О Т А Ц И Я

Предлагается динамическое описание турбулентности ленгмюровских волн, основанное на усреднении по характерному времени $1/\omega_p$ (метод Боголюбова-Крылова). Показано, что индуцированное рассеяние волн на частицах плазмы представляет собой рассеяние волн на низкочастотных флуктуациях плотности плазмы и пульсациях скорости электронного газа. Исследована устойчивость ленгмюровской волны большой амплитуды.

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. № _____

Процессы нелинейного взаимодействия волн в плазме разделяются на упругие процессы, при которых энергия волн сохраняется, и неупругие, при которых происходит обмен энергией между волнами и частицами. Эти процессы, как правило, рассматривались в рамках теории слабой турбулентности /1-5/. Эта теория предполагает малость амплитуды волн, что позволяет, используя гипотезу случайных фаз, описывать систему с помощью кинетического уравнения для волн. При таком статистическом описании, естественно, теряются все когерентные эффекты. В настоящей статье предлагается динамическое описание этих процессов. Мы ограничимся изучением турбулентности ленгмюровских волн. Однако, многие выводы работы можно без труда обобщить и на ряд других случаев.

Ленгмюровские волны - суть продольные электронные колебания. Их нелинейное затухание - столкновительное и затухание Ландау на электронах мало. Поэтому, пренебрегая взаимодействием волн с резонансными частицами, можно считать, что электроны в ленгмюровских колебаниях двигаются как целое. Это позволяет описывать их движение гидродинамически. В силу того, что собственная частота этих колебаний близка к ω_p (ω_p - электронная плазменная частота), эти волны создают вынужденные колебания на частотах, близких к $2\omega_p$, и вынужденные низкочастотные колебания, взаимодействие с которыми и является основным для ленгмюровских волн. Низкочастотные колебания, в свою очередь, попадают в резонанс с частицами (число таких частиц велико) и эффективно затухают (индуцированное рассеяние волн на частицах). В сильно неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$), кроме того, возможен резонанс с собственными низкочастотными колебаниями - ионным звуком. При этом возможно возбуждение ионного звука. Отсюда ясно, что низкочастотные движения следует описывать кинетически. Колебания же на частоте $2\omega_p$ имеют фазовые скорости порядка фазовых скоростей основного движения. Поэтому для движения на частоте $2\omega_p$ справедливо гидродинамическое описание. Такое разделение временных масштабов позволяет получить сравнительно простую замкнутую систему уравнений (§ 1), описывающую динамику ленгмюровской турбулентности. Такое квази-гидродинамическое описание ленгмюровской турбулентности было предложено В.Е.Захаровым в работе /6/. Однако описание, предложенное в /6/, становится не справедливым при достаточно большой амплитуде волны. При уве-

личении амплитуды следует учитывать чисто электронные нелинейности, а именно вынужденное рассеяние на флуктуациях с частотами $2\omega_p$ и на низкочастотных флуктуациях, связанных с эффектом Доплера на электронах.

Далее, результаты, полученные в § 1 используются в § 2,3. В § 2 изучена задача об устойчивости монохроматической волны большой амплитуды. Ранее, в работах /6,7/, было получено, что для умеренных амплитуд монохроматическая волна неустойчива. В данной работе показано, что учёт электронных нелинейностей не стабилизирует неустойчивость, а приводит к тому, что неустойчивость становится квазиоднородной.

В § 3 на основе уравнений, полученных в § 1, выводится кинетическое уравнение для волн, описывающее индуцированное рассеяние на частицах. Найдены пределы применимости такого описания. Следует отметить, что такое же описание этих процессов было использовано в работах /6,7/. В этих работах выделен основной вклад в индуцированное рассеяние, который соответствует рассеянию на низкочастотных флуктуациях плотности (§ 1). Однако, приближение, сделанное в них, не позволяет точно описывать индуцированное рассеяние волн на электронах. Дело в том, что при индуцированном рассеянии на электронах следует учитывать эффект Доплера /4,5/, который макроскопически соответствует выносу колебаний с дрейфовой скоростью. Этот эффект, малый для ленгмюровских волн, существен для волн, собственная частота которых слабо зависит от плотности.

