

22

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

ПРЕПРИНТ И Я Ф 59 - 73

Б.Н.Брейзман, С.Г.Феизов

**ГЕЛИКОННЫЙ МЕХАНИЗМ РЕЛАКСАЦИИ
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА
В ПЛАЗМЕ**

Новосибирск

1973

ГЕЛИКОННЫЙ МЕХАНИЗМ РЕЛАКСАЦИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ПЛАЗМЕ

Б.Н.Брейзман, С.Г.Феизов

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрена задача о взаимодействии релятивистского электронного пучка с плазмой, находящейся в слабом ($H^2 \ll n_0 T$) магнитном поле. Обнаружено, что основной причиной коллективного торможения пучка может быть его неустойчивость относительно возбуждения геликонов. Показано, что взаимодействие пучка с геликонами с хорошей точностью описывается квазилинейной теорией. В рамках квазилинейного приближения найдена длина релаксации при стационарной инжекции пучка в плазму, а также спектр возбуждаемых пучком геликонов.

THE HELICON MECHANISM OF THE RELAXATION
OF A RELATIVISTIC ELECTRON BEAM IN PLASMA

B.N. Breizman, S.G. Feizov

ABSTRACT

The problem of interaction of a relativistic electron beam with plasma in the presence of a weak ($H^2 \ll n_0 T$) magnetic field is considered. It is found that the beam instability with respect to the generation of helicons may be the main cause of the collective relaxation of the beam. The beam - helicon interaction is shown to be well described by quasilinear theory. The effect of nonlinear wave - wave interaction is shown to be unimportant. For the problem of the stationary beam injection into plasma in the framework of the quasilinear approximation the relaxation length is found as well as the spectrum of the beam generated helicons.

ГЕЛИКОННЫЙ МЕХАНИЗМ РЕЛАКСАЦИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ПЛАЗМЕ

Б.Н.Брейзман, С.Г.Фейзов

1. Введение

В настоящей работе исследуется вопрос о том, как влияет наличие магнитного поля в плазме на характер релаксации релятивистского электронного пучка. Постановка задачи связана с проблемой пучкового нагрева плотной плазмы, удерживаемой в поперечном направлении стенками^{х)}. Магнитное поле при этом служит только для уменьшения теплопроводности и относительно невелико, так что

$$\beta \equiv 8\pi n_0 T / H^2 \geq 1 \quad (1)$$

Мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением именно таких полей.

Напомним вначале результаты, относящиеся к релаксации пучка в плазме без магнитного поля^{/2/}. Механизм релаксации связан здесь с возбуждением ленгмюровских колебаний из-за пучковой неустойчивости^{хх)}. При стационарной инжекции пучка в плазму генерация этих колебаний компенсируется их перекачкой в длинноволновую часть спектра за счет индуцированного рассеяния на ионах плазмы. Оценка длины релаксации пучка имеет вид:

$$l \sim \frac{c}{\omega_p} \frac{n_0}{n_b} \frac{m}{M} \left(\frac{mc^2}{T} \right)^2 \left(\frac{E_b}{mc^2} \right)^3 \quad (2)$$

х) Задача об удержании плотной плазмы стенками рассмотрена в работе /1/.

хх) Во избежание недоразумений заметим, что речь идет об изотермической плазме, где невозможна раскачка ионного звука.

Здесь n_0 и n_b — соответственно концентрации плазмы и пучка,
 $\omega_p \equiv (4\pi n_0 e^2 / m)^{1/2}$ — электронная плазменная частота, T — температура плазмы, E_b — энергия электронов пучка.

Обратимся теперь к случаю, когда внешнее магнитное поле отлично от нуля. Нетрудно проверить, что при $\beta \gg 1$ магнитное поле слабо влияет как на закон дисперсии ленгмюровских колебаний, взаимодействующих с пучком, так и на величину вероятности рассеяния этих колебаний на ионах. Поэтому в слабом магнитном поле $|\beta| > 1$ картина релаксации может измениться только за счет возбуждения таких колебаний, которые при $H = 0$ отсутствуют. Из этих колебаний в настоящей работе подробно рассматриваются геликоны. Как будет показано ниже, их роль в процессе релаксации может оказаться определяющей.

Из линейной теории следует, что геликоны возбуждаются пучком слабее, чем ленгмюровские колебания. Тем не менее в условиях, когда плотность энергии ленгмюровских колебаний ограничивается нелинейными процессами, за релаксацию пучка могут быть ответственны не ленгмюровские волны, а геликоны (на это обстоятельство было обращено внимание в работе [3]). В соответствии со сказанным мы будем решать задачу о релаксации следующим образом: сначала рассмотрим взаимодействие пучка с геликонами, полностью пренебрегая влиянием остальных колебаний (в том числе и ленгмюровских), а затем уточним условия применимости такого подхода.

Во втором разделе работы поставленная задача исследуется качественно. При этом получена оценка длины релаксации пучка в плазме за счет возбуждения геликонов и показано, что релаксация сводится главным образом к рассеянию электронов пучка, а потери энергии оказываются относительно малыми. Кроме того, установлено, что взаимодействие пучка с геликонами может быть с достаточной точностью описано в рамках квазилинейного приближения. В третьем разделе получено аналитическое решение квазилинейной задачи о стационарной инжекции пучка в плазму. В заключительном (четвертом) разделе сформулированы условия применимости результатов работы.

