

20  
**И Н С Т И Т У Т**  
**ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

**ПРЕПРИНТ И Я Ф 57 - 73**

**В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко**

**КИНЕТИКА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ**  
**МАГНИТОТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ**  
**БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ**

**Новосибирск**

**1973**

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

## КИНЕТИКА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАГНИТОТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

### А Н Н О Т А Ц И Я

Обсуждается функция распределения  $\rho(\varepsilon, t)$  по энергии  $\varepsilon$  частиц, излучающих в магнитном поле время  $t$  с учетом квантовых поправок при  $\chi \ll 1$ . В основу рассмотрения положены моменты распределения по энергии в момент времени  $t$ , которые удалось вычислить аналитически. По этим моментам с помощью интерполяционной процедуры восстановлена функция  $\rho(\varepsilon, t)$ . Найдены также с учетом квантовых поправок, интегральные, спектральные и угловое распределения излучения за все время нахождения частицы в поле.



KINETICS AND INTEGRAL CHARACTERISTICS OF A  
MAGNETIC BREMSSTRAHLUNG AT HIGH ENERGY

V.N.Baier, V.M.Katkov, V.M.Strakhovenko

A b s t r a c t

An energy distribution function  $\varrho(\varepsilon, t)$  (number of particles with energy  $\varepsilon$ ) for electrons radiating in a magnetic field during time  $t$  has been discussed taking into account quantum correction at  $\chi(\varepsilon) \ll 1$  ( $\chi(\varepsilon) = \frac{H}{H_0} \frac{\varepsilon}{m c^2}$ ,  $H$  is the magnetic field,  $H_0 = m^2 c^3 / e \hbar = 4.41 \cdot 10^{13}$  Oe is the critical field,  $m$  is the electron mass). The consideration is based on distribution momenta  $\langle \varepsilon^m(t) \rangle = \int \varrho(\varepsilon, t) \varepsilon^m d\varepsilon$  which it's appears one can calculate analytically (see Eq.(2.31) for  $\langle \varepsilon^m(t) \rangle$  up to terms  $\sim \chi^2$  and Eqs.(2.31), (2.32) for  $\langle \varepsilon(t) \rangle$  up to terms  $\sim \chi^3$ ). Using this momenta and interpolation procedure one can obtain distribution function (see Eq.(4.6) up to terms  $\sim \chi$  and Eqs.(4.7)-(4.9) up to terms  $\sim \chi^2$  and also Fig.4). Integral spectral distribution of radiated photons (see Eq.(3.2) and Fig.1,2) and their angular distribution (see Eq.(3.3) and Fig.3) for all the time have been also found taking into account quantum correction.



## В В Е Д Е Н И Е

В последнее время наблюдается новая вспышка интереса к задаче магнитотормозного излучения ультрарелятивистских частиц. Это связано, с одной стороны, с планируемыми на крупнейших ускорителях опытами по получению жестких фотонов при прохождении электронов большой энергии (до сотен Гэв) через мегагауссное магнитное поле (магнитные конверторы [1]); с другой стороны, имеющиеся указания на существование очень сильных полей (до  $10^{12}$  эрстед) в астрономических объектах [2] делают важным знание характеристик излучения релятивистских частиц в таких полях. Мгновенные характеристики излучения (спектр, угловое распределение, поляризация и т.д.) частиц с данной энергией хорошо изучены как в классической, так и в квантовой области [3-5]. Однако, если рассматривается задача магнитотормозного излучения частицы, находящейся в магнитном поле достаточно длительное время и не получающей при этом энергии, то основной интерес представляют интегральные характеристики излучения частицы, прошедшей определенный путь в поле<sup>х)</sup> (интегральные спектр и угловое распределение излучения, разброс частиц по энергии и т.д.). Для анализа этой проблемы необходимо решать соответствующую кинетическую задачу. Рассмотрение в классической области оказывается достаточно простым. Однако в указанных выше условиях параметр, характеризующий квантовомеханические эффекты,  $\chi(\epsilon) = \frac{H}{H_0} \cdot \frac{\epsilon}{m}$ , ( $\epsilon$  - энергия частицы,  $H$  - напряженность магнитного поля,  $H_0 = \frac{m^2 c^3}{e\hbar} = 4,41 \cdot 10^{13}$  э - критическое поле) не является пренебрежимо малым и необходимо использовать квантовомеханический подход, что в большой степени усложняет решение кинетической задачи. В такой постановке задача представляет также и теоретический интерес. Настоящая работа посвящена указанному выше кругу вопросов.

В разделе II сформулирована методика вычислений и найдены моменты распределения частиц по энергии в момент времени  $t$ . В разделе III получены интегральные характеристики излучения - спектральное и угловое распределения излучения за все время нахождения частицы в поле с учетом квантовых эффектов. В разделе IV обсуждается вид функции распределения частиц  $\rho(\epsilon, t)$ .

х) Отдельные задачи для такой постановки рассматривались в работах [6-10].



## II. Моменты распределения

Явления, происходящие при движении заряженной частицы большой энергии в магнитном поле, существенно зависят от значения параметра  $\chi$ . При  $\chi \gg 1$  излученные фотоны могут (с вероятностью того же порядка, что и вероятность излучения) рождают пары частиц, т.е. должна рассматриваться задача об электронно-фотонном ливне. При  $\chi \lesssim 1$  вероятность рождения пары экспоненциально подавлена и достаточно решать задачу об излучении заряженной частицы. Именно к этой области относятся известные в настоящее время приложения и ею мы ограничимся в данной работе.

Кинетическое уравнение для функции распределения  $\rho(\varepsilon, t)$  по энергии  $\varepsilon$  электрона, находящегося в магнитном поле время  $t$  имеет вид

$$\frac{\partial \rho(\varepsilon, t)}{\partial t} = -W(\varepsilon)\rho(\varepsilon, t) + \int_{\varepsilon}^{\infty} W(\varepsilon, \varepsilon')\rho(\varepsilon', t) d\varepsilon' \quad (2.1)$$

Здесь  $W(\varepsilon, \varepsilon')$  — плотность вероятности перехода электрона из состояния с энергией  $\varepsilon'$  в состояние с энергией  $\varepsilon$  с излучением фотона с частотой  $\omega = (\varepsilon' - \varepsilon)/\hbar$ :

$$W(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{2m^2}{\sqrt{3}\pi\hbar} \cdot \frac{1}{\varepsilon'^2} \left\{ \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)^2}{\varepsilon\varepsilon'} K_{\frac{2}{3}}(\nu) + \int_{\nu}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(y) dy \right\} \quad (2.2)$$

где  $\nu = 2(\varepsilon' - \varepsilon)/3\varepsilon\chi(\varepsilon')$

$$W(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} W(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' \quad (2.3)$$

Мы будем рассматривать магнитные поля, удовлетворяющие неравенству  $H \ll H_0$ , в которых движение частицы большой энергии всегда является квазиклассическим<sup>х)</sup>, это, в частности означает, что энергетический спектр частицы является квазинепрерывным. В силу этого достаточно пользоваться кинетическим уравнением в кван-

х) Главное квантовое число  $n = \frac{H_0}{2H}(\gamma^2 - 1)$ ,  $\gamma = \frac{v}{c}$ ; в принятых условиях, очевидно,  $n \gg 1$ .



зиклассической форме (2.1).

Выражение (2.1) есть уравнение баланса для числа частиц в энергетическом представлении. Такого типа уравнения встречаются, например, в задаче об электронно-фотонном каскаде в среде, однако решение его в магнитном поле сильно затруднено вследствие сложного характера ядра (2.2).

Пусть пучок электронов, распределение по энергиям в котором описывается функцией  $\Phi(\epsilon)$ , входит в магнитное поле перпендикулярно  $H$  в момент времени  $t = 0$ , т.е.  $\rho(\epsilon, 0) = \Phi(\epsilon)$ .  
Определим

$$F_{\Phi}(t) = \int_0^{\infty} \rho(\epsilon, t) g(\epsilon) d\epsilon \quad (2.4)$$

причем, очевидно,

$$F_{\Phi}(0) = \int_0^{\infty} \Phi(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon \quad (2.5)$$

где  $g(\epsilon)$  — произвольная функция энергии. Если в (2.4) положить  $g(\epsilon) = \epsilon^m$ , то мы получим моменты распределения, знание которых дает значительную физическую информацию. В случае, когда известны все моменты, можно восстановить, в принципе, функцию распределения.