§ 1. Основные уравнения

Для основного движения - ленгмюровских волн запишем линеаризованную систему уравнений гидродинамики для электронной жидкости. При этом учтем, что основным нелинейным взаимодействием для ленгмюровских волн является взаимодействие с вынужденными колебаниями на частоте $2\omega_p$ и низкочастотными движениями:

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \vec{V} + \operatorname{div} (\delta \tilde{n} \vec{V} + \delta n \vec{\tilde{V}})$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + (\vec{\tilde{V}} \nabla) \vec{V} = -\frac{e}{m} \nabla \psi - 3 V_{Te}^2 \nabla \frac{\delta n}{n_0} \quad (1)$$

$$\Delta \psi = -4\pi e \delta n$$

$$\delta \tilde{n} = \delta n_D + \delta n_2$$

$$\vec{V} = V_D + V_2$$

Здесь $\delta n, V$ - вариация плотности и скорость электронов в ленгмюровских колебаниях, а $\delta n_D, V_D$ и $\delta n_2, V_2$ - вариации плотности и скорости дрейфового движения и движения на частоте $2\omega_p$ соответственно.

Следуя работе /6/, введем медленно меняющуюся величину ψ по формуле:

$$\psi = \frac{1}{2} (\psi e^{-i\omega_p t} + \psi^* e^{i\omega_p t})$$

Считая δn_D и V_D не зависящими от времени, δn_2^+ и V_2^+ $\sim e^{-2i\omega_p t}$ и пренебрегая второй производной ψ по t , получим из (1):

$$\begin{aligned} & \Delta (i\psi_t + \omega_p \frac{3}{2} \tau_d^2 \Delta \psi) - \operatorname{div} \left[\frac{\omega_p}{2} \frac{\delta n_D}{n_0} \nabla \psi \right] = \\ & = \operatorname{div} \left\{ -\frac{i}{2} [(\nabla \psi \nabla) \vec{V}_D + (\vec{V}_D \nabla) \nabla \psi + \vec{V}_D \Delta \psi] - \frac{\omega_p^2 n_2^+}{2 n_0} \psi^* e^{2i\omega_p t} + \frac{i}{2} [(\nabla \psi^* \nabla) \vec{V}_2^+ + (\vec{V}_2^+ \nabla) \nabla \psi^* - \vec{V}_2^+ \Delta \psi^*] e^{2i\omega_p t} \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

$$3\Delta e \tau_d = V_{Te} / \omega_p$$

Уравнение (2) без правой части было получено В.Е.Захаровым в

работе /6/. Дополнительные члены в правой части уравнения (2), как мы увидим в дальнейшем, существенны при достаточно больших амплитудах ленгмюровских волн.

В уравнении (2) совершим преобразованием Фурье по координатам и перейдем к каноническим переменным a_k, a_k^* , которые являются классическими аналогами бозе-операторов:

$$\psi_k = (8\pi\omega_p)^{1/2} \frac{a_k}{k} e^{i\omega_p t}$$

В новых переменных оно имеет вид уравнения Гамильтона:

$$\dot{a}_k = -i \delta H / \delta a_k^* \quad (3)$$

Гамильтониан H складывается из

$$H_0 = \int \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k^2 v_d^2\right) a_k a_k^* dk,$$

гамильтониана взаимодействия с дрейфовыми движениями

$$H_i^{(1)} = \int \frac{1}{2} \frac{(\vec{k} \vec{k}_1)}{k k_1} \left\{ \omega_p \frac{\delta n_0}{n_0} + (\vec{k} + \vec{k}_1, \vec{V}_D) \right\} a_k a_k^* \delta_{\vec{k} + \vec{k}_1} d\vec{k} dk dk_1 \quad (4)$$

и гамильтониана взаимодействия $H_i^{(2)}$ с движениями на частоте $2\omega_p$. Фазовые скорости биеений с частотами $2\omega_p$ порядка фазовых скоростей основного движения: в силу этого, движения на частоте $2\omega_p$ описываются гидродинамическими уравнениями. Из этих уравнений находятся δn_2 и V_2