2. Качественное рассмотрение

В магнитном поле H_z условие взаимодействия электрона пучка с волной имеет вид:

$$\omega_{\vec{k}} - k_z v_z - n \Omega = 0 \quad (3)$$

где $\Omega \equiv \omega_H m c^2 / E_0$ - циклотронная частота для релятивистских электронов.

Соотношение (3) следует из законов сохранения энергии и импульса в элементарном акте излучения (или поглощения) волны частицей. При этом $\hbar \omega_{\vec{k}}$ есть энергия излучаемой волны, а $\hbar n \Omega$ - изменение "поперечной" энергии частицы при излучении.

Как видно из дисперсионного соотношения для геликонов

$$\omega_{\vec{k}} = \omega_H k |k_z| c^2 / \omega_p^2 \quad (4)$$

в слабом магнитном поле ($\omega_H \ll \omega_p$) фазовая скорость этих волн мала по сравнению со скоростью света. Поэтому черенковский ($n=0$) резонанс с электронами пучка для геликонов невозможен. Если же $n \neq 0$, то в условии резонанса (3) можно пренебречь величиной $\omega_{\vec{k}}$. Другими словами, изменение "поперечной" энергии частицы велико по сравнению с потерей энергии на излучение волны. Это означает, что воздействие геликонов на пучок приводит к почти упругому рассеянию частиц.

Получим закон изменения углового разброса частиц $\Delta \theta$ при стационарной инжекции пучка в плазму. Для этого оценим расстояние от границы плазмы, на котором плотность энергии колебаний, возбуждаемых пучком с разбросом $\Delta \theta$, достигает уровня, существенно превышающего тепловой.

$$z \sim \Lambda V_{gr} / \gamma_0$$

Здесь Λ - кулоновский логарифм, $V_{gr} - z$ - составляющая групповой скорости волны, γ_0 - инкремент неустойчивости. Для γ_0 , в свою очередь, имеет место оценка (см. раздел 3).

$$\gamma_{\beta} \sim \omega_n \frac{n_{\beta}}{n_0} \frac{mc^2}{E_{\beta}} \frac{kc}{\Omega} \frac{1}{\Delta\theta^2} \quad (5)$$

Отсюда

$$z \sim \Lambda \frac{c}{\omega_p} \frac{n_0}{n_{\beta}} \frac{\omega_n}{\omega_p} \Delta\theta^2$$

Если нелинейное взаимодействие волн друг с другом пренебрежимо мало, то это соотношение одновременно может рассматриваться, как зависимость углового разброса пучка от координаты z .^{х)} Таким образом, в квазилинейном приближении

$$\Delta\theta(z) \sim (z/l_n)^{1/2} \quad (6)$$

где величина

$$l_n \equiv \Lambda \frac{c}{\omega_p} \frac{\omega_n}{\omega_p} \frac{n_0}{n_{\beta}} \quad (7)$$

представляет собой длину релаксации пучка.

Плотность энергии колебаний U_n на расстоянии z от границы плазмы найдем из закона сохранения потока импульса. На входе в плазму колебания отсутствуют, а поток импульса электронов пучка равен $n_{\beta} V_{\beta} P_{\beta}$, где V_{β} и P_{β} — соответственно скорость и импульс электрона. Принимая во внимание, что релаксация сводится в основном к увеличению углового разброса пучка, получим:

$$n_{\beta} V_{\beta} P_{\beta} = n_{\beta} V_{\beta} P_{\beta} [1 - \Delta\theta^2(z)] + V_{gr} K_z \frac{U_n}{\omega_k}$$

Отсюда следует, что

$$U_n(z) \sim n_{\beta} V_{\beta} P_{\beta} \Delta\theta^2(z) \quad (8)$$

На расстоянии l_n от границы плазмы плотность энергии колебаний сравнивается с плотностью энергии пучка. При этом поток энергии колебаний, равный $V_{gr} U_n$, остается существенно меньше, чем поток энергии пучка, т.е. относительная потеря энергии электронов

$\frac{\Delta E}{(E_{\beta} - mc^2)}$ оказывается малой:

х) Заметим, что формула (6) имеет смысл только при $\Delta\theta \gg \Delta\theta_0$, где $\Delta\theta_0$ — угловой разброс пучка на входе в плазму.

$$\frac{\Delta E}{E_\beta - mc^2} \sim \left(\frac{\omega_H}{\omega_p} \right)^2 \frac{mc^2}{E_\beta} \ll 1 \quad (9)$$

(мы учли, что при $\Delta\theta \sim 1$ пучок возбуждает колебания с волновым вектором $k \sim \Omega/v_\beta \sim \Omega/c$).

Оценим теперь влияние нелинейных процессов на ход релаксации. Вычисление вероятностей этих процессов показывает, что главным из них является распад геликонов

$$\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_2}$$

$$\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$$

где $\omega_{\vec{k}}$ задается формулой (4). Инкремент распадной неустойчивости $\gamma_{h \rightarrow h+h}$ по порядку величины равен $\omega_{\vec{k}} U_h / H^2$ (см., например, /4/). Воспользовавшись оценкой (8), нетрудно проверить, что $\gamma_{h \rightarrow h+h}$ сравнивается с γ_β только на заключительной стадии релаксации (при $\Delta\theta \sim 1$). Таким образом, мы показали, что существенная часть процесса релаксации действительно может быть описана уравнениями квазилинейной теории. Решения этих уравнений получено в разделе 3.