Продифференцируем выражение (2.4)  $n$  раз по времени и выразим входящую в правую часть производную по времени с помощью формулы (2.1).

$$\frac{\partial^n F_{\Phi}(t)}{\partial t^n} = \int_0^{\infty} \frac{\partial^{n-1} \rho(\epsilon', t)}{\partial t^{n-1}} [\Psi g(\epsilon')] d\epsilon' \quad (2.6)$$

где  $\Psi$  — линейный интегральный оператор

$$[\Psi g(\epsilon')] = \int_0^{\epsilon'} w(\epsilon, \epsilon') [g(\epsilon) - g(\epsilon')] d\epsilon \quad (2.7)$$

повторяя эту процедуру, получим:

$$\frac{\partial^n F_{\Phi}(t)}{\partial t^n} = \int_0^{\infty} \rho(\epsilon', t) [\Psi^n g(\epsilon')] d\epsilon' \quad (2.8)$$



причем 
$$\begin{aligned} [\Psi^n g(\varepsilon')] &= \int_0^{\varepsilon'} W(\varepsilon, \varepsilon') [\Psi^{n-1} g(\varepsilon)] d\varepsilon - \\ - W(\varepsilon') [\Psi^{n-1} g(\varepsilon')] &= \int_0^{\varepsilon'} W(\varepsilon, \varepsilon') \{ [\Psi^{n-1} g(\varepsilon)] - [\Psi^{n-1} g(\varepsilon')] \} d\varepsilon \end{aligned} \quad (2.9)$$

Разлагая функцию  $F_{\Phi}(t)$  в ряд Тейлора и воспользовавшись (2.8), (2.5), найдем

$$F_{\Phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^{\infty} \Phi(\varepsilon) [\Psi^n g(\varepsilon)] d\varepsilon = \int_0^{\infty} d\varepsilon \Phi(\varepsilon) [e^{t\Psi} g(\varepsilon)] \quad (2.10)$$

Если начальный пучок является монохроматическим ( $\Phi(\varepsilon) = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$ ), то

$$F_{\varepsilon_0}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [\Psi^n g(\varepsilon_0)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \Psi_n(\varepsilon_0) \quad (2.11)$$

где  $\Psi_n(\varepsilon_0)$  удовлетворяет, в соответствии с (2.9), соотношению

$$\Psi_n(\varepsilon_0) = \int_0^{\varepsilon_0} d\varepsilon W(\varepsilon, \varepsilon_0) [\Psi_{n-1}(\varepsilon_0) - \Psi_{n-1}(\varepsilon)], \quad \Psi_0 = g(\varepsilon_0) \quad (2.12)$$

Приведенные результаты справедливы для произвольного уравнения типа (2.1). Теперь перейдем к рассмотрению уравнения с ядром (2.2), записав его в виде:

$$W(u, \varepsilon_0) = \frac{\alpha \sqrt{3} m \cdot H}{\pi \hbar} \cdot \frac{1}{H_0} \frac{1}{8\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} ds \Gamma(-\frac{s}{2} - \frac{1}{3}) \Gamma(-\frac{s}{2} + \frac{1}{3}) \quad (2.13)$$

$$\frac{u^s}{(1+u)^3} (3\chi_c)^{-(s+1)} \cdot \left[ \left(1 - \frac{2}{3s}\right)(1+u) + u^2 \right], \quad c > \frac{2}{3}$$

где  $\chi_c = \chi(\varepsilon_0)$ , здесь мы перешли к переменной  $u = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon}$ , часто используемой в задаче магнитотормозного излучения, и воспользовались интегральным представлением  $K$ -функций (см. [11], стр. 672).



Найдем моменты распределения по энергии, когда  $g(\epsilon) = \epsilon^m$ . Тогда величина  $\Psi_n(\epsilon_0)$ , вычисляемая согласно формулам (2.12), (2.13), может быть представлена в виде  $n$ -кратного контурного интеграла, причем на каждом шаге рекуррентной процедуры в (2.12) возникают интегралы следующего вида:

$$J_{(P_n, S_n)} = \int_0^{\infty} \frac{du \cdot u^{S_n}}{(1+u)^3} \cdot \left[ \left(1 - \frac{2}{3S_n}\right)(1+u) + u^2 \right] \cdot [1 - (1+u)^{P_n}] \quad (2.14)$$

где  $S_n$  - переменная  $n$ -го интегрирования при использовании представления (2.13),  $(-P_n)$  - степень энергии (входящей через величину  $\chi$ ), возникающая к данному шагу итераций рекуррентного соотношения. Вычисляя интеграл (2.14), найдем

$$J_{(P_n, S_n)} = -\frac{\Gamma(S_n)}{6} \cdot \left\{ \Gamma(1-S_n)(3S_n^2 + 3S_n + 10) + \frac{6\Gamma(-S_n - P_n)}{\Gamma(3 - P_n)} \cdot [S_n^3 + S_n^2(P_n + 1) + \frac{S_n}{3}(3P_n^2 - 8P_n + 10) - \frac{2}{3}P_n(P_n - 2)] \right\} \quad (2.15)$$

Используя (2.15), получаем следующее выражение для  $\Psi_n(\epsilon_0)$  (2.12) в рассматриваемом случае  $g(\epsilon) = \epsilon^m$ :

$$\Psi_n(\epsilon_0) = \epsilon_0^m \left( -\frac{2m\sqrt{3}}{24\pi\hbar} \cdot \frac{H}{H_0} \right)^n \cdot \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} ds_n \dots \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} ds_1 \cdot \mathcal{D}(s_1) \dots \mathcal{D}(s_n) \Psi(s_1, s_2, \dots, s_n) \cdot \Psi(s_1, s_2, \dots, s_{n-2}, -1, s_{n-1}) \cdot \Psi(s_1, s_2, \dots, s_{n-3}, -1, -1, s_{n-2}) \dots \Psi(s_1, -1, \dots, -1, s_2) \cdot \Psi(-1, -1, \dots, -1, s_1) \quad (2.16)$$

где  $\mathcal{D}(s) = \Gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(-\frac{s}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma(s) \cdot (3\chi_0)^{-(s+1)}$

$$\Psi(s_1, s_2, \dots, s_n) = -\frac{6}{\Gamma(S_n)} J_{(P_n, S_n)} \equiv \tau(P_n, S_n) \quad (2.17)$$

$$P_n = n - (m+1) + s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}$$



Интегрирование в формуле (2.16) необходимо проводить в порядке  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Вид  $P_n$  вытекает из следующих рассуждений: на каждом шаге итераций, начиная со второго, появляется (см. (2.13)) дополнительный фактор  $\chi^{-(S_i+1)}$ , что в сумме дает вклад в  $P_n: n-2 + S_2 + \dots + S_{n-1}$ , а на первом шаге величина  $\chi$  входит в степени  $-(S_1+1-m)$ .

При  $\chi_0 \ll 1$  в формуле (2.16) при вычислении интегралов можно, последовательно замыкая контуры налево, получить выражение для  $\Psi_n(\epsilon_0)$  в виде асимптотического ряда

$$\Psi_n(\epsilon_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \cdot (3\chi_0)^k \quad (2.18)$$

Подставляя вычисленные таким образом значения в (2.11) и проводя суммирование по  $n$ , найдем выражение для моментов. В случае же  $\chi_0 \sim 1$  контуры интегрирования следует замыкать направо, при этом получается сходящийся ряд для  $\Psi_n(\epsilon_0)$ . Остановимся подробнее на случае  $\chi_0 \ll 1$ . Рекуррентные соотношения (2.12) здесь удобно записать в виде:

$$\Psi_n(\epsilon_0) = Q_n(\epsilon_0) \Psi_{n-1}(\epsilon_0) \quad (2.19)$$

где

$$Q_n(\epsilon_0) = - \frac{2\sqrt{3}m}{24\pi\hbar} \cdot \frac{n}{N_0} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} ds \mathcal{D}(s) \tau(P_n; s) = \quad (2.20)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{16\pi} \cdot \frac{I_c(\epsilon_0)}{\epsilon_0} \sum_{\ell=2}^{\infty} \beta_{\ell} \tau(P_n, \ell) \cdot (3\chi_0)^{\ell-2}$$