и исключаются из последующего рассмотрения (см./8/). Поэтому сразу приведём явное выражение для гамильтониана $H_i^{(2)}$:

$$H_i^{(2)} = \frac{1}{2} \int T_{k_1 k_2 k_3} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta_{\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3} dk dk_1 dk_2 dk_3$$

$$T_{k_1 k_2 k_3} = \frac{2}{\omega_p} \left[V_{\vec{k} + \vec{k}_1, k_1 k_2} V_{\vec{k}_2 + \vec{k}_3, k_2 k_3} - \frac{1}{3} V_{-\vec{k} - \vec{k}_1, k_1 k_2} V_{-\vec{k}_2 - \vec{k}_3, k_2 k_3} \right]$$

$$V_{k_1 k_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_p}{2\pi n_0} \right)^{1/2} \left\{ \frac{(\vec{k} \vec{k}_1)}{k k_1} k_2 + \frac{(\vec{k} \vec{k}_2)}{k k_2} k_1 + \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)}{k_1 k_2} k \right\}$$

который описывает упругое рассеяние ленгмюровских волн через виртуальную волну на частоте $2\omega_p$. Уравнение (3) сохраняет

полное число квазичастиц $N = \int |a_k|^2 dk = \frac{1}{8\pi\omega_p} \int |\psi|^2 d\tau$;

при этом, с точностью до малых дисперсионных и нелинейных членов, энергия ленгмюровских колебаний равна $\omega_p N$. Отсюда легко понять физический смысл гамильтониана $H_i^{(2)}$.

Первый член в (4) связан с отличием плазменной частоты от её локального значения, второй член описывает неоднородный эффект Доплера.

Для замыкания уравнения (3) учтем действие ленгмюровских колебаний на медленные движения плазмы.

Для "дрейфовых" электронов запишем кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \tilde{f} + \frac{e}{m} \nabla \tilde{\varphi} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = -\frac{e}{m} \langle \nabla \varphi \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \rangle \quad (5)$$

в котором f - быстрая вариация функции распределения, связанная с основным движением, \tilde{f} - медленная вариация, $\tilde{\varphi}$ - низкочастотный потенциал. Скобки означают усреднение по быстрому времени. Это среднее описывает действие высокочастотного поля на медленные движения плазмы. Ранее, в работах /6,7/ предполагалось, что со стороны высокочастотного поля на "дрейфовые" электроны действует сила с потенциалом $\mathcal{U} = \frac{e^2}{4m\omega_p^2} |\nabla \varphi|^2$

Ниже будет показано, что в общем случае эта сила представляет собой оператор в пространстве скоростей.

Ионы же подчиняются линеаризованному кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) f_i - \frac{e}{m} \nabla \tilde{\varphi} \frac{\partial f_0^i}{\partial \vec{v}} = 0$$

$$\Delta \tilde{\varphi} = -4\pi e \int (f_i - \tilde{f}) d\vec{v} \quad (6)$$

Для определения среднего $e \langle \nabla \varphi \frac{\partial f}{\partial v} \rangle = \hat{u} f_0$ найдем f из линеаризованного кинетического уравнения для основного движения

$$f_{k\omega} = \frac{e}{m} \frac{(2\pi\omega_p)^{1/2}}{k} \frac{(\vec{k} \frac{\partial f_0^e}{\partial \vec{v}})}{\omega - \vec{k} \vec{v}} (a_{k\omega} + a_{-k-\omega}^*)$$

Следует при усреднении помнить, что спектр $a_{k\omega}$ близок к $\delta(\omega - \omega_p)$. Поэтому:

$$(\hat{u} f_0)_{\alpha\Omega} = i \frac{e^2}{m} \int \frac{2\pi\omega_p}{kk_1} a_{k\omega} a_{k_1\omega_1}^* \delta_{\alpha-k+k_1} \delta_{\Omega-\omega+\omega_1} \left[\left(\frac{\vec{k} \partial}{\partial \vec{v}} \right) \frac{1}{\omega_1 - \vec{k}_1 \vec{v}} \left(\frac{\vec{k}_1 \partial f_0^e}{\partial \vec{v}} \right) - \left(\frac{\vec{k}_1 \partial}{\partial \vec{v}} \right) \frac{1}{\omega - \vec{k} \vec{v}} \left(\frac{\vec{k} \partial f_0^e}{\partial \vec{v}} \right) \right] dk dk_1 d\omega d\omega_1$$

При этом дрейфовые параметры δn_D и V_D определяются по формулам:

$$\delta n_D = \int \tilde{f} d\vec{v} \quad (8)$$

$$\vec{V}_D = \frac{1}{n_0} \left[\int \vec{v} f d\vec{v} - \langle \delta n \vec{v} \rangle \right] \quad (9)$$

Система уравнений (3,5-9) полностью описывает динамику ленгмюровской турбулентности. Займемся упрощением этой системы уравнений. Для этого, исходя из уравнений (5-7), найдем δn_D и V_D .