3. Решение квазилинейной задачи

Мы рассмотрим задачу о стационарной инжекции пучка в плазму в следующей постановке. Будем считать, что плазма в которой имеется однородное магнитное поле H_z , занимает полупространство $z > 0$. В плазму вдоль оси z инжектируется моноэнергетический релятивистский ($E_\beta - mc^2 \geq mc^2$) электронный пучок, неограниченный в поперечном направлении. На входе в плазму задана функция распределения электронов пучка $F(p; \theta; z)$:

$$F(p; \theta; z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{n_\beta}{p_\beta^2} \delta(p - p_\beta) \Phi_0(\theta) \quad (10)$$

Здесь и далее используется сферическая система координат $(p; \theta; \varphi)$ в пространстве импульсов, причем ось z является полярной осью этой системы.

Мы ограничимся исследованием пучков с не слишком малым угловым разбросом $\Delta\theta$, так что возбуждаемую неустойчивость можно считать кинетической. Применительно к рассматриваемой задаче это ограничение записывается следующим образом:

$$\Delta\theta \gg \left(\frac{n_{\theta}}{n_0} \frac{k_{\perp} c}{\Omega} \right)^{1/4} \quad (11)$$

Для описания процесса релаксации воспользуемся системой квазилинейных уравнений:

$$\begin{aligned} v \cos\theta \frac{\partial F}{\partial z} = & \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \left(\mathcal{D}_{\rho\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \mathcal{D}_{\rho\theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \left(\mathcal{D}_{\theta\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \mathcal{D}_{\theta\theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \omega_{\vec{k}}}{\partial k_z} \frac{\partial W_{\vec{k}}}{\partial z} = 2 \gamma_{\theta} W_{\vec{k}} \quad (13)$$

Через $W_{\vec{k}} \equiv W_{\vec{k}}(z)$ обозначена спектральная плотность энергии колебаний, $v \equiv v(\rho)$ - скорость электрона. Компоненты тензора диффузии $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ и инкремент неустойчивости задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha\beta} = & 8\pi^2 e^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int W_{\vec{k}} \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_{\mu\nu} a_{\mu}^* a_{\nu} \Big|_{\omega=\omega_{\vec{k}}} \right)^{-1} \cdot \\ & \cdot \operatorname{Re} A_{\alpha}^{(n)*} A_{\beta}^{(n)} \delta(\omega_{\vec{k}} - k_z v \cos\theta - n\Omega) d\vec{k} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta} = & 4\pi^2 e^2 \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_{\mu\nu} a_{\mu}^* a_{\nu} \Big|_{\omega=\omega_{\vec{k}}} \right)^{-1} \cdot \\ & \cdot \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \left(|A_{\rho}^{(n)}|^2 v \frac{\partial F}{\partial \rho} + A_{\rho}^{(n)*} A_{\theta}^{(n)} \frac{v}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \cdot \\ & \cdot \delta(\omega_{\vec{k}} - k_z v \cos\theta - n\Omega) d\vec{\rho} \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь \vec{a} - вектор поляризации волны, $\epsilon_{\mu\nu}$ - тензор диэлектрической проницаемости плазмы. Кроме того, введено обозначение:

$$\vec{A}^{(n)} = \frac{1}{2\pi\omega_{\vec{k}}} \int_0^{2\pi} \left\{ \vec{a}\omega_{\vec{k}} + [\vec{v} \times [\vec{k} \times \vec{a}]] \right\} \cdot \exp\left(-in\varphi + i \frac{k_{\perp} V \sin\theta}{\Omega} \sin\varphi\right) d\varphi$$

где угол φ в пространстве импульсов отсчитывается от направления вектора \vec{k}_{\perp} . Воспользовавшись явным выражением для вектора поляризации геликона, получим

$$A_p^{(n)} = \left(1 + \frac{k^2}{k_z^2}\right)^{-1/2} \left(J_n \frac{n\Omega}{k_{\perp} V} \left| \frac{k}{k_z} \right| + \sin\theta J_n' \right) \quad (16)$$

$$A_{\theta}^{(n)} = -A_p^{(n)} \frac{1}{\sin\theta} \frac{k_z V}{\omega_{\vec{k}}} \quad (17)$$

где $J_n \equiv J_n\left(\frac{k_{\perp} V}{\Omega} \sin\theta\right)$ - функция Бесселя.

Отметим, что формулы (16) и (17) справедливы только для $n \neq 0$, поскольку при их выводе мы пренебрегли величиной $\omega_{\vec{k}}$ по сравнению с $n\Omega$. Что же касается членов с $n = 0$, то они, как уже отмечалось в предыдущем разделе, не дают вклада в квазилинейные уравнения.