Здесь

$$\beta_{\ell} = \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell!} \cdot \Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{1}{3}\right) \quad (2.21)$$

$I_c(\epsilon_0) = \frac{2}{3} \frac{2m^2}{\hbar} \chi_0^2$  — классическая интенсивность магнитотормозного излучения частицы с энергией  $\epsilon_0$ . Значения  $P_n$  естественно зависят от того, в каких точках брались вычеты в предыдущих интегралах. Подставляя в (2.19) функции  $\Psi_n(\epsilon_0)$ ,  $\Psi_{n-1}(\epsilon_0)$  в виде разложений (2.18) и приравнивая члены при одинаковых степенях



$\chi_0$ , получим следующее рекуррентное соотношение

$$a_{n,k} = \frac{3\sqrt{3}}{16\pi} \frac{I_c(\epsilon_0)}{\epsilon_0} \sum_{\tau=0}^k b_{k+2-\tau} a_{n-1,\tau} \tau(- (m+n+\tau-1), k+2-\tau) \quad (2.22)$$

Отметим здесь, что для описания классического предела необходимо взять все вычеты в точке  $S_l = -2$ , квантовые поправки представляют вклады полюсов при  $S_l = -3, -4, \dots$ . Подставляя  $\Psi_n(\epsilon_0)$  (2.18) в (2.11), имеем:

$$\frac{\langle \epsilon^m \rangle}{\epsilon_0^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (3\chi_0)^k a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} (3\chi_0)^k f_k(t) \quad (2.23)$$

Найденные формулы позволяют вычислить моменты распределения  $\langle \epsilon^m \rangle$  в виде ряда по степеням  $\chi_0$ . Ввиду известной громоздкости, мы выпишем здесь  $\langle \epsilon^m \rangle$  с точностью до членов  $\sim \chi_0^2$ , а  $\langle \epsilon \rangle$  — до членов  $\sim \chi_0^3$ .

Приведем значения величин  $b_i$  и  $\tau(-q, i)$  ( $i = 2, 3, 4, 5$ ), которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$b_2 = -\frac{2\pi}{6\sqrt{3}}; \quad b_3 = \frac{10\pi}{6^3}; \quad b_4 = -\frac{2\pi}{\sqrt{3} \cdot 3^4}; \quad b_5 = \frac{77 \cdot 2\pi}{4! \cdot 6^4}$$

$$\tau(-q, 2) = -16q; \quad \tau(-q, 3) = -22q(5+q); \quad (2.24)$$

$$\tau(-q, 4) = -4q(218 + 63q + 7q^2); \quad \tau(-q, 5) = -2q[17q^2(q+14) + 1387q + 3878]$$

Вычислим теперь функции  $f_k(t)$  для  $k = 0, 1, 2$ . При выбранном начальном условии  $\rho(\epsilon, 0) = \delta(\epsilon - \epsilon_0)$  имеем, очевидно из (2.23):

$$f_0(0) = 1, \quad f_k(0) = 0 \quad (k \geq 1). \quad \text{По этой причине } a_{0,0} = 1, \quad a_{0,k} = 0 \quad (k \geq 1)$$

Тогда

$$f_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} a_{n,0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{I_c(\epsilon_0)}{\epsilon_0} (m+n-1) a_{n-1,0} =$$

$$= 1 - \frac{I_c(\epsilon_0)}{\epsilon_0} \left[ t f_0(t) + (m-1) \int_0^t dx f_0(x) \right] \quad (2.25)$$



Продифференцировав (2.25) по  $t$ , найдем уравнение для  $f_0(t)$  :

$$\frac{df_0(t)}{dt} \cdot \left(1 + t \frac{I_c(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0}\right) + m \frac{I_c(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \cdot f_0(t) = 0; \quad f_0(0) = 1 \quad (2.26)$$

решением которого является

$$f_0(t) = \frac{1}{(1+z)^m}; \quad z = t \cdot \frac{I_c(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \quad (2.27)$$

Используя (2.22) и (2.24) и процедуру, примененную в (2.25), получим следующее уравнение для  $f_1(t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{df_1(t)}{dt} (1+z) + (m+1) \cdot \frac{z}{t} \cdot f_1(t) = \\ = - \frac{55\sqrt{3}}{6 \cdot 48} \cdot \left[ (m+5) \frac{df_0}{dt} + t \frac{d^2 f_0}{dt^2} \right]; \quad f_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

решением которого является

$$f_1(t) = \frac{m}{(1+z)^{m+1}} \cdot \frac{55\sqrt{3}}{3 \cdot 48} \cdot \left[ 2 \ln(1+z) + \frac{z}{1+z} \cdot \frac{m+1}{2} \right] \quad (2.29)$$

При последовательном вычислении найдем для любого  $k$

$$\frac{df_k}{dt} \cdot (1+z) + (m+k) \cdot \frac{z}{t} \cdot f_k = \eta_k(t); \quad f_k(0) = \delta_{k,0} \quad (2.30)$$

где  $\eta_k(t)$  выражается через производные функций  $f_\ell(t)$  ( $\ell = 0, \dots, k-1$ ) до  $(k+1-\ell)$  порядка.

Приведем среднее  $\langle \varepsilon^m \rangle$  с точностью до членов  $\sim \chi_0^2$  :

$$\frac{\langle \varepsilon^m \rangle}{\varepsilon_0^m} = \frac{1}{(1+z)^m} \cdot \left\{ 1 + \frac{55\sqrt{3}}{48} \cdot \frac{\chi_0^m}{1+z} \left[ 2 \ln(1+z) + \frac{z}{1+z} \cdot \frac{m+1}{2} \right] - \right. \quad (2.31)$$

$$\left. - \frac{\chi_0^2 m}{(1+z)^2} \cdot \left[ 27z + \frac{7z(m+1)(m+2)}{6(1+z)} + 7(m+1) \ln(1+z) \right] + \right.$$



$$+ \left( \frac{55\sqrt{3}}{48} \right)^2 \frac{\chi_0^2 m}{(1+z)^2} \cdot \left[ 2(m+1) \ln^2(1+z) + \frac{\ln(1+z)}{(1+z)} \cdot [m(m+5)z + 2(m-1)] + \right. \\ \left. + \frac{z}{(1+z)^2} \left[ 5z^2 + \frac{z}{8} (62 - 5m + 6m^2 + m^3) - 2(m-1) \right] \right\}$$

здесь первый член в фигурных скобках дает классический результат, остальные есть квантовые поправки порядка  $\chi_0$  и  $\chi_0^2$ . Для того, чтобы дать представление о характере выражений, возникающих при вычислении следующих поправок по  $\chi_0$  и уточнить значение  $\langle \varepsilon \rangle$ , выпишем еще поправку  $\sim \chi_0^3$ :  $\delta_3 \langle \varepsilon \rangle$  :

$$\frac{\delta_3 \langle \varepsilon \rangle}{\varepsilon_0} = \chi_0^3 \left\{ \frac{77\sqrt{3}}{128} \left[ 68 \frac{\ln(1+z)}{(1+z)^4} + \frac{z}{(1+z)^5} (113z^2 + 471z + 392) \right] + \right. \\ \left. + \left( \frac{55\sqrt{3}}{48} \right)^3 \left[ \frac{8 \ln^3(1+z)}{(1+z)^4} + \frac{4 \ln^2(1+z)}{(1+z)^5} (7z+1) - \frac{2 \ln(1+z)}{(1+z)^6} (9+22z-12z^2- \right. \right. \quad (2.32) \\ \left. \left. - 10z^3) + \frac{z}{2(1+z)^7} (15z^4 + 133z^3 + 210z^2 + 98z + 36) \right] - \frac{55\sqrt{3}}{48} \left[ \frac{84 \ln^2(1+z)}{(1+z)^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4 \ln(1+z)}{(1+z)^5} (27z^2 + 45z - 17) + \frac{z}{6(1+z)^6} (461z^3 + 2960z^2 + 3327z + 408) \right] \right\}$$

Из формул (2.31), (2.32) видно, что квантовые поправки к  $\langle \varepsilon^m \rangle$  убывают со временем (расстоянием, пройденным в поле) быстрее классического члена и при очень больших значениях времени величина  $\langle \varepsilon^m \rangle$  определяется классическим членом. Обсуждение этого обстоятельства будет проведено ниже.