Для δn_D имеем:

$$(\delta n_D)_{\alpha\Omega} = -i \frac{(\epsilon_i + 1) \epsilon_e^*}{|\epsilon|^2} \int \frac{(\hat{u} f_0)_{\alpha\Omega}}{\Omega - \vec{x} \vec{v}} d\vec{v}$$

Производя простые вычисления и ограничиваясь в этом интеграле первым членом разложения по $\vec{k} \vec{v} / \omega_p$ (см., например, /4,5/), получим /6/:

$$(\delta n_D)_{\alpha\Omega} = G_{\alpha\Omega} U_{\alpha\Omega} \quad (10)$$

$$\text{где } G_{\alpha\Omega} = -\frac{x^2}{4\pi e^2} \frac{|\epsilon_{i+1}|^2 \epsilon_e + |\epsilon_e|^2 (\epsilon_i + 1)}{|\epsilon|^2}$$

$$\epsilon_e = \frac{4\pi e^2}{m_e x^2} \int \frac{\vec{x} \frac{\partial f_0^e}{\partial \vec{v}}}{\Omega - \vec{x} \vec{v}} d\vec{v}; \quad \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_i + 1$$

Здесь $U_{\alpha\Omega}$ есть Фурье-образ от высокочастотного потенциала. Теперь найдем скорость дрейфа. Простые, но громоздкие вычисления дают для первого члена в (9):

$$\begin{aligned} (\vec{V}_D^{(1)})_{\alpha\Omega} &= \int \frac{1}{m n_0 k k_1} \left\{ -x^2 \epsilon_e (\vec{k} \vec{k}_1) + \frac{1}{2} (k^2 + k_1^2) \right\} \frac{[\vec{x} [\vec{k} \vec{x}]]}{x^2} \\ & a_{k\omega} a_{k_1\omega_1}^* \delta_{\alpha-k+k_1} \delta_{\Omega-\omega+\omega_1} dk dk_1 d\omega d\omega_1 + \\ & + \Omega \frac{\vec{x}}{x^2} \frac{(\delta n_D)_{\alpha\Omega}}{n_0} \end{aligned} \quad (11)$$

Второй же член в (9) после усреднения имеет вид:

$$\vec{V}_D^{(2)} = \frac{1}{2m n_0} \int \frac{k^2 \vec{k}_1 + k_1^2 \vec{k}}{k k_1} a_k a_{k_1} \delta_{\alpha-k+k_1} dk dk_1 \quad (12)$$

Обсудим полученные результаты. Из (10) следует, что изменение плотности "дрейфовых" электронов обязано высокочастотному давлению. Этому изменению плотности соответствует второе слагаемое в выражении (11) для скорости дрейфа. Вклад этого члена во взаимодействие, как нетрудно убедиться, мал (см. (4)). Остальные слагаемые в (10), (11) описывают увлечение дрейфовых электронов высокочастотным полем. Отметим, что

функция Грина G (10) содержит резонансный знаменатель, соответствующий ионно-звуковому резонансу. В сильно неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) этот резонанс сильно выражен, что соответствует существованию слабозатухающих ионно-звуковых колебаний. При сравнимых температурах ($T_e \sim T_i$) резонанс менее выражен: частота звука Ω_s одного порядка с затуханием γ_s .

Подчеркнем, что для применимости нашего описания существенно единственное требование: все характерные времена нелинейных процессов τ должны быть больше $1/\omega_p$. Это означает, что уравнения (2-12) справедливы не только при

$W/nT < 1$ ($W = |V\psi|^2/8\pi$), но и для значительно больших амплитуд вплоть до $\frac{W}{nT} < 1/k^2 \tau_d^2$.