С помощью формулы (17) нетрудно получить следующие соотношения между компонентами тензора диффузии:

$$\frac{D_{pp}}{D_{p\theta}} \approx \frac{\omega_{\vec{k}}}{k_z V} \ll 1$$

$$\frac{D_{p\theta}}{D_{\theta\theta}} \approx \frac{\omega_{\vec{k}}}{k_z V} \ll 1$$

Отсюда видно, что увеличение углового разброса пучка в процессе релаксации происходит гораздо быстрее, чем увеличение разброса по модулю импульса. Поэтому задача может быть сведена к отысканию углового распределения электронов пучка $\Phi(\theta; z)$:

$$\Phi = \frac{2\pi}{n_0} \int_0^{\infty} F p^2 dp \quad (18)$$

Уравнение для Φ получается путем интегрирования (12) по ρ с учетом условия $\Delta\rho/\rho_0 \ll \Delta\theta$:

$$V_0 \cos\theta \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \mathcal{D}_{\theta\theta} \Big|_{\rho=\rho_0} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \quad (19)$$

Граничное условие при $z=0$ имеет вид

$$\Phi(\theta; z) \Big|_{z=0} = \Phi_0(\theta) \quad (20)$$

Инкремент неустойчивости γ_0 с точностью до членов порядка $\frac{\omega_{\vec{k}}}{k_z V}$ выражается через функцию Φ следующим образом:

$$\gamma_0 = -\Omega_0 \frac{\pi}{2} \frac{n_0}{n_0} \left(1 + \frac{k_z^2}{k^2}\right) \frac{k_z}{|k_z|} \frac{k V_0}{\Omega_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} |A_p^{(n)}|^2 \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \delta\left(\frac{k_z V_0}{\Omega_0} \cos\theta + n\right) d\theta \quad (21)$$

(здесь $\Omega_0 \equiv \Omega(\rho_0)$)

Для сокращения записи удобно перейти к безразмерным переменным

$$z = \frac{1}{\pi} \frac{n_0}{n_0} \frac{c}{\omega_p} \frac{\omega_n}{\omega_p} \frac{c}{V_0} x$$

$$k_z = \frac{\Omega_0}{V_0} \xi; \quad k_{\perp} = \frac{\Omega_0}{V_0} \eta$$

$$W_{\vec{k}} = \frac{1}{2\pi} n_0 \rho_0 V_0 \left(\frac{V_0}{\Omega_0}\right)^3 I$$

В новых переменных система квазилинейных уравнений приобретает вид:

$$\cos\theta \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1}{\sin\theta} \cdot \quad (22)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{n^2 Q_n^2}{n^2 + \eta^2 \cos^2\theta} I \delta(\xi \cos\theta + n) d\xi \eta d\eta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{n^2 Q_n^2}{2n^2 + \eta^2 \cos^2\theta} \delta(\xi \cos\theta + n) \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} d\theta \quad (23)$$

где

$$Q_n = \left(1 + \frac{\eta^2 \cos^2 \theta}{n^2}\right)^{1/2} \frac{n}{\eta} \int_n (\eta \sin \theta) + \sin \theta \int_n' (\eta \sin \theta)$$

Мы получим решение системы (22), (23) на той стадии релаксации, где угловой разброс пучка еще мал ($\Delta \theta \ll 1$). При этом, однако, $\Delta \theta$ может существенно превышать начальный угловой разброс пучка $\Delta \theta_0$.

Сделаем предположение, подтверждающееся результатом, что при $\Delta \theta \ll 1$ основной вклад в правые части уравнений (22), (23) дают члены с $n = -1$. Это дает возможность существенно упростить исходную систему уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\theta} \int_0^\infty \frac{Q_{-1}^2}{1 + \eta^2} I \eta d\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (24)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -I \frac{Q_{-1}^2}{2 + \eta^2} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (25)$$

Здесь I является функцией переменных θ, η, x , причем

$$I(\theta; \eta; x) \equiv I(\xi; \eta; x) \Big|_{\xi = \frac{1}{\cos \theta}}$$

Идея решения системы (24), (25) состоит в использовании большого параметра Λ , равного логарифму отношения плотности энергии колебаний, возбужденных пучком, к плотности энергии тепловых шумов (см. /5, 6/). Как видно из уравнения (25),

$$I = I_T \exp - \left(\frac{Q_{-1}^2}{2 + \eta^2} \int_0^x \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} dx \right) \quad (26)$$

где I_T - спектральная плотность энергии тепловых шумов. Поскольку интеграл, стоящий в показателе экспоненты, очень велик ($\sim \Lambda$), величина I как функция η имеет острый максимум в точке $\eta = \eta_m$, соответствующей максимуму функции $Q_{-1}^2 / (2 + \eta^2)$

Таким образом, можно с достаточной точностью положить

$$I(\theta; \eta; x) = \Psi(\theta; x) \delta(\eta - \eta_m(\theta)) \quad (27)$$

При $\theta \ll 1$ величина η_m легко находится аналитически:

$$\eta_m = 4^{1/3} \theta^{-2/3} \quad (28)$$

Подставляя формулы (27), (28) в уравнения (24), (25), получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4^{-2/3} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta^{1/3} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{4} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Psi \quad (30)$$

Система (29), (30) обладает интегралом, позволяющим найти спектр колебаний по известной функции распределения

$$\Phi - \Phi_0 + 4^{1/3} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta^{-2/3} \Psi = 0 \quad (31)$$

Отсюда

$$\Psi = 4^{-1/3} \theta^{2/3} \int_0^{\theta} (\Phi_0 - \Phi) \theta d\theta \quad (32)$$