В таблице 1 приведены значения  $\langle \varepsilon(t) \rangle$  для магнитного поля  $H = 2 \cdot 10^6$  эрстед и глубины  $c \cdot t = 1,21$  см для разных значений начальной энергии  $\varepsilon_0$ , протабулированные по формулам (2.31), (2.32);  $\varepsilon_c$  - классическое значение  $\langle \varepsilon \rangle$  на данной глубине,  $\delta_k \langle \varepsilon \rangle$  - поправки порядка  $\chi_0^k$ . Как известно, разложение интенсивности магнитотормозного излучения в асимптотический ряд по степеням  $\chi$  дает удовлетворительные численные результаты только при  $\chi < 0,1$ .



Таблица 1

$\epsilon_0$ (ГэВ)	$\chi_0 \times 10^2$	$\frac{\epsilon_c}{\epsilon_0}$	$\frac{\delta_1 \langle \epsilon \rangle}{\epsilon_0}$	$\frac{\delta_2 \langle \epsilon \rangle}{\epsilon_0}$	$\frac{\delta_3 \langle \epsilon \rangle}{\epsilon_0}$	$\frac{\langle \epsilon(t) \rangle}{\epsilon_0}$
100	0,887	0,94299	0,00276	-0,00017	0,00001	0,94489
600	5,320	0,731	0,051	-0,011	0,003	0,773
1 200	10,64	0,576	0,107	-0,026	0,006	0,663
1800	15,96	0,476	0,144	-0,031	0,006	0,594
2400	21,28	0,405	0,166	-0,029	0,005	0,548

Это же относится к формулам (2.31), (2.32) при малых  $z$ . При  $z > \chi_0$  область применимости этих формул расширяется, что иллюстрируется таблицей 1. При  $z \gg 1$  главные члены разложения имеют по сравнению с классическим членом  $1/2$  порядок  $\chi_0^k/z$ . Значения  $\langle \epsilon \rangle$  для использованных значений  $N$  и  $t$  вычислялись также в работе [87] путем прямого численного решения исходного интегродифференциального уравнения (2.1). Полученные в [87] результаты имеют невысокую точность (до 4%), несмотря на использование высокопроизводительных ЭВМ, и в пределах этой точности, согласуются с приведенными в таблице 1.

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство. При выводе (2.16)–(2.31) нигде не предполагалось, что  $m$  целое число. Фактически полученные результаты справедливы для любых  $m$ , в том числе и комплексных. Развитый подход позволяет, в принципе, получить вид любого интегрального преобразования по  $\epsilon$  от функции  $\rho(\epsilon, t)$ , выбирая соответственно  $g(\epsilon)$  в (2.4)–(2.10). Обращение этого преобразования решает задачу о нахождении  $\rho(\epsilon, t)$ . В этом смысле формулы (2.11), (2.16) представляют образ  $\rho(\epsilon, t)$  при преобразовании Меллина. Отметим, что для нахождения интегральных характеристик типа  $\langle A(t) \rangle = \int A(\epsilon) \rho(\epsilon, t) d\epsilon$



достаточно знать вид образа  $\rho(\varepsilon, t)$  при некотором интегральном преобразовании. В самом деле, пусть  $A(\varepsilon) = \int \tilde{A}(s) \xi(s, \varepsilon) ds$  тогда  $\langle A(t) \rangle = \int \tilde{A}(s) ds \int d\varepsilon \xi(s, \varepsilon) \rho(\varepsilon, t) = \int ds \tilde{A}(s) \tilde{\rho}(s, t)$

### III. Интегральные характеристики излучения: угловое распределение и спектр

Наряду со средними по энергии при данном  $t$ , рассмотренные которых было проведено в предыдущем разделе, большой интерес представляют интегралы от характеристик излучения по некоторому интервалу времени (за время наблюдения излучения, за все время нахождения частицы в поле и т.д.). В этом случае удобно вычислить сначала  $\int_0^t \rho(\varepsilon, t) dt$ . Мы рассмотрим эту задачу на примере следующих характеристик излучения - полного спектрального распределения излучения за все время и полного углового распределения (по углу вылета излучения относительно плоскости движения частицы). С этой целью возьмем интеграл по времени от правой части (2.31) и проведем обращение. В результате имеем (с точностью до членов  $\sim \chi^2$ )

$$\int_0^{\infty} \rho(\varepsilon, t) dt = \frac{1}{I_c(\varepsilon)} \left\{ 1 + c(\varepsilon) \left[ 2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) \right] - \right. \\ \left. - \chi^2(\varepsilon) \left[ 20 + 7\varepsilon_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) - \frac{7}{6} \varepsilon_0^2 \frac{d}{d\varepsilon} \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) \right] + \right. \\ \left. + c^2(\varepsilon) \left[ 3 + 2\varepsilon_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) - \frac{\varepsilon_0^2}{4} \frac{d}{d\varepsilon} \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) \right] \right\} \quad (3.1)$$

где  $c(\varepsilon) = \frac{55\sqrt{3}}{48} \chi(\varepsilon)$ . Используя (3.1), можно найти любые полные характеристики излучения с точностью до членов  $\sim \chi^2$ . Для этого необходимо проинтегрировать соответствующую мгновенную характеристику с (3.1). Для спектрального распределения излучения за все время движения электрона в поле (пока электрон остается ультрарелятивистским) имеем с точностью до членов  $\sim \chi_0$ .

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon}{d\chi} = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \chi^2 \int_1^{\infty} dy K_{5/3}(\chi y) \left[ \frac{y^{3/2} - 1}{3} + \right. \\ \left. + c(\varepsilon_0) (y - 1/2) - 3/4 \chi(\varepsilon_0) \chi y^2 \right] \quad (3.2)$$

где  $\chi = \frac{2\pi\omega}{3\chi(\varepsilon_0)\varepsilon_0}$ .