Действительно, увеличение амплитуды приводит к росту Ω в (10), (11); при этом все члены в (3) оказываются одного порядка и для τ получаем оценку:

$$\tau^{-1} \sim \omega_p (k \tau_d)^2 \frac{W}{nT} < \omega_p \text{ или } \frac{W}{n_0 m V_\phi^2} < 1 \quad x)$$

Так при возбуждении ленгмюровских волн релятивистским пучком это приводит к $W/n_0 m c^2 < 1$

§ 2. Неустойчивость монохроматической ленгмюровской волны большой амплитуды

Рассмотрим задачу об устойчивости монохроматической ленгмюровской волны большой амплитуды. Монохроматической волне соответствует точное решение уравнений (3,59)

$$a_k = \frac{A}{(8\pi\omega_p)^{1/2}} e^{-i(\omega_p + \omega_k)t} \delta(\vec{k} - \vec{k}_0); \quad \omega_k = \omega_p \frac{3}{2} k^2 \tau_d^2$$

x) Это требование совпадает с условием $e\psi < m V_\phi^2$, которое означает, что доля захваченных частиц к полному числу мала.

$$\vec{f} = f_i = 0, \quad \vec{\Psi} = 0, \quad \vec{V} = -\frac{\vec{k}_0}{m n_0} \frac{W}{\omega_p}, \quad W = \frac{|A|^2}{8\pi}$$

Линеаризуем основную систему (3,5-9) на фоне этого решения и положим:

$$\delta a \sim e^{-i(\Omega + \omega_p + \omega_{k_0})t} \delta_{\vec{k} - \vec{k}_0 - \vec{x}}$$

$$\delta a^* \sim e^{-i(\Omega - \omega_p - \omega_{k_0})t} \delta_{\vec{k} - \vec{k}_0 + \vec{x}}$$

для Ω получим дисперсионное уравнение

$$\left[\Omega + \omega_{k_0} - \tilde{\omega}_{k_0 + x} - \frac{\omega_p}{(2n_0)^{1/2}} d_+^2 \frac{W}{\omega_p} \right] \left[-\Omega + \omega_{k_0} - \tilde{\omega}_{k_0 - x} - \frac{\omega_p}{(2n_0)^{1/2}} d_-^2 \frac{W}{\omega_p} \right] =$$

$$= \left[R + \left(\frac{\omega_p}{2n_0} \right)^2 d_+ d_- \frac{W}{\omega_p} \right]^2 \left(\frac{W}{\omega_p} \right)^2 \quad (13)$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{\omega}_{k_0 \pm x} = \omega_{k_0 \pm x} + R_{k_0 \pm x} \frac{W}{\omega_p}; \quad d_{\pm} = \frac{(\vec{k}_0, \vec{k}_0 \pm \vec{x})}{k_0 |k_0 \pm x|}$$

$$R_{k_0 \pm x} = 2 T_{k_0 \pm x, k_0, k_0 \pm x, k_0} - \frac{(k_0 \pm x, k_0)}{m n_0} - \frac{1}{m n_0} d_{\pm}^2$$

$$\cdot \left[\frac{(2\vec{k}_0 \pm \vec{x}, \vec{x})^2}{4x^2} - [\vec{k}_0 \vec{x}]^2 \tau_d^2 \epsilon_e \right]$$

$$R = T_{k_0 + x, k_0 - x, k_0 k_0} - \frac{d_+ d_-}{m n_0} \left[\frac{(2\vec{k}_0 + \vec{x}, \vec{x})(2\vec{k}_0 - \vec{x}, \vec{x})}{4x^2} - [\vec{k}_0 \vec{x}]^2 \tau_d^2 \epsilon_e \right]$$

Оно переходит в уравнение (2.1) работы В.Е.Захарова [6], если положить $R_{k_0 \pm \kappa} = R \approx 0$. В этом приближении дисперсионное уравнение достаточно хорошо изучено. Чтобы понять к чему приводят отброшенные члены, рассмотрим устойчивость волны при малых κ . При этом дисперсионное уравнение существенно упрощается

$$(\Omega - \kappa \vec{V}_g)^2 - \omega_\kappa^2 = 2\omega_\kappa \left[\left(\frac{\omega_p}{2n_0} \right)^2 \epsilon + R \right] \frac{W}{\omega_p} \quad (14)$$

$$R_{k_0 \pm \kappa} = R \approx \frac{k_0^2}{m n_0} \sin^2 \theta \left[1 - \kappa^2 \epsilon_d \epsilon_e \right]$$

где θ - угол между вектором $\vec{\kappa}$ и направлением групповой скорости $\vec{V}_g = \partial \omega / \partial \vec{k}_0$. Члены, связанные с R , характеризуют электронную нелинейность.