Чтобы найти функцию $\Phi(\theta; x)$ заметим, что уравнения (29), (30) по своей структуре аналогичны системе уравнений, рассмотренной в работе /8/. Пользуясь этой аналогией можно утверждать, что при тех значениях θ , где величина Ψ существенно превышает тепловой уровень, производная $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ обязательно должна быть малой ($\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sim \Lambda^{-1}$). Обозначим границы той области, где шум велик, через θ_- и θ_+ . Тогда при $\theta_-(x) < \theta < \theta_+(x)$ функция Φ имеет вид плато. При всех остальных значениях θ она, как видно из формулы (31), равна Φ_0 . Обозначая высоту плато через $P(x)$, получим

$$\Phi(\theta; x) = \begin{cases} \Phi_0(\theta) ; & \theta < \theta_-(x) \\ P(x) ; & \theta_-(x) < \theta < \theta_+(x) \\ \Phi_0(\theta) ; & \theta > \theta_+(x) \end{cases} \quad (33)$$

Высота плато определяется из условия сохранения числа частиц

$$P(x) = \frac{2}{\theta_+^2 - \theta_-^2} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \Phi_0 \theta d\theta \quad (34)$$

С учетом формул (33) и (34) выражение (32) для спектральной функции Ψ приобретает вид:

$$\Psi = 4^{-1/3} \theta^{2/3} \left(\int_{\theta_-}^{\theta} \Phi_0 \theta d\theta - \frac{\theta^2 - \theta_-^2}{\theta_+^2 - \theta_-^2} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \Phi_0 \theta d\theta \right) \quad (35)$$

Уравнения для θ_- и θ_+ получаются путем интегрирования соотношения (30) по промежуткам: $\theta_- - 0 < \theta < \theta_- + 0$ и $\theta_+ - 0 < \theta < \theta_+ + 0$. Принимая во внимание, что логарифм отношения плотности энергии колебаний, возбужденных пучком, к плотности энергии тепловых шумов с хорошей точностью равен Δ , получим:

$$\frac{d\theta_-}{dx} = \frac{1}{4\Delta} \theta_- \left[\frac{2}{\theta_+^2 - \theta_-^2} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \Phi_0 \theta d\theta - \Phi_0(\theta_-) \right] \quad (36)$$

$$\frac{d\theta_+}{dx} = \frac{1}{4\Delta} \theta_+ \left[\frac{2}{\theta_+^2 - \theta_-^2} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \Phi_0 \theta d\theta - \Phi_0(\theta_+) \right] \quad (37)$$

Граничные условия для θ_- и θ_+ имеют вид:

$$\theta_-(0) = \theta_+(0) = \theta_0$$

где θ_0 — точка минимума функции $\theta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta}$.

Анализ уравнений (36) и (37) показывает, что в процессе релаксации функция $\theta_-(x)$ убывает, а $\theta_+(x)$ возрастает. Качественная картина релаксации изображена на рис.1. На начальной стадии поведение величин θ_- и θ_+ сильно зависит от деталей функции $\Phi_0(\theta)$, и его не удается найти аналитически. Однако асимптотический ход релаксации оказывается весьма простым:

$$\theta_- = \theta^* \exp\left(-\frac{\Phi_0(0)}{4\Delta} x\right) \quad (38)$$

$$\theta_+ = \left(\frac{x}{4\Lambda} \right)^{1/2} \quad (38)$$

Здесь θ_+ — константа, зависящая от конкретного вида $\Phi_0(\theta)$.
Решение (38) применимо при $x \gg \Lambda \Delta\theta_0^2$, т.е. при $\theta_- \ll \Delta\theta_0$
и $\theta_+ \gg \Delta\theta_0$. В асимптотическом режиме вместо формулы (35)
можно пользоваться более простым выражением для спектральной
функции

$$\Psi(\theta; x) = 4^{-1/3} \theta^{2/3} \begin{cases} 1 - \frac{\theta^2}{\theta_+^2} & ; 0 < \theta < \theta_+ \\ 0 & ; \theta > \theta_+ \end{cases} \quad (39)$$

Отсюда получается следующая формула для потока энергии коле-
баний^{х)} S

$$S = \frac{9 \cdot 4^{1/3}}{20} \left(\frac{\omega_H}{\omega_p} \right)^2 n_b m c^2 v_b \theta_+^{4/3} \quad (40)$$

В заключение отметим, что полученное решение квазилиней-
ной задачи полностью согласуется с качественными оценками, про-
деланными в разделе 2.

4. Обсуждение результатов

Перечислим условия, которые должны быть выполнены для
того, чтобы мог осуществиться механизм релаксации пучка, рас-
смотренный в разделах 2 и 3.

Мы решали задачу, пренебрегая затуханием геликонов на
электронах и ионах плазмы. Затухание на ионах экспоненциально ма-
ло для волн, фазовая скорость которых больше тепловой скорости
ионов:

$$\frac{\omega_{\vec{k}}}{k} \equiv c \frac{\omega_H}{\omega_p} \frac{k_z c}{\omega_p} > \left(\frac{T}{M} \right)^{1/2}$$

х) Для наглядности формула (40) записана в размерных переменных.

Подставив сюда значение $k_z \sim \Omega_b/c$, получим следующее ограничение на величину магнитного поля

$$\omega_H > \omega_p \left(\frac{E_b}{mc^2} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{Mc^2} \right)^{1/4} \quad (41)$$

Заметим, что геликоны могут возбуждаться пучком даже в том случае, когда имеет место обратное неравенство. Правда, при этом должны раскачиваться колебания с большими k_z , отвечающими резонансам высоких порядков ($k_z c = n\Omega$; $n > 1$). Задача о релаксации пучка в такой ситуации решается совершенно аналогично тому, как это было сделано в разделах 2 и 3.

