

Б. 50

13

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР**

ПРЕПРИНТ И Я Ф 40 - 73

Г.П.Берман, Ю.Н.Пестов, В.А.Таюрский

**НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЛЬТРА-
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПО ДЛИ-
НАМ ИСТИННОГО ПУТИ В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ**

Новосибирск

1973

Г.П.Берман, Ю.Н.Пестов, В.А.Таюрский

НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЛЬТРА-
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПО ДЛИ-
НАМ ИСТИННОГО ПУТИ В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

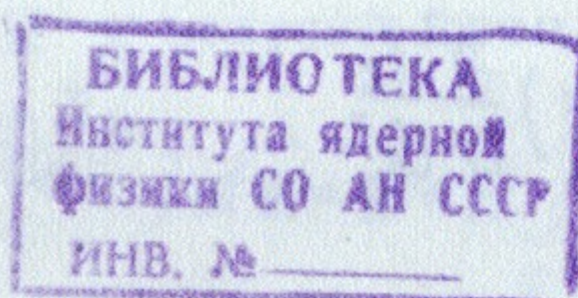
А Н Н О Т А Ц И Я

В работе описан метод нахождения функции распределения ультрарелятивистских заряженных частиц по длинам истинного пути в среде с произвольной зависимостью плотности от толщины. Найдено решение для случая зависимости $\rho(z) = \rho_0 / (1 - \beta^2 z^2)^2$. Это решение позволяет получить лучшее приближение функции распределения заряженных частиц при прохождении их через атмосферу, чем метод "эквивалентной однородной атмосферы". Результаты аналитических расчётов хорошо согласуются с расчётами прохождения заряженных частиц через вещество методом Монте-Карло.

В в е д е н и е

При прохождении через атмосферу земли космическая частица испытывает многократное кулоновское рассеяние, которое приводит к отклонению её траектории от прямолинейной. Знание истинной длины пути важно для экспериментов, связанных с измерением временных корреляций прихода различных частиц, образованных в атмосфере. Одна группа таких экспериментов относится к измерению времени задержки между частицами, находящимися на оси космического ливня и на некотором расстоянии от неё в плоскости, перпендикулярной направлению распространения ливня. Эти измерения позволяют определить высоту зарождения ливня, при этом тщательный учет кулоновского рассеяния повышает точность эксперимента.

Другая исследуемая в настоящее время возможность связана с использованием факта зависимости разности времен прихода частиц Δt , родившихся в одном акте взаимодействия в верхних слоях атмосферы, от их энергии E . В частном случае равенства энергий частиц $\Delta t \sim 1/E^2$. Следовательно форма распределения по задержкам этих событий, при известной функции распределения по длинам путей в атмосфере, позволяет определить энергетический спектр рождающихся частиц. Таким образом, в связи с растущей точностью экспериментов по физике космических лучей, важно с высокой точностью знать функцию распределения заряженных частиц при прохождении их через атмосферу.



§ 1. Определение средней длины траектории частиц

Кинетическое уравнение, описывающее стационарный процесс рассеяния ультрарелятивистских заряженных частиц в среде имеет вид [1-3]:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \theta_x \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_y \frac{\partial f}{\partial y} = \varepsilon(z) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_y^2} \right); \quad (1.1)$$

где

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{4\chi_0} \left[\frac{E_s}{\beta c p} \right]^2; \quad (1.2)$$

χ_0 - радиационная длина;

$\beta = v/c$; (в ультрарелятивистском случае $\beta \approx 1$);

E_s - константа кулоновского рассеяния.

Решение (1.1) с граничным условием:

$$f(z=0, x, y, \theta_x, \theta_y) = \delta(x) \delta(y) \delta(\theta_x) \delta(\theta_y); \quad (1.3)$$

ищем в виде:

$$f = f_x(z, x, \theta_x) \cdot f_y(z, y, \theta_y); \quad (1.4)$$

Получаем следующую граничную задачу для f_x :

$$\frac{\partial f_x}{\partial z} + \theta_x \frac{\partial f_x}{\partial x} = \varepsilon(z) \frac{\partial^2 f_x}{\partial \theta_x^2}; \quad (1.5)$$

$$f_x(z=0, x, \theta_x) = \delta(x) \delta(\theta_x);$$

Распределение частиц по x, y нас интересует в дальнейшем не будет, поэтому проинтегрируем (1.5) по всем x . Получим:

$$\frac{\partial f_x}{\partial z} = \varepsilon(z) \frac{\partial^2 f_x}{\partial \theta_x^2}; \quad (1.6)$$

$$f_x(z=0, \theta_x) = \delta(\theta_x)$$

Решением (1.6) является, как известно, функция:

$$f_x(z, \theta_x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi b(z)}} \cdot e^{-\frac{\theta_x^2}{4b(z)}}; \quad (1.7)$$

где $b(z) = \int_0^z \varepsilon(z') dz'$;

Напишем выражение для $f(z, \theta_x, \theta_y)$:

$$f(z, \theta_x, \theta_y) = \frac{1}{4\pi b(z)} \cdot e^{-\frac{(\theta_x^2 + \theta_y^2)}{4b(z)}}; \quad (1.8)$$

Элемент истинного пути частицы ds имеет вид:

$$ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}; \quad (1.9)$$

Учитывая малость углов рассеяния $\theta_{x,y} \ll 1$, получаем из (1.9)

$$ds \approx dz \left(1 + \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2}\right); \quad (1.10)$$

Умножим (1.10) на (1.8) и проинтегрируем по $\theta_{x,y}$.

$$ds = \left(1 + \frac{\langle \theta_x^2 \rangle + \langle \theta_y^2 \rangle}{2}\right) dz; \quad (1.11)$$

где

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta_y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_x^2 f(z, \theta_x, \theta_y) d\theta_x d\theta_y = 2b(z); \quad (1.12)$$