В области фазовых скоростей $V_{Ti} < \Omega / \kappa < V_{Te}$ вклад электронных нелинейностей мал ($R \approx 0$). Здесь при интенсивностях $\left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \kappa \epsilon_d < W / nT < \frac{M}{m} (\kappa \epsilon_d)^2$ имеет место модифицированная распадная неустойчивость [6, 9] с максимальным инкрементом на поверхности $(\kappa \vec{V}_g)^2 = \omega_\kappa^2$

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{W \kappa^2}{4 M n_0 \omega_p^2} \right)^{1/3}$$

С увеличением амплитуды ($W / nT > \frac{M}{m} (\kappa \epsilon_d)^2$) неустойчивость перестраивается и имеет инкремент

$$\gamma = \left(\frac{1}{3} \omega_{pi}^2 \omega_\kappa^2 \frac{W}{nT} \right)^{1/4}$$

Эта неустойчивость имеет место до амплитуд:

$$W / nT \sim \min \left(\frac{M}{m}, \frac{1}{\kappa^2 \epsilon_d^2} \right)$$

Другой важной задачей является изучение устойчивости волны с малым $k_0 \ll \kappa$ [6]. При этом дисперсионное уравнение (13) упрощается до вида:

$$(\Omega^2 - \kappa^2 c_s^2) (\Omega^2 - \omega_\kappa^2 \left[1 + \frac{1}{3} \cos^2 \theta \frac{W}{nT} \right]) = \quad (15)$$

$$= \frac{1}{3} \omega_{pi}^2 \omega_\kappa^2 \cos^2 \theta \frac{W}{nT}$$

Здесь θ - угол между вектором \vec{k}_0 и $\vec{\kappa}$, c_s - скорость звука.

Легко видеть тогда, что неустойчивость имеет место в обширной области k -пространства:

$$(\kappa \epsilon_d)^2 < \frac{1}{3} \frac{W}{nT} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{W}{nT} \right)^{-1}$$

Максимальный инкремент этой неустойчивости

$$\gamma_{\max}^2 \approx \omega_{pi}^2 \frac{1}{3} \frac{W}{nT} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{W}{nT} \right)^{-1}$$

достигается при

$$(\kappa_{\max} \epsilon_d)^2 \sim \frac{m}{M} \frac{W}{nT} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{W}{nT} \right)^{-2}$$

Отсюда видно, что инкремент растет с увеличением амплитуды и при больших интенсивностях становится постоянным. При этом

κ_{\max} сдвигается в область малых κ , в то время как область неустойчивости наоборот увеличивается. Эта неустойчивость имеет место до амплитуд $W / nT < \min \left(\frac{M}{m}, \frac{1}{\kappa^2 \epsilon_d^2} \right)$

§ 3. Индуцированное рассеяние на частицах

При достаточно малой нелинейности можно считать, что $a_{k\omega} = c_k \delta(\omega - \omega_p - \omega_k)$. В этом приближении в гамильтониане H_i^2 член

$$\begin{aligned} & \omega_p \frac{\delta n_{2\kappa}}{n_0} + (\vec{k} + \vec{k}_1, \vec{V}_D^{(1)} \kappa) = \\ & = \int \frac{1}{2 m n_0} d k_2 d k_3 \delta_{\kappa - k_2 + k_3} c_{k_2} c_{k_3}^* e^{-i(\omega_{k_2} - \omega_{k_3})t} \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{(\vec{k}_2 \vec{k}_3)}{k_2 k_3} \alpha^2 \left[\varepsilon_e \frac{|\varepsilon_{i+1}|^2}{|\varepsilon|^2} + 4 \frac{([\vec{k}_1 \vec{k}_2][\vec{k}_2 \vec{k}_3])}{\alpha^2} \tau_d^2 \right] + \frac{(\varepsilon_{i+1} |\varepsilon_e|^2)}{|\varepsilon|^2} - \frac{(k_2^2 + k_3^2)}{k_2 k_3} \frac{([\vec{k}_1 \vec{k}_2][\vec{k}_2 \vec{k}_3])}{\alpha^2} \right\} \quad (16)$$

Здесь функции ε_α зависят от $\Omega = \omega_{k_2} - \omega_{k_3}$.