Декремент затухания на электронах для геликонов, взаимодействующих с пучком, задается следующей формулой:

$$\gamma_e = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \omega_R \frac{k_{\perp}}{k} \frac{k_{\perp}}{\omega_H} \left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}$$

Сравнивая γ_e с инкрементом пучковой неустойчивости (5), получим условие, позволяющее пренебречь затуханием на электронах в течение всего процесса релаксации

$$\frac{n_b}{n_0} > \left(\frac{\omega_H}{\omega_p}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{E_b}\right)^2 \left(\frac{T}{mc^2}\right)^{1/2} \quad (42)$$

(мы воспользовались явным выражением для волнового вектора наиболее неустойчивых колебаний).

В рассматриваемых условиях пучок наряду с геликонами, разумеется, возбуждает в плазме также ленгмюровские колебания. Остановимся на вопросе о том, когда можно пренебречь влиянием ленгмюровских волн на изменение углового разброса пучка и спектр возбуждаемых пучком геликонов. Для этого, естественно, необходимо, чтобы длина релаксации l_H (см.(7)) была меньше, чем величина l (см.(2)):

$$\frac{\omega_H}{\omega_p} < \frac{1}{\Lambda} \frac{m}{M} \left(\frac{mc^2}{T}\right)^2 \left(\frac{E_b}{mc^2}\right)^3 \quad (43)$$

Кроме условия (43), имеется еще ограничение на начальный угловой разброс пучка:

$$\Delta\theta_0 > (l_H/l)^{1/3}$$

Поясним смысл последнего ограничения. При "ленгмюровском" механизме релаксации угловой разброс пучка изменяется по следующему закону^{х)}

$$\Delta \theta \sim (z/l)^{1/5} \quad (44)$$

С другой стороны, при релаксации на геликонах

$$\Delta \theta \sim (z/l_h)^{1/2}$$

(см.(6)).

Из соотношений (6) и (44) видно, что релаксация пучков с малым угловым разбросом ($\Delta \theta_0 < (l_h/l)^{1/3}$) происходит в две стадии.

На первой (вплоть до $\Delta \theta \sim (l_h/l)^{1/3}$) угловой разброс увеличивается из-за взаимодействия электронов с ленгмюровскими колебаниями. На второй - из-за взаимодействия с геликонами. Если же $\Delta \theta_0 > (l_h/l)^{1/3}$, то первая стадия релаксации несущественна.

Необходимо отметить, что даже в том случае, когда размытие пучка по углу связано с возбуждением геликонов, релаксация по энергии может происходить за счет ленгмюровских колебаний. Соответствующая оценка энергетических потерь пучка имеет вид:

$$\frac{\Delta E}{E_0} \sim \begin{cases} (l_h/l)^{1/3} & ; \Delta \theta_0 < (l_h/l)^{1/3} \\ (l_h/l) \frac{1}{\Delta \theta_0^2} & ; \Delta \theta_0 > (l_h/l)^{1/3} \end{cases} \quad (45)$$

Этот результат легко получается из соотношения, связывающего потерю энергии на возбуждении ленгмюровских колебаний с величиной углового разброса пучка /2/^{х)}

х) Отличие этой формулы от результата работы /2/ ($\Delta \theta \propto z^{1/4}$) связано с тем обстоятельством, что в /2/ спектр ленгмюровских колебаний в области $k > \bar{\omega}_p/c$ фактически предполагался изотропным. Более аккуратное исследование, проведенное в работе /7/, показало, что в действительности колебания сосредоточены в относительно узкой области k -пространства. Приведенная здесь оценка написана с учетом этого факта.

хх) Причина отличия формулы (46) от результата работы /2/ указана в замечании по поводу формулы (44).

$$\frac{d}{dz} \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{1}{l} \frac{1}{\Delta \theta^4} \quad (46)$$

Покажем теперь, что в интересующих нас условиях можно пренебречь нелинейным взаимодействием геликонов с ленгмюровскими колебаниями. Речь идет о процессе распада $l \rightarrow l + h$, где символами " l " и " h ", соответственно, обозначены ленгмюровские волны и геликоны. Вычисление вероятности этого процесса дает следующую оценку инкремента распадной неустойчивости

$$\gamma_{l \rightarrow l+h} \sim \omega_p \frac{U_l}{n m c^2} \left(\frac{k_h c}{\omega_p} \right)^3$$

Воспользовавшись этой оценкой и выражением для плотности энергии ленгмюровских колебаний, возбуждаемых пучком (см./2/),

$$U_l \sim n_b m c^2 \left(\frac{T}{m c^2} \right)^2 \frac{M}{m} \frac{m c^2}{E_0} \frac{1}{\Delta \theta^2}$$

нетрудно проверить, что соотношение

$$\gamma_{l \rightarrow l+h} < \gamma_b$$

выполняется автоматически.

Сделаем еще замечание относительно взаимодействия пучка с низкочастотными колебаниями, в которых существенно движение ионов. Как видно из условия резонанса (3), z -составляющая волнового вектора волны, взаимодействующей с пучком, ограничена снизу величиной Ω_b/c . Поэтому при

$$\frac{T}{m c^2} \gg \frac{m}{M} \left(\frac{E_0}{m c^2} \right)^2$$

выполняется неравенство

$$k_z \left(\frac{T}{M} \right)^{1/2} \gg \omega_n \frac{m}{M} \quad (47)$$

позволяющее считать движение ионов в колебаниях незамагниченным. Более того, нетрудно показать, что при $\beta > 1$ неравенство (47) позволяет вообще пренебречь вкладом ионов в дисперсионное соотношение^{х)}.