Проинтегрировав (1.11) по z , получим средний путь частицы:

$$S(z) = \int_0^z \left(1 + \frac{\langle \theta_x^2 \rangle + \langle \theta_y^2 \rangle}{2}\right) dz = z + 2 \int_0^z b(z') dz'; \quad (1.13)$$

В случае $\epsilon(z) = \epsilon_0 = \text{const}$, получаем для $S(z)$:

$$S(z) = z(1 + \epsilon_0 z); \quad (1.13.1)$$

Рассмотрим рассеяние быстрых частиц в неоднородной атмосфере. $\epsilon(z)$ имеет вид $\epsilon(z) = \epsilon_0 e^{\alpha z}$. В этом случае $S(z)$ равно:

$$S(z) = z + \frac{2\epsilon_0}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} (e^{\alpha z} - 1) - z \right]; \quad (1.13.2)$$

Вычислим теперь путь, проходимый частицей в эквивалентной атмосфере (см. рис. 1). Будем считать заданной толщину атмосферы h . Выберем такое $\bar{\epsilon}$ для эквивалентной однородной атмосферы, чтобы совпадали первые моменты функций распределения. Для атмосферы, толщиной $h = 26$ р.д., $\alpha \approx 8.7$, с помощью (1.13) получаем $\langle S-z \rangle_{\text{экср.}} = \langle X \rangle_{\text{экср.}} = 1,6 \langle X \rangle_{\text{одн.}}$ при $\bar{\epsilon} =$

$$= \epsilon_0 e^{\alpha h}.$$

Взяв для эквива-

лентной атмосферы $\bar{\epsilon} = \epsilon_0 e^{\alpha h}$ / 1.6, получим равные первые моменты. \bar{z} - начало эквивалентной атмосферы, определяется из уравнения:

$$\int_0^h \epsilon_0 e^{\alpha z} dz = \bar{\epsilon} (h - \bar{z}); \quad (1.13.3)$$

Для величины $\sigma(z)$ в эквивалентной атмосфере получаем:

$$\sigma(z) = \begin{cases} 0 & 0 \leq z \leq \bar{z} \\ \frac{\epsilon_0 e^{\alpha h}}{1.6} \cdot (h - \bar{z}), & \bar{z} \leq z \leq h \end{cases}, \quad (1.13.4)$$

Используя (1.13.4) получаем из (1.13) путь, пройденный частицей в эквивалентной атмосфере

$$S_{\text{экср.}}(h) = h + 3.2 \frac{\epsilon_0 e^{\alpha h}}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha h})^2; \quad (1.13.5)$$

Приведём выражение для $f(z, x, y, \theta_x, \theta_y)$; при

$$\epsilon(z) = \epsilon_0 = \text{const};$$

$$f = \frac{1}{(4\pi)^2 B} \cdot e^{\frac{-\theta_1(\theta_x^2 + \theta_y^2) - \theta_2(x^2 + y^2) + \theta_3(x\theta_x + y\theta_y)}{4B}} \quad (1.14)$$

Здесь

$$\theta_1 = \frac{\epsilon_0}{3} \cdot z^3; \quad \theta_2 = \epsilon_0 z; \quad \theta_3 = \epsilon_0 z^2;$$

$$4B = 4\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 = \frac{\epsilon_0}{12} \cdot z^4;$$

§ 2. Нахождение функции распределения по длинам истинных траекторий частиц

Кинетическое уравнение для $f(z, s, x, y, \theta_x, \theta_y)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} + \left(1 + \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2}\right) \frac{\partial f}{\partial s} + \theta_x \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_y \frac{\partial f}{\partial y} = \\ = \epsilon(z) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Будем решать (2.1) с граничным условием:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f = \delta(s) \delta(x) \delta(y) \delta(\theta_x) \delta(\theta_y); \quad (2.2)$$

Кроме того наложим на функцию f условие

$$\lim_{\substack{s-z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} f = 0 \quad (2.2.1)$$

Условие (2.2.1) имеет простой физический смысл: в среде отсутствуют частицы с $s = z$ при $z \neq 0$. Проинтегрируем (2.1), (2.2) по всем x, y и обозначим $s - z = \chi$. Уравнение (2.1) принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \varepsilon(z) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_y^2} \right); \quad (2.3)$$

Применим к (2.3) преобразование Фурье по θ_x, θ_y :

$$\bar{f}(z, x, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, x, \theta_x, \theta_y) e^{-i\xi\theta_x - i\eta\theta_y} d\theta_x d\theta_y \quad (2.4)$$

$$f(z, x, \theta_x, \theta_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(z, x, \xi, \eta) e^{i\xi\theta_x + i\eta\theta_y} d\xi d\eta$$

Уравнение для f имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \eta^2} \right) = -\varepsilon(z) (\xi^2 + \eta^2) \bar{f}; \quad (2.5)$$

$$\bar{f}(z \neq 0, x=0) = 0; \quad \bar{f}(z=0) = \frac{1}{2\pi};$$

Применим к (2.5) преобразование Лапласа по x :

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \int_0^{\infty} \bar{f} e^{-px} dx \\ \bar{f} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi(p) e^{px} dx \end{aligned} \quad (2.6)$$

Интегрирование в (2.6) идет справа от всех полюсов функции $\Phi(p)$. Задача для $\Phi(p)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{p}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi &= -\varepsilon(z) (\xi^2 + \eta^2) \Phi \\ \Phi(z=0) &= \frac{1}{2\pi}; \end{aligned} \quad (2.7)$$

Сделаем в (2.7) замену: $\xi^2 + \eta^2 = t$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - 2\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(t \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\varepsilon(z) \cdot t \cdot \phi \quad (2.8)$$

Решением (2.8) с условием из (2.7) является функция:

$$\phi(z, t) = e^{\alpha_1(z) + \alpha_2(z)t} \quad (2.9)$$

где α_1, α_2 являются решением граничной задачи:

$$\frac{d\alpha_1}{dz} = 2\rho\alpha_2; \quad \alpha_1(0) = \ln \frac{1}{2\pi}; \quad (2.10)$$

$$\frac{d\alpha_2}{dz} = 2\rho\alpha_2^2 - \varepsilon(z); \quad \alpha_2(0) = 0;$$

Таким образом, решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$f = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp d\xi d\eta e^{\rho x + i\xi\theta_x + i\eta\theta_y + \alpha_1(z) + \alpha_2(z)(\xi^2 + \eta^2)} \quad (2.11)$$

Проинтегрируем (2.11) по ξ и η :

$$f = \frac{\pi}{(2\pi)^2 i |\alpha_2|} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} dp e^{\rho x - \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{4|\alpha_2|} + \alpha_1(z, p)}; \quad (2.12)$$

Непосредственным дифференцированием можно показать, что (2.12) действительно является решением уравнения (2.3). Используя определение δ -функции и граничные условия в (2.10) можно показать, что решение (2.12) удовлетворяет граничному условию (2.2). Проинтегрируем функцию f в (2.12) по углам:

$$\begin{aligned} W(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_x d\theta_y f(x, z, \theta_x, \theta_y) = \\ &= \frac{1}{i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\rho x + \alpha_1(p, z)} dp; \end{aligned} \quad (2.13)$$

Введем функцию

$$\Psi(z, \rho) = \exp(-2\rho \int_0^z \alpha_2(z') dz'); \quad (2.14)$$

Используя (2.10) и (2.14) можно показать, что функция $\alpha_1(z, \rho)$ в (2.13) представляется в виде:

$$\alpha_1(z, \rho) = \ln \frac{1}{2\pi \Psi(z, \rho)}; \quad (2.15)$$

где $\Psi(z, \rho)$ является решением уравнения типа Шредингера:

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} - 2\rho \varepsilon(z) \Psi = 0; \quad (2.16)$$

с граничными условиями:

$$\Psi(z=0) = 1; \quad \Psi'(z=0) = 0;$$

Выражение (2.13) для $W(x, z)$ принимает вид:

$$W(x, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\rho x}}{\Psi(z, \rho)} d\rho; \quad (2.17)$$

Рассмотрим случай, когда (2.17) можно точно проинтегрировать

$$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_0}{(1 - \beta^2 z^2)z}; \quad (2.18)$$

Такой выбор зависимости $\varepsilon(z)$ соответствует росту плотности рассеивающей среды с её толщиной. К сожалению, для

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 e^{2z} \quad (2.17) \text{ точно не интегрируется.}$$

Решение уравнения (2.16) с учетом граничных условий и выражения (2.18) для $\varepsilon(z)$ имеет вид:

$$\Psi(z, \rho) = \sqrt{1 - \beta z} \operatorname{ch} \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{2\rho\varepsilon_0}{\beta z}}}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta z}{1 - \beta z} \right) \right] \quad (2.19)$$

Подставим выражение для $\Psi(z, \rho)$ в (2.17); контур интегрирования в (2.17) представлен на рис.2. Нули функции $\Psi(z, \rho)$,

p_n находятся в точках

$$p_n = -\frac{\beta^2}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{\ln^2 \left(\frac{1+\beta z}{1-\beta z} \right)} \right]; \quad n=0, 1, \dots$$

Окончательно, получаем:

$$W(x, z) = \frac{2\pi\beta^2 \ell^{-\frac{x\beta^2}{2\epsilon_0}}}{\epsilon_0 \sqrt{1-\beta^2 z^2} \ln^2 \left(\frac{1+\beta z}{1-\beta z} \right)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \ell^{-\frac{\pi^2 (2n+1)^2 \beta x}{2\epsilon_0 \ln^2 \left(\frac{1+\beta z}{1-\beta z} \right)}}; \quad (2.20)$$

Можно показать, что $\int_0^{\infty} W(x, z) dx = 1$;

Приведем выражение для первых моментов:

$$\langle x \rangle = \frac{\epsilon_0 z}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta z}{1-\beta z} \right); \quad (2.21)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{32\pi\epsilon_0^2}{\beta^4 \sqrt{1-\beta^2 z^2} \ln^2 \left(\frac{1+\beta z}{1-\beta z} \right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{\left[1 + \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{\ln^2 \left(\frac{1+\beta z}{1-\beta z} \right)} \right]^3};$$

На рис. 3 показано поведение этих моментов в зависимости от $\gamma = \beta z$.

Введем замену:

$$y = \frac{4\beta^2 x}{\epsilon_0 \ln^2 \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right)}; \quad V(y, \gamma) = \frac{\epsilon_0 \sqrt{1-\gamma^2} \ln^{\frac{2}{1-\gamma}}}{4\beta^2} W(x, z); \quad (2.22)$$

В обозначениях (2.22) выражение (2.20) принимает вид:

$$V(y, \gamma) = e^{-\frac{y}{\gamma} \ln^{\frac{2}{1-\gamma}}} V^{(0)}(y); \quad (2.23)$$

где

$$V^{(0)}(y) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) e^{-\frac{\pi^2 (2n+1)^2 y}{2}} \quad (2.24)$$

Функция $V^{(0)}(y)$ является перенормированной согласно (2.22) при $\sigma \rightarrow 0$ функцией распределения частиц в однородной среде, $(\epsilon(z) = \epsilon_0 = \text{const})$ и была найдена в /4/. Истинная функция распределения $W^{(0)}(x, z)$ связана теперь с $V^{(0)}(y)$ следующим образом:

$$W^{(0)}(x, z) = \frac{V^{(0)}(y)}{\epsilon_0 z^2}; \quad x = \epsilon_0 z^2 y. \quad (2.24.1)$$

Исследуем более подробно свойства функции $W^{(0)}(x, z)$.

Выражение для $W^{(0)}(x, z)$ можно представить в виде:

$$W(x, z) = \frac{\pi}{4\epsilon_0 z^2} \cdot \frac{\partial \theta_1(v/q)}{\partial v} \Big|_{v=0}; \quad (2.25)$$

$$q = e^{-4y}; \quad y = \frac{\pi^2 x}{8\epsilon_0 z^2};$$

где $\theta_1(v/q)$ - тэта функция (см. /5,6/)

$$\theta_1(v/q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)\pi v \quad (2.26)$$

$$q = \exp(i\bar{z}); \quad \bar{z} = \frac{i\pi x}{2\epsilon_0 z^2};$$

Используя формулу преобразований для $\theta_1(v/q)$, /6/:

$$\theta_1(v/q) = i(-i\bar{z})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi v^2}{\bar{z}}} \theta_1\left(\frac{v}{\bar{z}} \Big| -\frac{1}{\bar{z}}\right), \quad (2.27)$$

получаем для $W^{(0)}(x, z)$ разложение по обратным степеням x :

$$W^{(0)}(x, z) = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{\pi}} \frac{z}{x^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) e^{-\frac{\varepsilon_0 z^2 (2n+1)^2}{2x}} \quad (2.28)$$

Кроме того (см. [5]) $W^{(0)}(x, z)$ можно представить в виде:

$$W^{(0)}(x, z) = \frac{\pi}{2\varepsilon_0 z^2} e^{-\frac{\pi^2 x}{8\varepsilon_0 z^2}} G^3, \quad (2.29)$$

где

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{\pi^2 x n^2}{\varepsilon_0 z^2}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$$

Функция G имеет вид [5]:

$$G = [2\pi^{-3} q^{-1/2} k k' K^3]^{1/6}; \quad (2.30)$$

K - эллиптический интеграл 1-го рода; k - модуль,

$$q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right)$$

Найдем асимптотику выражения (2.29) при $x \rightarrow \infty$:

$$W^{(0)}(x, z) \approx \frac{\pi}{2\varepsilon_0 z^2} e^{-\frac{\pi^2 x}{8\varepsilon_0 z^2}} \quad (2.31)$$

Выражение (2.31) совпадает с первым членом выражения (2.24.1)

Найдем асимптотику (2.29) при $x \rightarrow 0$:

$$K \approx \ln 4/k'; \quad K' \approx \pi/2; \quad q \rightarrow 1$$

Сравнивая выражения для q :

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} = e^{-\frac{\pi x}{2\varepsilon_0 z^2}};$$

получаем

$$K' = 4e^{-\frac{\epsilon_0 z^2}{x}}; \quad K = \sqrt{1 - 16 \exp\left(-\frac{2\epsilon_0 z^2}{x}\right)}$$

таким образом, для величины G из (2.29) имеем:

$$G \approx \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\pi}} \frac{z}{x^{1/2}} e^{-\frac{\epsilon_0 z^2}{6x}}$$

или для $W^{(0)}(x, z)$:

$$W^{(0)}(x, z) \approx \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\pi}} \frac{z}{x^{3/2}} e^{-\frac{\epsilon_0 z^2}{2x}}; \quad (2.32)$$

Выражение (2.32) является первым членом разложения (2.28).

Отметим, что при $\delta \rightarrow 0$, выражения для моментов (2.21) принимают вид:

$$\langle x \rangle = \epsilon_0 z^2$$

что совпадает с (1.13.1)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{5}{3} \epsilon_0^2 z^4$$

последнее выражение совпадает с результатом работы [7].

Значения функции $U(y, \delta)$ затабулированы (см. табл. 1). На рис. 4 функция $U(y, \delta)$ представлена для различных значений параметра δ .

Приведем квазиклассическое решение уравнения (2.16):

$$\Psi(z, p) = \sqrt{\frac{\epsilon(z)}{\epsilon(0)}} \operatorname{ch} \int_0^z \sqrt{2p\epsilon(z')} dz' \quad (2.33)$$

причем, необходимо выполнение условия $\frac{d\epsilon}{dz} \Big|_{z=0} = 0$

Вычисление $W(x, z)$ в этом случае проводится в полной аналогии с предыдущим.

Было проведено сравнение функций распределения, полученных аналитически, с результатами расчётов прохождения заряженных частиц через вещество методом Монте-Карло (см.рис.4). В расчётах по Монте-Карло моделировалось многократное рассеяние частиц по теории Мольера / 8 /, причём учитывался 1-ый гауссовский член функции распределения. Расчёты выполнены для $\epsilon(z) = \text{const}$ (рис.4-б), для $\epsilon(z) = \epsilon_0 / (1 - \beta^2 z^2)^2$ (рис.4-в).

Результаты аналитических расчётов находятся в хорошем согласии с этими данными.

Также выполнены монте-карловские расчёты для прохождения частиц через атмосферу $\epsilon(z) = \epsilon_0 \exp(\alpha z)$ для толщины атмосферы $\bar{z} = 26$ рад.дл. (рис.5, гистограмма 1). Эти расчёты сравниваются с аналитическими вычислениями $W(\chi, z)$ для эквивалентной однородной атмосферы с параметрами, определенными с помощью (1.13.3) (кривая 2). Также на рис.5 построена функция $W(\chi, z)$ для случая зависимости $\epsilon(z)$ (2.18) (кривая 3). Параметры $\bar{z}, \beta, \epsilon_0$ подобраны из условий равенства полного количества вещества, проходящего в "эквивалентной неоднородной атмосфере", первого и второго моментов функции распределения, соответствующим величинам реальной атмосферы. При $\bar{z} = 26$ рад.дл. эти параметры равны: $\bar{z} = 4.8, \beta = 0.043, \epsilon_0 = 0.166 \cdot \epsilon_{\text{атм.}}(h), \delta = 0.9$. Как видно из рис.5, последняя кривая даёт довольно хорошее приближение к действительной функции распределения в атмосфере с экспоненциально меняющейся плотностью.