Подставим (16) в (4) и перейдем к статистическому описанию. Для этого введем n_k — число квазичастиц:

$$\langle c_k c_{k_1}^* \rangle = n_k \delta_{k-k_1}$$

Здесь скобки означают усреднение по случайным фазам. Тогда n_k подчиняется кинетическому уравнению:

$$\dot{n}_k = -\frac{1}{4\pi n_0} \int dk_1 \frac{(\vec{k} \vec{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \alpha^2 n_k n_{k_1} \times \int m \left[\frac{\varepsilon_e |\varepsilon_{i+1}|^2 + \varepsilon_i |\varepsilon_e|^2}{|\varepsilon|^2} + 4 \frac{[\vec{k} \vec{k}_1]^2 \tau_d^2}{\alpha^2} \varepsilon_e \right] \quad (17)$$

в котором $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha(\vec{x}, \omega_k - \omega_{k_1})$, $\vec{x} = \vec{k} - \vec{k}_1$

Оно описывает индуцированное рассеяние ленгмюровских волн на частицах [3,4,5]. Первый член в (17), как мы видим, связан с изменением плотности дрейфовых электронов, в то время как второй с выносом колебаний с дрейфовой скоростью. Члены в (17), пропорциональные $\int m \varepsilon_e$, соответствуют индуцированному рассеянию на электронах, пропорциональные $\int m \varepsilon_i$ — рассеянию на ионах.

Покажем, что статистическое описание (17) имеет узкую область применимости. Как отмечалось ранее, резонансный знаменатель $|\varepsilon|^2$ соответствует ионно-звуковому резонансу (существенен при $k \tau_d > (m/M)^{1/2}$). Тогда уравнение

(17) будет справедливо, если не будет превышен порог возбуждения ионного звука. Для этого необходимо, чтобы инкремент Γ распадной неустойчивости [8] был меньше затухания ионного звука:

$$\Gamma \sim \omega_p \left(\frac{m}{M} \right)^{1/4} (k \tau_d)^{1/2} \left(\frac{W}{nT} \right)^{1/2} \ll \gamma_s$$

или

$$\frac{W}{nT} \ll k \tau_d \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_s}{\Omega_s} \right)^2$$

В области, где распады запрещены ($k \tau_d < (m/M)^{1/2}$), уравнение (17) будет справедливо, если нелинейная поправка к частоте будет мала по сравнению с ω_k . Это даёт:

$$\frac{W}{nT} \ll (k \tau_d)^2$$

§ 4. Заключение

Метод, развитый в работе, может быть использован для описания нелинейного взаимодействия высокочастотных и низкочастотных движений как в изотропной плазме, так и в замагниченной. Отметим, что этот метод не связан с гипотезой случайных фаз, а основан на усреднении по быстрому времени. При стохастическом же описании теряется ряд важных когерентных эффектов, которые существенны, например, при коллапсе [6], самофокусировке [10], на нелинейной стадии развития параметрической неустойчивости [11,12]. Кроме того, как мы видели в § 3, статистическое описание имеет узкую область применимости. Все это говорит в пользу метода, развиваемого в работе.

Автор благодарен В.Е.Захарову за полезные обсуждения и внимание к работе и А.М.Рубенчику за ценные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ЖЭТФ, 43, 2234, 1962.
2. W. Drummond, D. Pines, Nuclear Fusion, Suppl., p. 2, 423, 1962.
3. А.А.Галеев, В.И.Карпман, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 5, 20, 1965.
4. Б.Б.Кадомцев. Вопросы теории плазмы, 4, Атомиздат, 1964.
5. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме, "Наука", 1967.
6. В.Е.Захаров, ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.
7. А.Г.Литвак, В.Ю.Трахтенгерц. ЖЭТФ, 60, 1702, 1971.
8. В.Е.Захаров, ЖЭТФ, 51, 51, 689, 1966.
9. В.Е.Захаров, А.М.Рубенчик. Препринт ИЯФ № 83-70. Новосибирск, ПМТФ, № 5, 84, 1972.
10. В.И.Таланов. Изв.Вузов (радиофизика) 7, 564, 1964.
11. В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.С.Старобинец. ЖЭТФ, 59, 1290, 1970.
12. В.С.Львов, А.М.Рубенчик. Препринт ИЯФ № 57-72, Новосибирск, ЖЭТФ, 64, 1973.

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов

Подписано к печати 5.1У-73г. МН 08156

Усл. 1,4 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.

Заказ № 29 . ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротаприте в ИЯФ СО АН СССР, нв.