х) Напомним, что речь идет об изотермической плазме, где невозможны ионно-звуковые колебания.

Это означает, что при указанных условиях низкочастотные (ионные) колебания не влияют на релаксацию пучка.

В настоящей работе мы ограничились исследованием релаксации пучка в случае, когда магнитное поле в системе относительно мало $\beta > 1$. Следует, однако, отметить, что это ограничение использовалось нами только в тех пунктах, где речь шла о возможности пренебречь взаимодействием пучка со всеми колебаниями, кроме геликонов. Сам же по себе геликоновый механизм релаксации пучка может оказаться важным и при $\beta < 1$ поскольку все сформулированные нами ограничения носят характер достаточных условий.

В заключение напомним, что все результаты были получены для случая, неограниченного в поперечном направлении пучка, т.е. подразумевалось выполненным неравенство $R \gg l_n$, где R — радиус пучка. В противном случае ($R < l_n$) волны, распространяясь в радиальном направлении, покидают область взаимодействия с пучком, не успев нарасти. Однако ограничение $R \gg l_n$ может оказаться несущественным, если из-за радиальной неоднородности концентрации плазмы и магнитного поля плазменный столб представляет собой волновод. Для геликонов такая ситуация легко осуществима. Качественная картина релаксации при этом остается той же, что и в случае неограниченного пучка.

Авторы приносят глубокую благодарность Д.Д.Рютову за полезные обсуждения работы.