В заключение выражаем благодарность Б.В.Чирикову за внимание к работе и обсуждение результатов.

Л и т е р а т у р а

1. А.Р.Кимель, О.Н.Салимов. ЖТФ, 41, 12, 628 (1971).
2. Л.Р.Кимель, О.Н.Салимов. ЖТФ, 42, 6, 1154 (1972).
3. *L. Euges, Phys. Rev.*, 74, 1534 (1948).
4. *C.N. Yang, Phys. Rev.*, 84, 3, 599 (1951).
5. Г.Бейтман, А.Эрдейн. ВТФ, 3, (1965).
6. Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон. Курс совр.анализа, 2, 1 (1963).
7. И.Померанчук. ЖЭТФ, 18, 8, 759 (1948).
8. *H.A. Bethe, Phys. Rev.*, 89 (1953), 1256.

Таблица 1

δ	0	0.3	0.5	0.7	0.9
0.05	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
0.10	0.170	0.169	0.167	0.164	0.153
0.15	0.490	0.486	0.479	0.463	0.416
0.20	0.732	0.725	0.710	0.679	0.590
0.25	0.864	0.854	0.832	0.786	0.659
0.30	0.917	0.904	0.877	0.819	0.663
0.35	0.923	0.908	0.876	0.810	0.632
0.40	0.903	0.886	0.851	0.777	0.586
0.45	0.870	0.851	0.813	0.734	0.534
0.50	0.829	0.810	0.769	0.687	0.482
0.60	0.743	0.722	0.679	0.593	0.388
0.70	0.660	0.639	0.594	0.507	0.309
0.80	0.585	0.563	0.518	0.433	0.246
0.90	0.517	0.495	0.452	0.369	0.195
1.00	0.457	0.436	0.393	0.314	0.154
1.20	0.357	0.337	0.298	0.228	0.097
1.40	0.279	0.261	0.226	0.165	0.061
1.60	0.218	0.202	0.171	0.120	0.039
1.80	0.170	0.156	0.130	0.087	0.024
2.0	0.133	0.121	0.099	0.063	0.015
2.4	0.081	0.072	0.056	0.033	0.006
2.8	0.050	0.043	0.033	0.017	0.002
3.2	0.030	0.026	0.019	0.009	0.001
4.0	0.011	0.009	0.006	0.003	0.0001

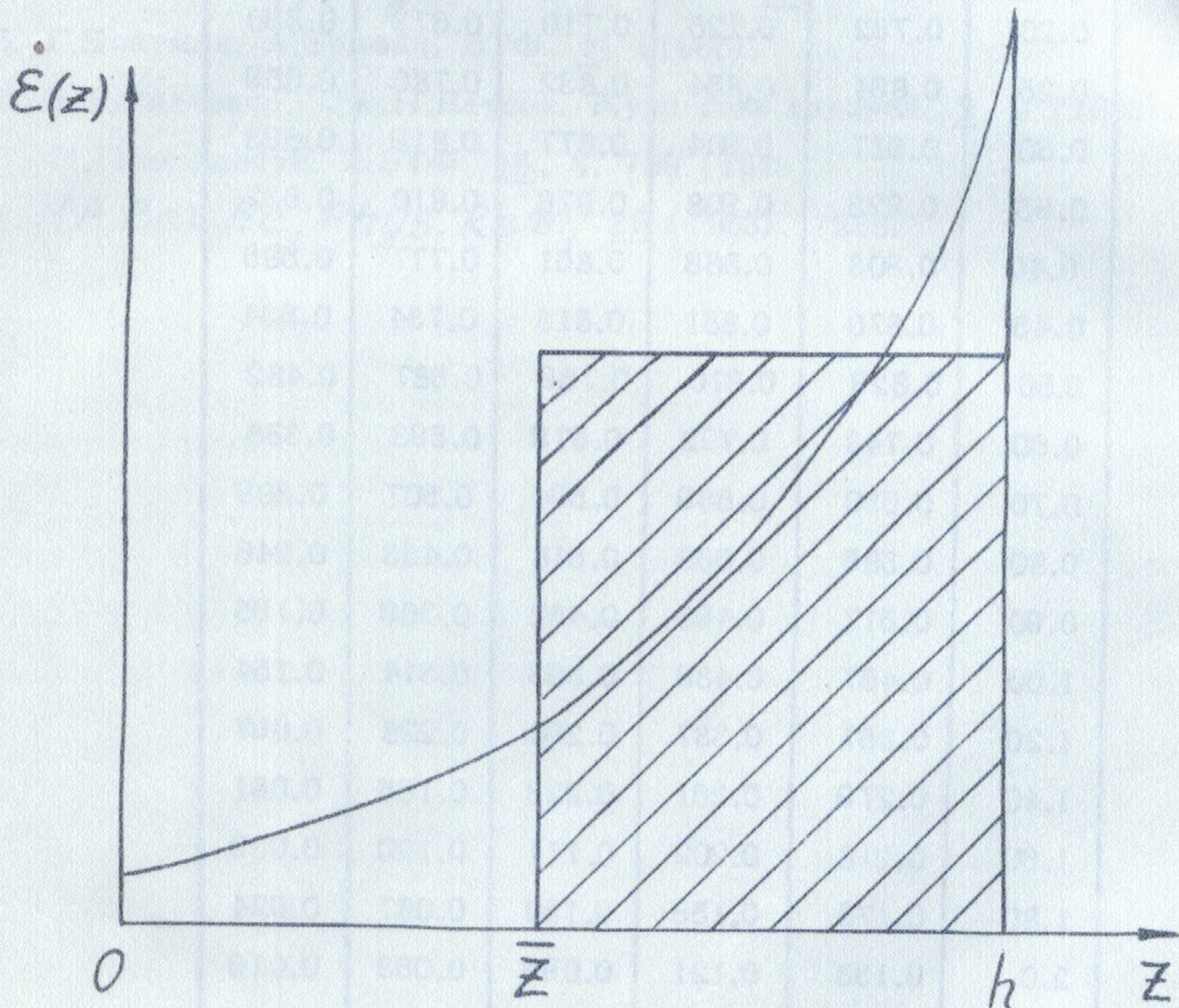


Рис.1. Экспоненциальная атмосфера $\epsilon = \epsilon_0 e^{\alpha z}$ и соответствующая ей эквивалентная атмосфера $\epsilon = \tilde{\epsilon} = \text{const}$

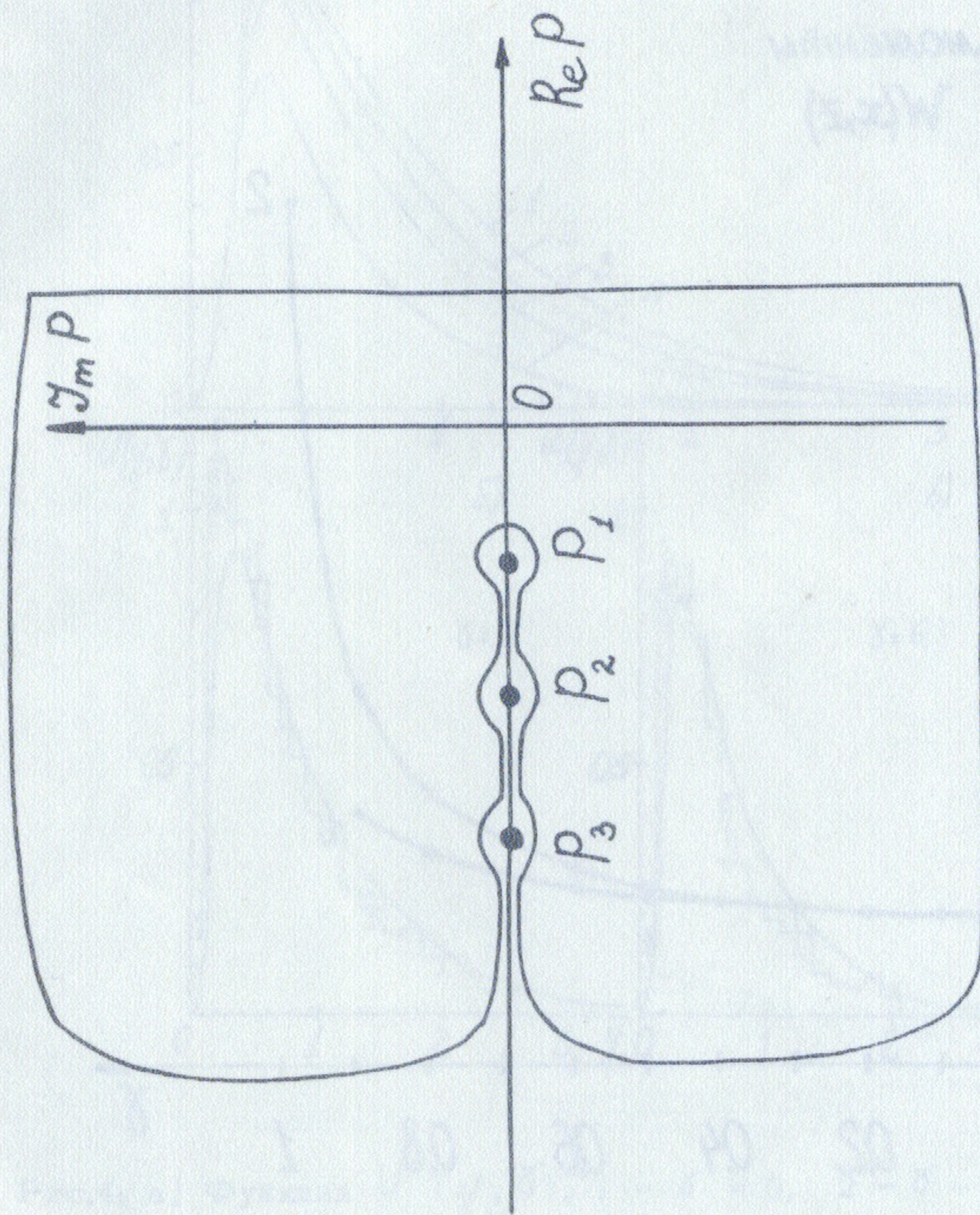


Рис.2. Контур интегрирования в (2.17)

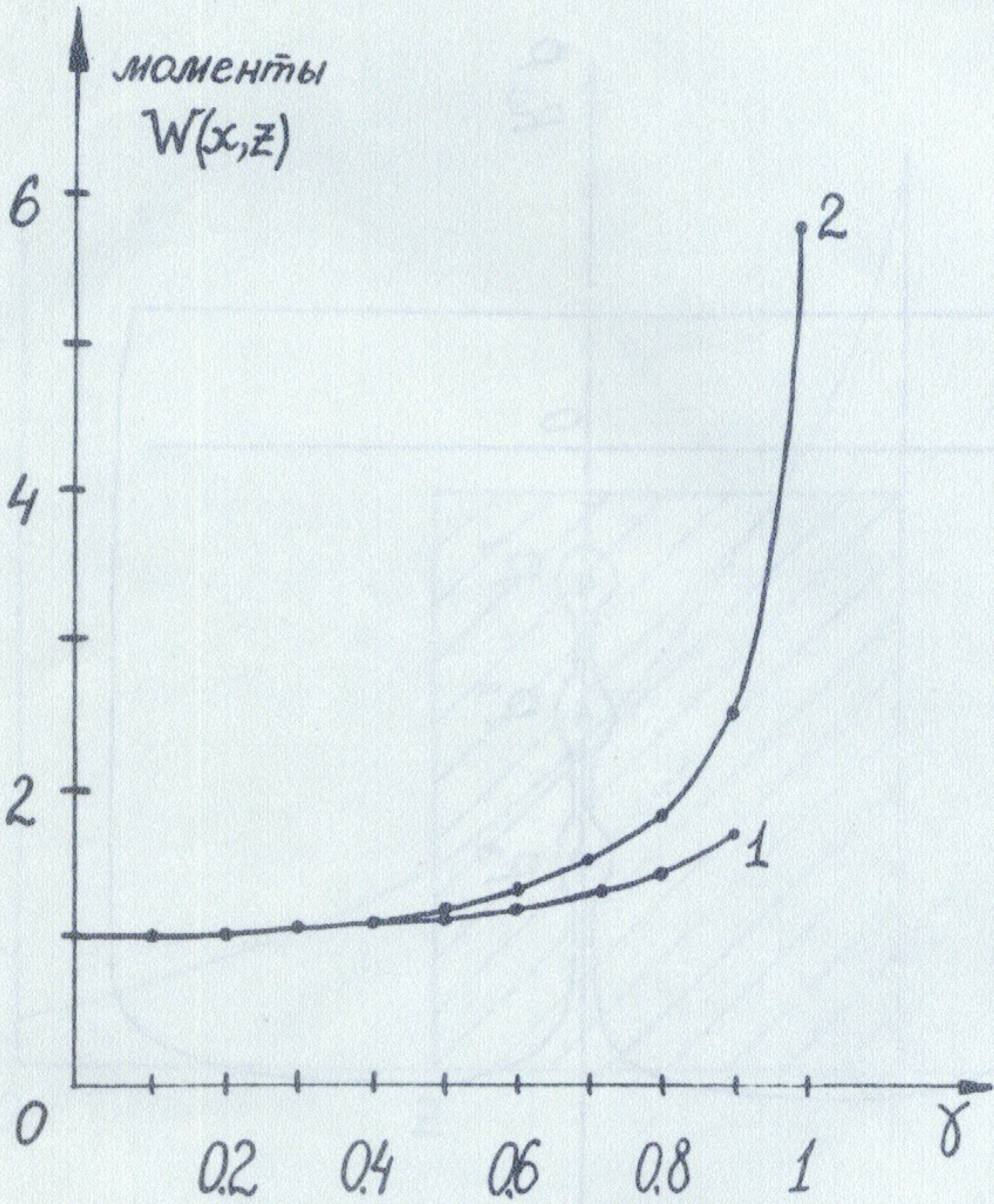


Рис.3. 1 - график зависимости $\langle x(\delta) \rangle / \langle x(0) \rangle$ от δ
 2 - график зависимости $\langle x^2(\delta) \rangle / \langle x^2(0) \rangle$ от δ

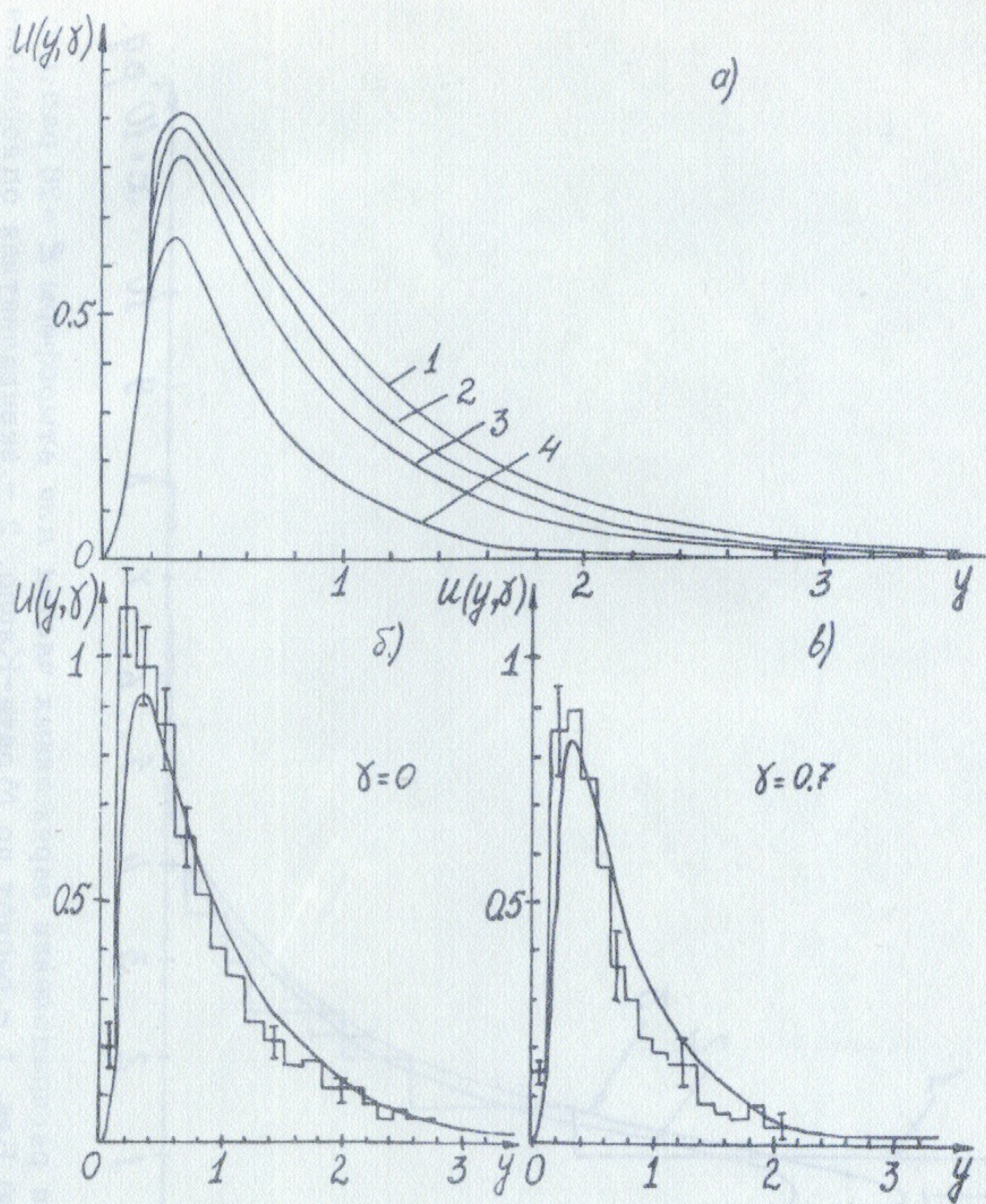


Рис.4. а) Функция $U(y, \delta)$. 1 - $\delta = 0$, 2 - $\delta = 0,5$,
 3 - $\delta = 0,7$, 4 - $\delta = 0,9$.
 б) Функция $U(y, \delta)$ и результаты расчётов по Монте-
 Карло для $\delta = 0$.
 в) Функция $U(y, \delta)$ и результаты расчётов по Монте-
 Карло для $\delta = 0,7$.

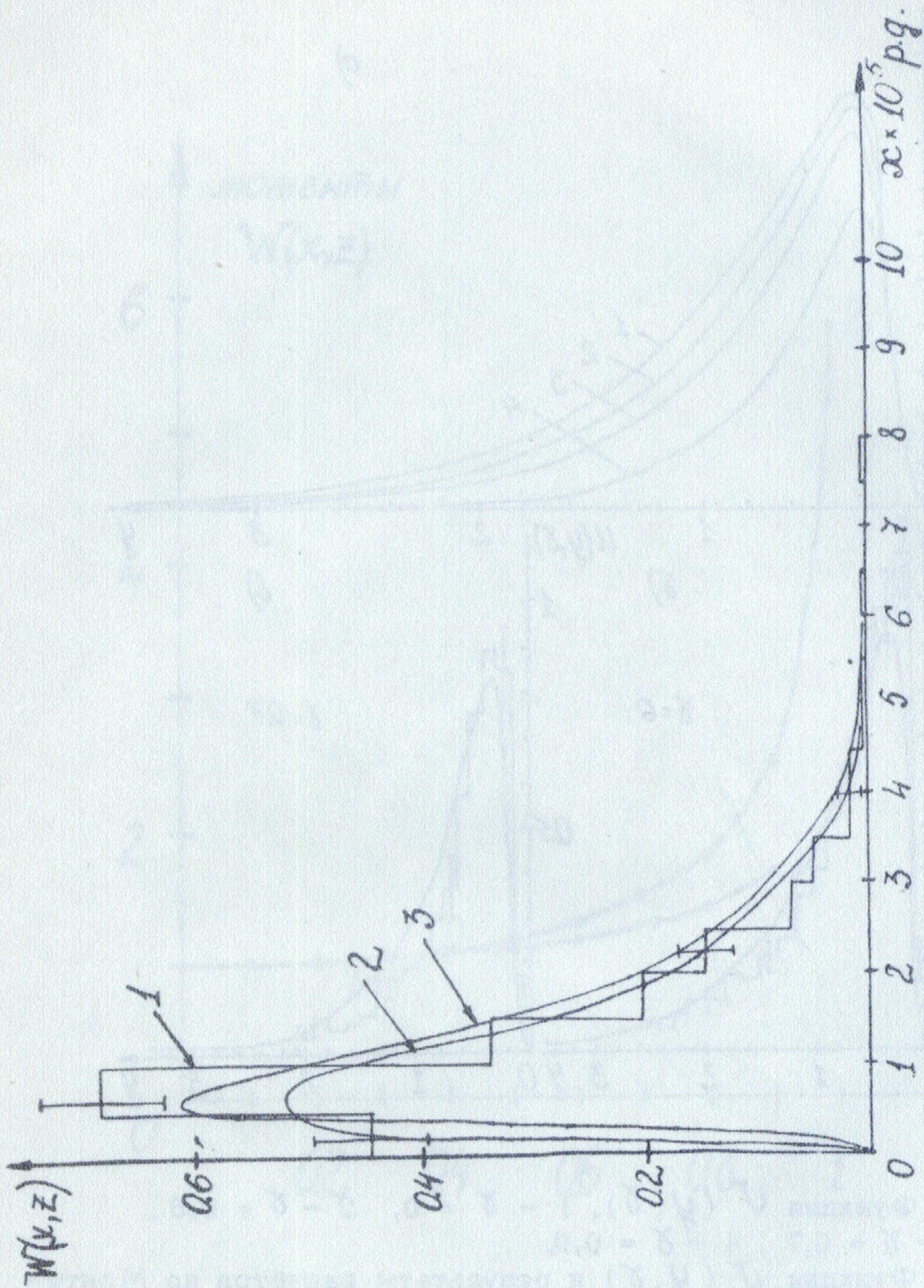


Рис. 5. Функции распределения заряженных частиц для атмосферы $z^2 = 26$ рад. дл.; $E_0 = 30$ Бэв. 1 - расчёт по Монте-Карло, 2 - эквивалентная однородная атмосфера ($E = \text{const}$), 3 - эквивалентная неоднородная атмосфера $E = E_0 / (1 - \beta^2 z^2)^2$;

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати 18/У-73г. МН 08061
Усл. 1 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 40 . ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротапринтере в ИЯФ СО АН СССР, нв.