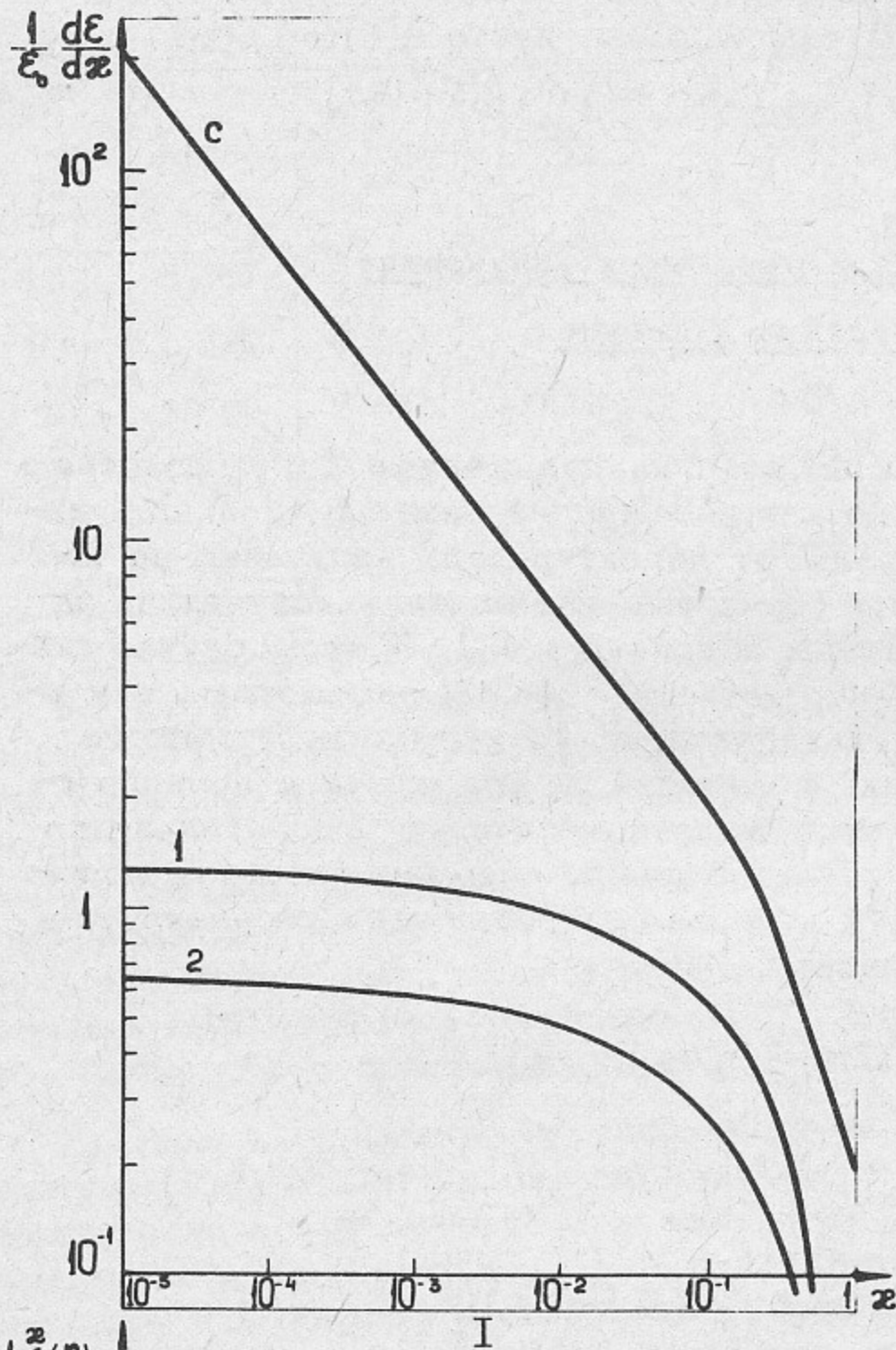
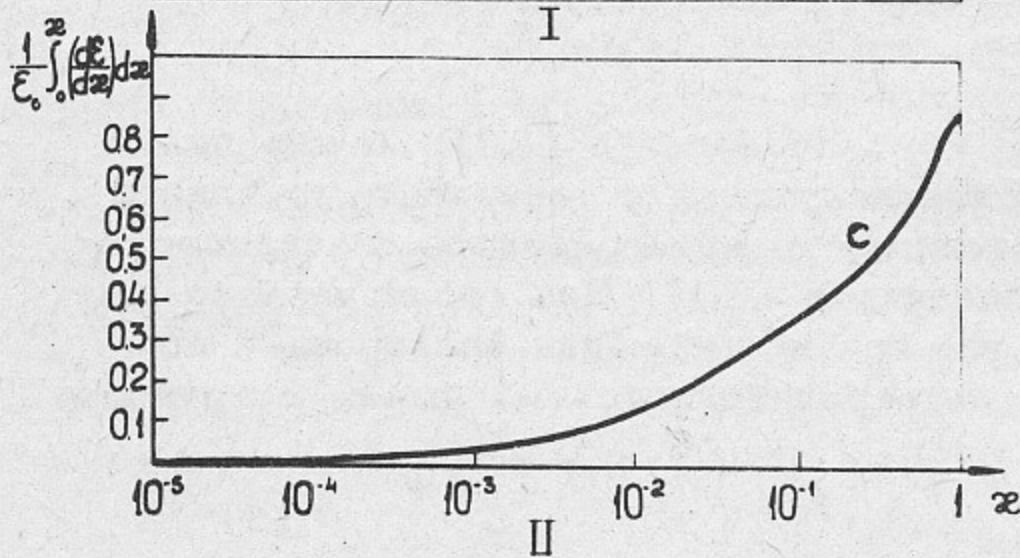


Рис.1. Интегральный спектр I и кривая классической потери энергии II как функция  $\mathcal{Z} =$

$$= \frac{2\hbar\omega}{3\chi(\epsilon_0)\epsilon_0}$$

(кривые c) и первая квантовая поправка к спектру при  $\lambda_0 = 0,177$  (кривая 1) и  $\lambda_0 = 0,089$  (кривая 2).





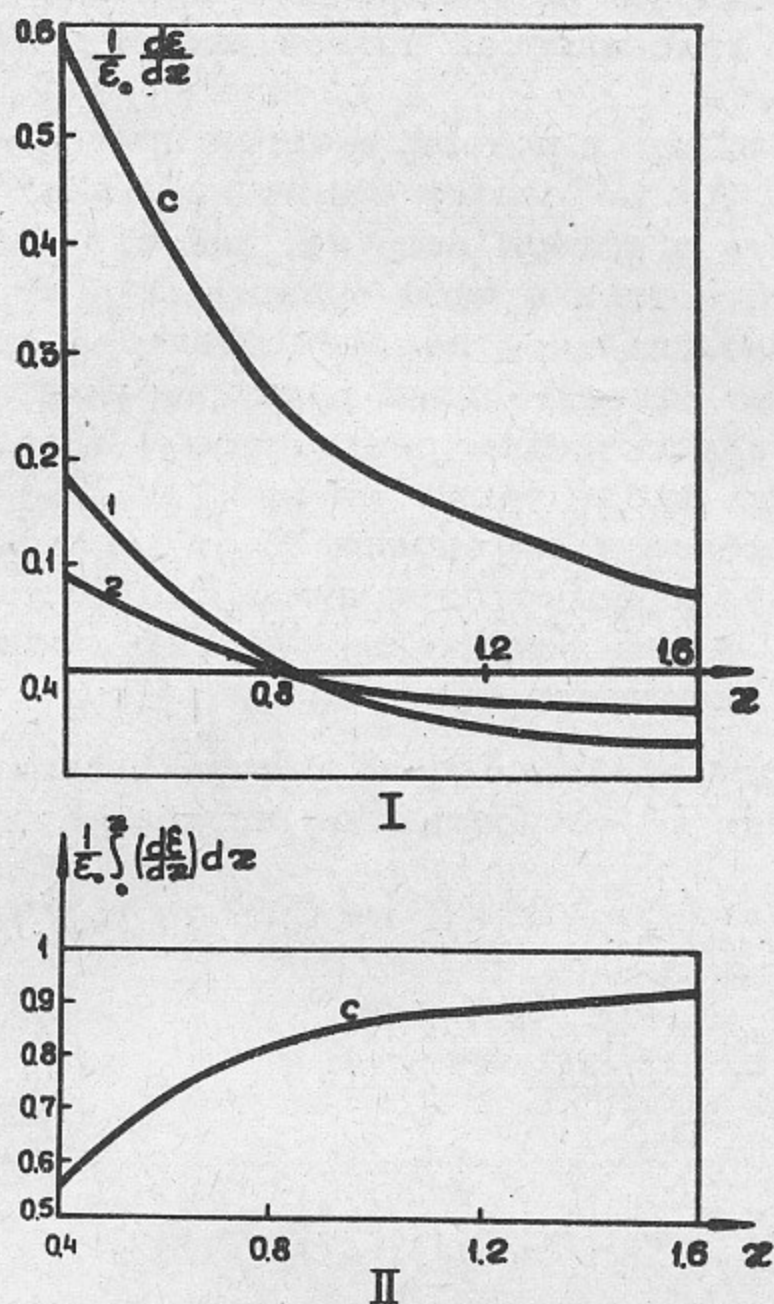


Рис.2

Кривые, приведенные на рис.1, при  $\chi \sim 1$ .

Первый член в (3.2) представляет классический результат, который может быть получен из мгновенного классического значения интенсивности как функции частоты, если последнее проинтегрировать по времени с учетом зависимости энергии, излучающей частицы от времени [37] (этот вопрос рассматривался в [10]). Остальные члены являются первой квантовой поправкой ( $\sim \chi_0$ ). Вид клас-



сического спектра (с) и квантовых поправок для  $\chi_0 = 0.177(1)$  и  $\chi_0 = 0.089(2)$  приведен на рис.1,2(I). Одновременно приведена рис.1,2(II) доля классической потери энергии, падающая на излучение в интервале  $0 \div \mathcal{X}$ , а именно  $\frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\mathcal{X}} \frac{d\epsilon}{d\mathcal{X}} d\mathcal{X}$ . Видно, что основной вклад в потери энергии приходится на область, где  $\mathcal{X} \leq 1$ . При  $\mathcal{X} \ll 1$  спектр ведет себя как  $1/\sqrt{\mathcal{X}}$ , однако вклад этой области в потери энергии, как это видно из рис.1, весьма мал (ясно, что потери в этой области  $\propto \sqrt{\mathcal{X}}$ ). При  $\mathcal{X} > 1$  происходит экспоненциальное падение спектрального распределения. Очевидно, что относительная величина квантовых поправок (по сравнению с классическим результатом) возрастает в жесткой части спектра. Это видно также на рис.1,2(I). Отметим, что интегралы по всей области изменения  $\mathcal{X}$  от квантовых поправок каждого порядка по  $\chi_0$  обращаются в нуль. Это обстоятельство является следствием закона сохранения энергии, поскольку полная потеря энергии при излучении есть  $\epsilon_0$ .

Для углового распределения потерь энергии получаем следующее выражение (с точностью до членов  $\sim \chi_0$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon}{dy} = & \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \left\{ (3 - 4R^3 + R^5) + \frac{55\sqrt{3}}{72} \chi(\epsilon_0) y^2 [7R^3 + 3y^2 R^5 + \right. \\ & + \frac{3}{4} (12y^2 + 7) R^7] - \frac{2\chi(\epsilon_0)}{3\sqrt{3}\pi} \left[ \frac{39 \operatorname{arctg} y}{y} + \right. \\ & \left. \left. + (39y^6 + 143y^4 + 17y^2 - 39) R^8 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $y = \frac{\epsilon_0}{m} \vartheta$ ,  $R = (1 + y^2)^{-1/2}$   $\vartheta$  - угол вылета излучения относительно плоскости движения частицы. На рис.3 кривая (С) представляет собой график классической части (3.3). Кривые (1) и (2) представляют всю функцию (3.3) (с учетом первой квантовой поправки) при  $\chi_0 = 0.266$  и  $\chi_0 = 0.133$  соответственно. Точка, в которой пересекаются все три кривые отвечают значению  $y = y_0$ , при котором квантовые поправки обращаются в 0, причем при  $y < y_0$  эти поправки отрицательны, а при  $y > y_0$  - положительны. Таким образом, квантовые поправки уменьшают функцию  $\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon}{dy}$  по сравнению с её классической частью при  $y < y_0$  и увеличивают при  $y > y_0$ . Это является отражением известно-



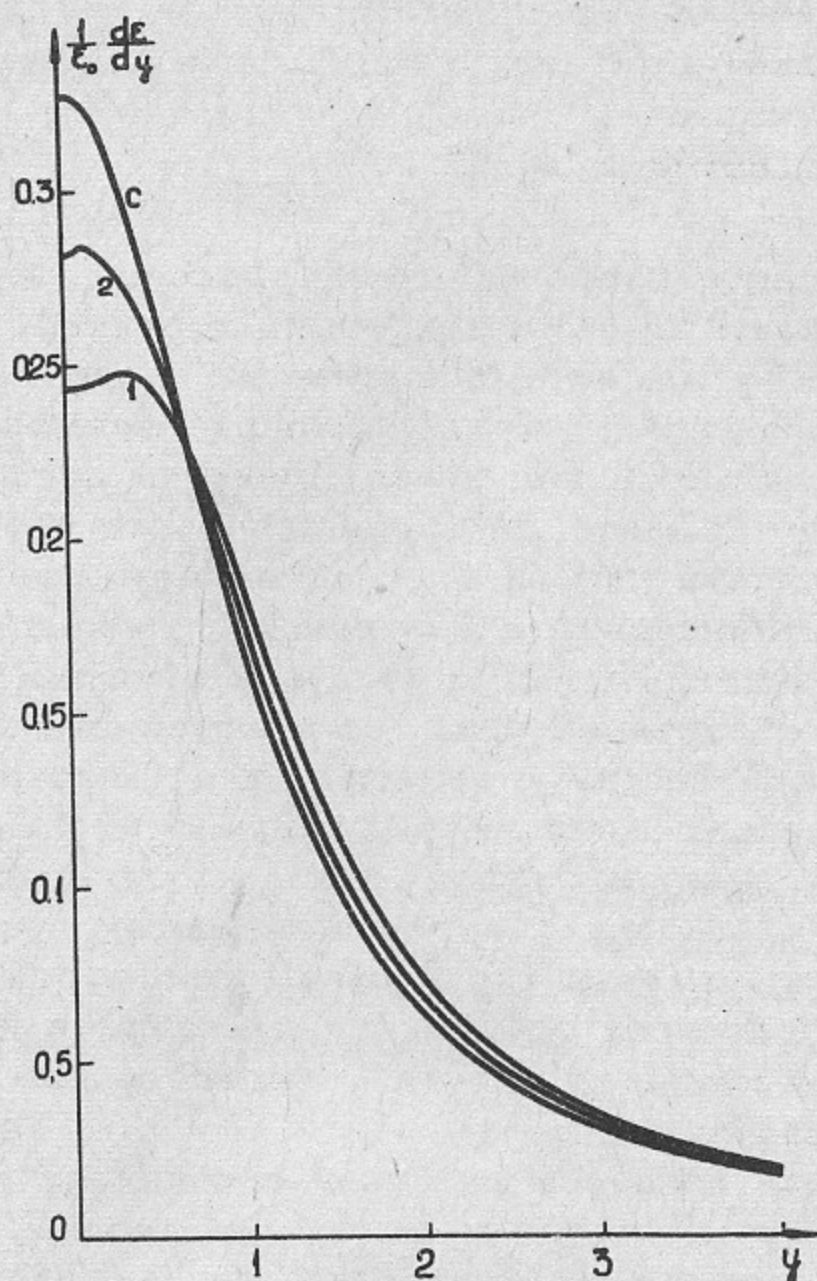


Рис.3. Интегральное угловое распределение как функция  $y = \frac{\epsilon_0}{m} \vartheta$  ( $\vartheta$  - угол вылета излучения). Кривая с - классическое распределение, кривые 1 и 2 - распределение с учетом первой квантовой поправки при  $\chi_0 = 0,266$  и  $\chi_0 = 0,133$  соответственно.

го факта [5], что мгновенное угловое распределение уширяется с ростом  $\chi$ . С учетом квантовых поправок максимум распределения лежит уже при  $\vartheta \neq 0$ . Кроме квантовых поправок к уширению углового распределения (по сравнению с мгновенным) приводит те-



же уменьшение энергии  $\langle \varepsilon(t) \rangle$  во времени.

### 1У. Функция распределения

Процесс последовательного излучения фотонов частицей в квантовой электродинамике имеет дискретный характер, причем временные интервалы между моментами излучения являются случайными. Поэтому можно ожидать, что за большие времена (попросту большому числу актов излучения) функция распределения будет гауссоваго типа. По мере дальнейшего роста времени будет происходить накопление частиц в области малых энергий, обусловленное падением интенсивности излучения с уменьшением энергии. Это и квантовое запаздывание — отличная от нуля вероятность обнаружить частицу в области энергий, из которой она должна выйти согласно классической теории — приводит к асимметрии кривой распределения относительно точки её максимума  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ , причем  $\varepsilon_{\max} < \langle \varepsilon \rangle$  и имеется "хвост" в сторону больших энергий. Если при  $t = 0$   $\rho(\varepsilon, 0) = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$ , то для малых времен (когда произошло немного актов излучения) частицы сосредоточены в узкой (с шириной  $\sim \chi_0 \varepsilon_0$ ) области энергий, примыкающей к  $\varepsilon_0$ , имеется "хвост" в сторону меньших энергий, существенны квантовые флуктуации процесса излучения и  $\varepsilon_{\max} > \langle \varepsilon \rangle$ . Таким образом, физическая картина процесса различна в областях больших и малых времен и поэтому мы рассмотрим их раздельно<sup>х)</sup>. Отметим, что, если произошло много актов излучения, то средняя потеря энергии частицей хорошо описывается непрерывным (классическим) процессом излучения (ср. (2.31)).

Приступим теперь к нахождению распределения  $\rho(\varepsilon, t)$ . Обращение классической части  $\langle \varepsilon^m \rangle$  (2.31) дает непосредственно классическую функцию распределения:

$$\rho_c(\varepsilon, t) = \delta\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{1+z}\right) \quad (4.1)$$

---

х) В предыдущих разделах мы нигде не использовали явного вида функции распределения, исходя непосредственно из уравнения (2.1), и полученные результаты справедливы при любых  $t$ .



где  $z = \frac{I_c(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} t$  (см. (2.27)), т.е. распределение сохраняет  $\delta$ -образный вид, а центр его смещается за время  $t$  в точку  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{1+z}$ . Результат (4.1) несложно получить и из исходного уравнения (2.1). Запишем его в виде:

$$\frac{\partial p(\varepsilon, t)}{\partial t} = - \int_0^{\infty} W(u, \varepsilon) p(\varepsilon, t) du + \int_0^{\infty} W(\varepsilon, \varepsilon(1+u)) p(\varepsilon(1+u), t) du \quad (4.2)$$

и учтем, что при  $\chi \ll 1$  основной вклад в интеграл по  $u$  дают малые  $u \sim \chi$  (см., например [57]). Тогда можно разложить функции от  $\varepsilon(1+u)$  по степеням  $u$ . В итоге получим

$$\frac{\partial p(\varepsilon, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} [I_n(\varepsilon) p(\varepsilon, t)] \quad (4.3)$$

где  $I_n(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} W(\varepsilon', \varepsilon) (\varepsilon - \varepsilon')^n d\varepsilon'$ , т.е.  $I_1$  интенсивность излучения и т.д. Если в правой части формулы (4.3) устремить  $\hbar \rightarrow 0$  ( $\varepsilon - \varepsilon' = \hbar \omega$ ), что соответствует переходу к классическому пределу, то сохранится лишь первый член ряда, где интенсивность следует заменить на её классическое значение, т.е. имеем:

$$\frac{\partial p_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [I_c(\varepsilon) p_c(\varepsilon, t)] \quad (4.4)$$

Решением этого уравнения при начальном условии  $p_c(\varepsilon, 0) = \Phi(\varepsilon)$  будет функция

$$p_c(\varepsilon, t) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{1 - \frac{I_c(\varepsilon)t}{\varepsilon}}\right) / \left(1 - \frac{I_c(\varepsilon)t}{\varepsilon}\right)^2 \quad (4.5)$$

очевидно, согласующаяся с (4.1). При учете квантовых поправок в правой части уравнения (4.3) необходимо сохранить члены соответствующего порядка по  $\chi$ . Следует, однако, иметь в виду, что при начальном условии  $p(\varepsilon, 0) = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$  разложение по степеням  $u$  во втором члене уравнения (4.2) имеет смысл только при  $\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon} \gg \chi$



поскольку верхний предел интеграла по  $U$  равен фактически

$U_{\max} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon}$  (при выполнении этого неравенства, которое означает, что произошло много актов излучения, верхний предел интеграла по  $U$  можно заменить на  $\infty$ ). По этой причине уравнение (4.3) с квантовыми поправками справедливо только при достаточно большом  $t$ , что приводит к определенным трудностям при применении начального (при  $t=0$ ) условия. Такая ситуация обусловлена уже отмечавшимся различием физической картины  $\rho(\varepsilon, t)$  при малых и больших  $t$ .

Наряду с решением уравнения (4.3), функцию распределения  $\rho(\varepsilon, t)$  можно получить, также обращая найденные выше моменты распределения (2.31), которые вычислялись при сингулярном начальном условии  $\rho(\varepsilon, 0) = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$ . Для нас такой подход, естественно, является более прямым. В результате обращения (2.31) (см., напр. [127]) получаем функцию  $\rho(\varepsilon, t)$ , выражающуюся через  $\rho_c(\varepsilon, t)$  и её производные. Сингулярный характер такой функции распределения связан с учетом конечного числа членов в разложении  $\langle \varepsilon^m \rangle$  по степеням  $\chi_0$ . Хотя указанная форма функции распределения удобна для вычисления средних, она не передает истинного характера распределения, являющегося, естественно, гладкой функцией  $\varepsilon$  при  $t > 0$ . Поэтому известный интерес представляет интерполяция функции  $\rho(\varepsilon, t)$  гладкой кривой, такой, чтобы она давала в данном порядке по  $\chi$  правильные значения моментов распределения. На основании изложенных выше физических соображений можно в первом порядке по  $\chi$  интерполировать функцию  $\rho(\varepsilon, t)$  распределением Гаусса:

$$\rho_1(\varepsilon, t) = C_1 \exp\{-\beta(\varepsilon - \varepsilon_{\max})^2\}$$

Вычисляя с этой функцией два первых момента распределения с точностью до членов  $\sim \chi$  и учитывая условие нормировки  $\rho(\varepsilon, t)$ , найдем

$$\rho_1(\varepsilon, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \exp\left\{-\frac{(\varepsilon - \langle \varepsilon \rangle)^2}{2\Delta^2}\right\} \quad (4.6)$$

где  $\Delta^2 \equiv \langle \varepsilon^2 \rangle - \langle \varepsilon \rangle^2 = \frac{55\sqrt{3}}{48} \frac{\varepsilon_0^2 \chi_0^2}{(1+z)^4} + O(\chi_0^2)$  — дисперсия распределения, в  $\langle \varepsilon \rangle$  следует удерживать первую квантовую поправку. Распределение (4.6) дает (с точностью  $\sim \chi$ ) правильные значения всех моментов  $\langle \varepsilon^m \rangle$ ; при  $t \rightarrow 0$  функция  $\rho_1(\varepsilon, t) \rightarrow \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$ .



а при больших  $t$  ( $z \gg 1$ ) в классическое распределение  $\rho_c(\varepsilon, t)$  (4.1). Это связано с отмечавшимся выше фактом, что при  $z \gg 1$  величина  $\langle \varepsilon^m \rangle$  определяется классическим членом. Ширина кривой распределения сначала возрастает, достигает максимума при  $z \approx 1/3$ , а затем опять падает.

При учете следующих квантовых поправок будем, в соответствии со сказанным выше, искать функцию распределения в виде

$$\rho_2(\varepsilon, t) = C_2 \begin{cases} \exp\{-\lambda^2 \beta (\varepsilon - \varepsilon_{\max})^2\}, & \varepsilon \geq \varepsilon_{\max} \\ \exp\{-\beta (\varepsilon - \varepsilon_{\max})^2\}, & \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} \end{cases} \quad (4.7)$$

Вычислим с этой функцией три первых момента распределения с точностью до членов  $\sim \chi^2$  и решим полученную систему уравнений для  $C_2, \beta, \lambda, \varepsilon_{\max}$ . При этом необходимо решить следующее кубическое уравнение:

$$y^3(\pi - 3) - \Delta^2 y + \beta = 0 \quad (4.8)$$

где

$$\beta = 3\langle \varepsilon \rangle \langle \varepsilon^2 \rangle - \langle \varepsilon^3 \rangle - 2\langle \varepsilon \rangle^3 = \frac{\varepsilon_c^3 \chi_0^2 z}{(1+z)^6} \left[ 7 - 6 \left( \frac{55\sqrt{3}}{48} \right)^2 \frac{z}{1+z} \right]$$

Заметим, что при  $z \sim 1$  (точнее при  $z \gg \chi_0$ ) в уравнении (4.8) отношение  $\beta/\Delta^2$  является малым параметром ( $\sim \chi_0$ ), что существенно облегчает его решение. В этом случае

$$y = \frac{\beta}{\Delta^2} \left[ 1 + \frac{\beta^2}{\Delta^6} (\pi - 3) \right]; \quad \varepsilon_{\max} = \langle \varepsilon \rangle + y$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} = \left[ 2\Delta^2 - y^2 \left( \frac{3\pi}{8} - 1 \right) \right]^{1/2} + y \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad (4.9)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{(1 - y\sqrt{\pi\beta})^2}; \quad C_2 = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \frac{1}{1 - \frac{y\sqrt{\pi\beta}}{2}}$$



Это решение показывает, что 1) величина  $y = \epsilon_{\max} - \langle \epsilon \rangle$  сначала положительна, при  $z \sim 0,4$  проходит через 0, а в дальнейшем остается отрицательной; 2) ширина кривой распределения сначала растет, а затем уменьшается, причем при  $z \gg 1$   $\rho_2 \rightarrow \rho_c(\epsilon, t)$ ; 3) высота кривой распределения сначала падает, а затем возрастает. Все сказанное здесь хорошо иллюстрируется графиками функции  $\epsilon_0 \rho(\epsilon, t)$ .

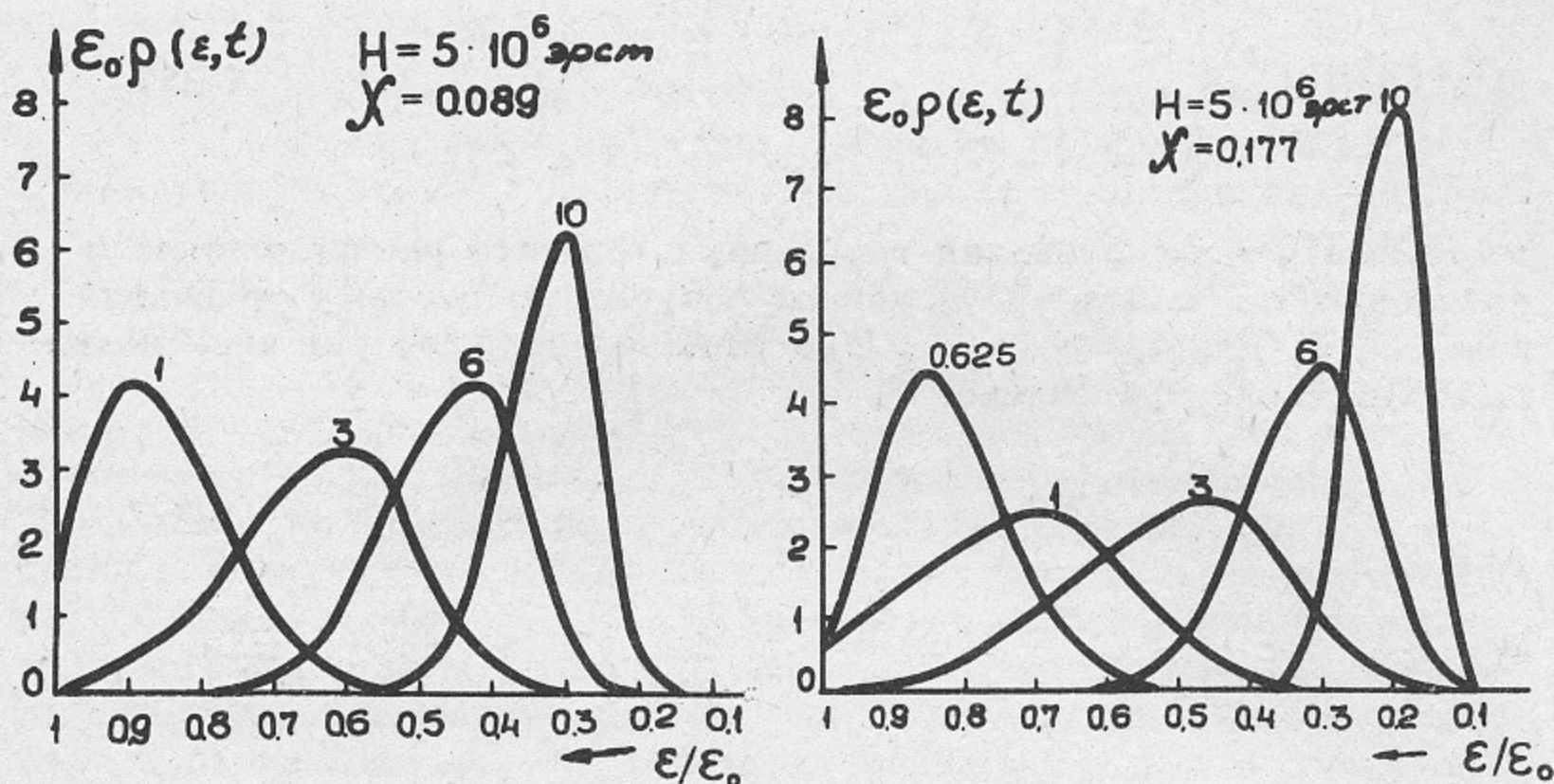


Рис.4. Функция распределения при  $\chi_0 = 0,089$  и  $\chi_0 = 0,177$ .

Цифры над кривыми означают эффективный пробег  $lH$  ( $l$  - в см.  $H$  - в мега эрстедах).

$\epsilon_0 \rho_2(\epsilon, t)$  для  $\chi_0 = 0.089$  и  $\chi_0 = 0.177$ , приведенными на рис.4. Заметим еще, что функция  $\rho_2(\epsilon, t)$  в виде (4.7) дает правильные значения всех моментов  $\langle \epsilon^m \rangle$  (2.31) с точностью до членов  $\sim \chi_0^2$ .

х) Функция  $\rho(\epsilon, t)$  вычислялась путем прямого численного решения исходного интегродифференциального уравнения (2.1) в работах [7,8] и приведена в виде графиков при некотором значении параметров. Наши результаты, в основном, согласуются в этой части с найденными в работах [7,8].



Рассмотрим теперь область малых времен  $t$ . При выбранном нами начальном условии  $\rho(\varepsilon, 0) = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$  интерес представляет вероятность найти частицу в некотором интервале  $\varepsilon_0 \div \varepsilon_0 \chi$  ( $\chi < 1$ ), которая задается величиной:

$$A(\varepsilon_0, \chi, t) = \int_{\varepsilon_0 \chi}^{\varepsilon_0} \rho(\varepsilon, t) d\varepsilon \quad (4.10)$$

причем  $A(\varepsilon_0, \chi, 0) = 1$ . Используя исходное уравнение (2.1), можно получить разложение  $A(\varepsilon_0, \chi, t)$  при малых  $t$ . В самом деле:

$$\frac{\partial^n A}{\partial t^n} = - \int_{\beta}^{\varepsilon_0} d\varepsilon \frac{\partial^{n-1} \rho(\varepsilon, t)}{\partial t^{n-1}} \cdot \sigma(\varepsilon, \beta) \quad (4.11)$$

где  $\beta = \varepsilon_0 \chi$

$$\sigma(\varepsilon, \beta) = \int_0^{\beta} W(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' \quad (4.12)$$

Тогда, очевидно,

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{t=0} = -\sigma(\varepsilon_0, \beta), \quad \left. \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \sigma^2(\varepsilon_0, \beta) - \int_{\beta}^{\varepsilon_0} W(\varepsilon, \varepsilon_0) [\sigma(\varepsilon, \beta) - \sigma(\varepsilon_0, \beta)] d\varepsilon \quad \text{и т. д.} \quad (4.13)$$

т.е.

$$A(\varepsilon_0, \chi, t) = 1 - t\sigma(\varepsilon_0, \beta) + \frac{t^2}{2} [\sigma^2(\varepsilon_0, \beta) - \int_{\beta}^{\varepsilon_0} W(\varepsilon, \varepsilon_0) [\sigma(\varepsilon, \beta) - \sigma(\varepsilon_0, \beta)] d\varepsilon] + \dots \quad (4.14)$$

Из формулы (4.10) следует, очевидно, что

$$\rho(\varepsilon, t) = - \frac{\partial A(\varepsilon_0, \varepsilon/\varepsilon_0, t)}{\partial \varepsilon} \quad (4.15)$$



Если  $\frac{1-x}{\chi} \gg \chi_0$ , то величина  $G(\varepsilon_0, \beta)$  экспоненциально мала, что связано с характером мгновенного спектра излучения: частица, излучая энергию малыми порциями  $\sim \varepsilon_0 \chi$  за небольшое число актов излучения, не успевает выйти из указанного интервала. Основным же интерес при малых  $t$  представляет область энергий, где  $\frac{1-x}{\chi} \sim \chi_0$ , в которой входящие в (4.14) интегралы берутся только численно.

Авторы весьма благодарны Д.В.Пестрикову за помощь в проведении численных расчетов.



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. T. Erber. Concepts in Hadron Physics (Acta Phys. Austriaca Supp. VIII). Springer. Wien. 1971
2. Ф. Дайсон, Д. Тер Хаар. Нейтронные звезды и пульсары. Мир, Москва, 1973.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Наука, Москва, 1967.
4. А. А. Соколов, И. М. Тернов. Синхротронное излучение. Наука, Москва, 1966.
5. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. С. Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат, Москва, 1973.
6. C. S. Shen. Phys. Rev. Lett. 24, 410, 1970
7. C. S. Shen, D. White. Phys. Rev. Lett. 28, 455, 1972
8. D. White. Phys. Rev. D5, 1930, 1972
9. C. S. Shen. Phys. Rev. D6, 2736, 1972
10. Д. В. Гальцов, В. А. Лосев, ЯФ, 17, 109, 1973.
11. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Москва, 1962.
12. Е. Т. Марш. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.



---

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов  
Подписано к печати 13.7.73г. № МН 08372  
Усл. 1 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 57

---

Отпечатано на ротаприте в ИЯФ СО АН СССР