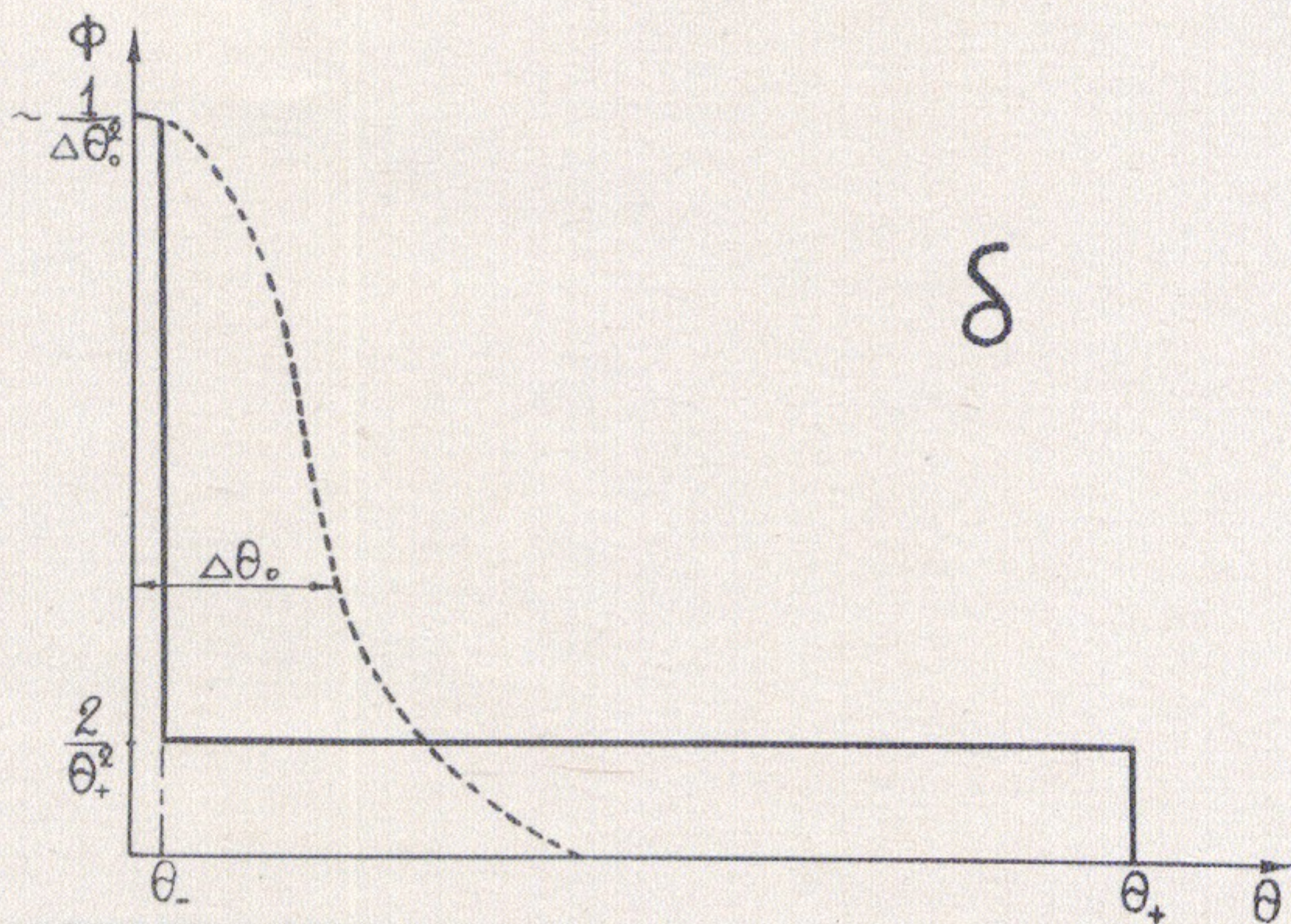
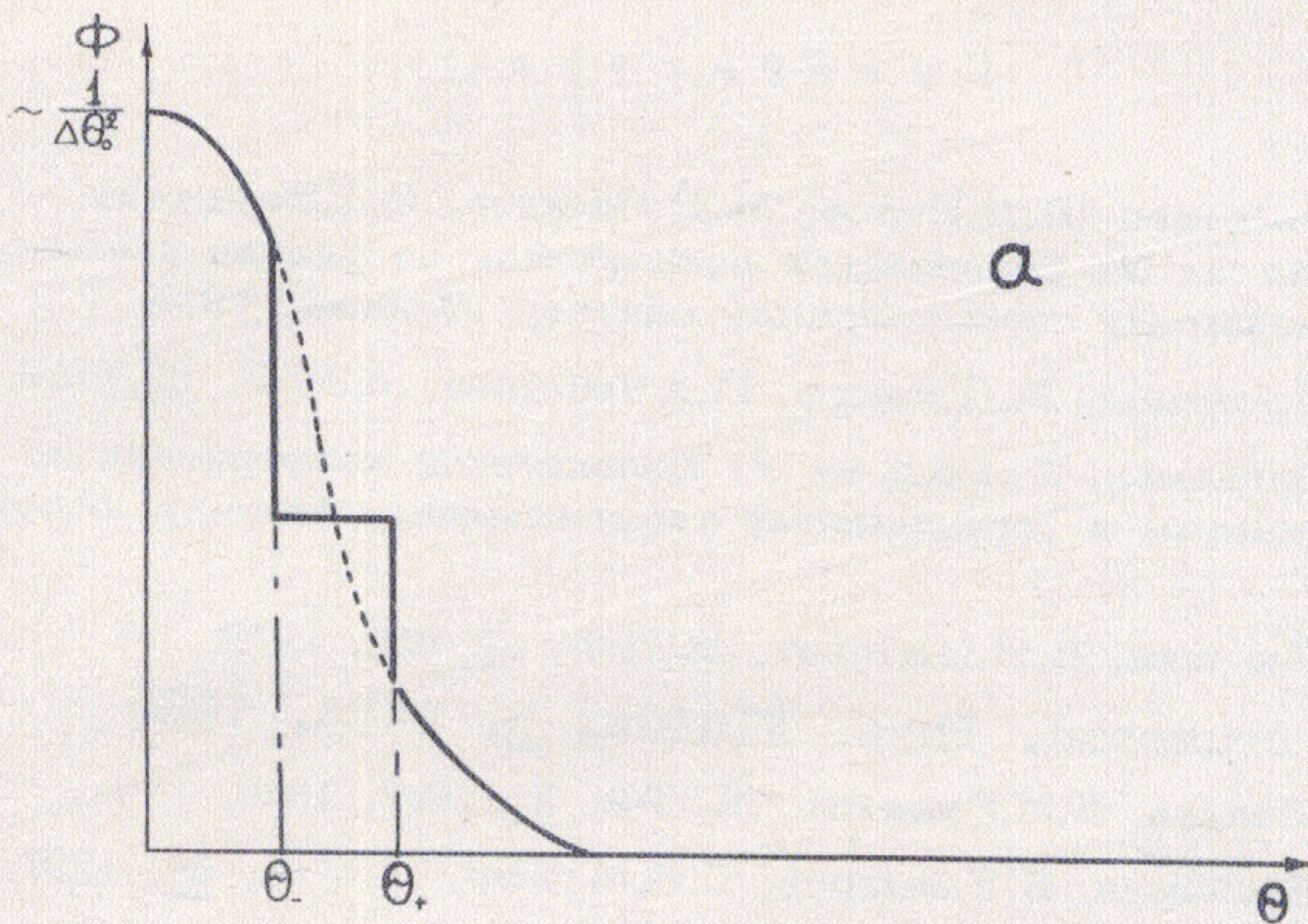


Рис.1. Динамика релаксации пучка (пунктиром изображена начальная функция распределения).

$\Delta\theta_0$ - характерное значение начального углового разброса пучка:

- а) начальная стадия релаксации,
- б) асимптотическая стадия.

Л и т е р а т у р а

1. П.З.Чеботаев, Д.Д.Рютов, М.Д.Спектор, Г.Э.Векштейн. Доклад на У1 Европейской конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, Москва, 1973.
2. Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, П.З.Чеботаев. ЖЭТФ, 62, 1409, 1972.
3. Б.Н.Брейзман. Доклад на У1 Европейской конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, Москва, 1973.
4. М.А.Ляшниц, В.Н.Цытович. ЖЭТФ, 62, 606, 1972.
5. W. E. Drummond. Phys. Fluids, 5, 1133, 1962
6. А.А.Иванов, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 51, 1922, 1966.
7. Б.Н.Брейзман, В.Е.Захаров, С.Л.Мушер. ЖЭТФ, 64, 1297, 1973.

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати МН 08378 от 18.7.73г.
Усл. Л, 25 печ. л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ. № 59 ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР