11

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 81 - 73

Е А. Кузнецов

СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛН

Новосибирск

1973

СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛН

Е.А.Кузнецов

АННОТАЦИЯ

В работе изучается турбулентность магнитогидродинамических (МГД) волн в сильно замагниченной плазме, Исследуются процессы перекачки энергии волн, приводящие к установлению колмогоровских спектров. Рассмотрена также задача о параметрическом возбуждении МГД волн внешним периодическим магнитным полем.

Центральное место в теории турбулентности занимает понятие спектра турбулентности, то есть распределения энергии по масштабам. Задача об определении спектра турбулентности является трудной и в настоящее время далеко нерешенной проблемой. Важным результатом в этой области является гипотеза А.Н.Колмогорова /1/ об автомодельном характере спектра сильной турбулентности (турбулентности несжимаемой жидкости). В недавнее время идеи автомодельности были перенесены на слабую волновую турбулентность. Наличие у волн дисперсии приводит к тому, что существует область интенсивностей волн, при которой их взаимодействие можно считать слабым. Именно, слабость взаимодействия в сочетании с гипотезой случайных фаз отдельных волн и лежит в основе теории слабой турбулентности волн. Задача же об отыскании спектров в этой теории сводится к решению кинетических уравнений для волн. Наличие масштабной инвариантности кинетических уравнений в некоторой области (инерционном интервале) позволяет найти в этой области колмогоровские решения /2-4/.

До сих пор почти все результаты о колмогоровских спектрах относились к случаю изотропных сред. В действительности же влияние анизотропии, например магнитного поля в плазме, является существенным.

Наиболее ярко роль магнитного поля в плазме проявляется при турбулентности магнитогидродинамических (МГД) волн. Исследование МГД турбулентности и составляет предмет данной статьи. Турбулентность волн, как известно, всегда связана с их взаимодействием. Описание же взаимодействия волн (вычисление матричных элементов) исходя из уравнений МГД является достаточно трудоемкой задачей. В этом смысле плодотворным подходом является описание на языке канонических переменных /5/. В работе В.Е.Захарова и автора /6/ был сформулирован вариационный принцип для МГД и введены канонические переменные исходя из гамильтониана системы, который по величине совпадает с полной энергией. Более естественно сформулировать вариационный принцип для МГД можно исходя из лагранжиана электромагнитного поля и находящихся в нем частиц (жидкости) /7/, что и сделано в настоящей работе (§ 1). Введение нормальных переменных позволяет достаточно просто вычислить все матричные элементы взаимодействия для МГД волн. Как известно /8,9/, в плазме низкого давления ($\beta = 8\pi nT/H^2 \ll 1$), а именно этот случай разбирается в статье, наиболее сильно взаимодействуют медленные магнитозвуковые волны (звук) с быстрыми магнитозвуковыми и альфвеновскими волнами (А - волнами). При этом последние выступают в качестве высокочастотных по отношению к первым. Это позволяет, усредняя уравнения по "быстрой" частоте А - волн, получить достаточно простую замкнутую систему уравнений (§2). На языке нормальных переменных это взаимодействие представляет собой рассеяние А-волн на низкочастотных флуктуациях плотности. Именно, это взаимодействие приводит е неустойчивости А-волн. Характер неустойчивости существенно зависит от ширины пакета и амплитуд А-волн. Так, для достаточно узких пакетов, что соответствует приближению монохроматической волны (§2), при малых амплитудах имеет место распадная неустойчивость С возбуждения звука /8/. При больших амплитудах неустойчивость переходит в так называемую модефицированную распадную /14/. Для широких же пакетов ситуация существенно другая. Здесь применимо статистическое описание - кинетические уравнения для волн. Знание инкремента, которой на этой стадии пропорционален плотности энергии колебаний , оказывается вполне достаточным для определения из соображений размерности колмогоровских спектров. Наличие двух интегралов движения - энергии и полного числа "частиц" (А-волн), влечет за собой появление двух решений колмогоровского типа, первое из которых соответствует постоянному потоку числа частиц, второе - постоянному потоку энергии. Удается показать, что для взаимодействия альфвеновских и звуковых волн эти решения действительно удовлетворяют кинетическим уравнениям. Величины потоков энергии и "частиц", естественно, определяется лишь источниками турбулентности. В работе рассмотрен один из механизмов возбуждения - параметрическое возбуждение А-волн внешним периодическим магнитным полем (§ 4). Здесь же оценены величины потоков энергии в плазму и числа частиц.

§ 1. Вариационный принцип и нормальные переменные

Рассмотрим уравнения МГД. Будем считать, что влиянием диссипативных эффектов можно пренебречь. Кроме того, будем рассматривать баротропные течения. Последнее означает, что внутренняя энергия плазмы зависит лишь от плотности. Тогда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla w + \frac{1}{4\pi\rho}\left[\operatorname{rot}\vec{H}, \vec{H}\right] \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left[\vec{v}, \vec{H}\right] \tag{3}$$

$$w = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}\varepsilon(\rho).$$

Здесь w -энтальпия, p-давление. Для этой системы уравнений сформулируем вариационный принцип.

Прежде всего отметим, что из уравнений (1,3) следует, что $\vec{H}/\rho$ двигается вместе с "жидкой" линией, другими словами каждая силовая линия перемещается вместе с частицами, находящимися на ней (см., например /10/ , это - хорошо известный факт "вмороженности" магнитного поля. Это обстоятельство позволяет считать, что магнитное поле $\vec{H}$, и плотность ρ выступают в качестве обобщенных координат.

Для формулировки вариационного принципа будем исходить из известного выражения лагранжиана электромагнитного поля и находящихся в нем частиц (жидкости) /7/; лагранжиан следует, естественно, записать в МГД - приближении. Последнее означает, что в лагранжиане следует отбросить малые члены порядка $\vec{V}/c$, например, следует пренебречь вкладом от электрического поля E по сравнению с магнитным, поскольку $E \sim V/c\, H \ll H$.

В результате $\mathcal{L}$ в МГД - приближении имеет вид:

$$\mathcal{L} = \rho\frac{v^2}{2} - \varepsilon(\rho) - \frac{H^2}{8\pi} + \vec{S}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mathrm{rot}[\vec{v}\vec{H}]\right) +$$

$$+ \Phi\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{V}\right) + \Psi\,\mathrm{div}\,\vec{H}.$$

Здесь в лагранжиан включены неопределенные множители Лагранжа $\vec{S}$, Φ и Ψ.

Далее, зная $\mathcal{L}$, построим функционал действие:

$$I = \int \mathcal{L}\, dt\, d\vec{z}$$

минимизация которого по переменным $\vec{V}$, ρ и $\vec{H}$ даёт уравнения:

$$\rho\vec{V} = [\vec{H}, \mathrm{rot}\,\vec{S}] + \rho\nabla\Phi \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\Phi - \frac{V^2}{2} + w(\rho) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \frac{\vec{H}}{4\pi} - [\vec{v}, \mathrm{rot}\,\vec{S}] + \nabla\Psi = 0 \tag{6}$$

Таким образом, из вариационного принципа вытекает, что скорость $\vec{V}$ определена через новые переменные $\vec{S}$ и Φ. Переменные $\vec{H}$ и $\vec{S}$ в формуле (4) являются аналогами переменных Клебша /11/ в идеальной гидродинамики. Следует подчеркнуть, что эта замена переменных неоднозначна. Действительно, к $\vec{S}$ можно добавить вектор $\vec{S}_0$ а к Φ скаляр Φ_0, удовлетворяющих уравнению:

$$[\vec{H}, \mathrm{rot}\,\vec{S}_0] + \rho\nabla\Phi_0 = 0$$

Наложим на $\vec{S}$ калибровочное условие: $\mathrm{div}\,\vec{S} = 0$, отсюда следует условие на ψ:

$$\psi = \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{div}\,[\vec{v}, \mathrm{rot}\,\vec{S}] + \psi_0$$

где ψ_0 - произвольное решение уравнения Лапласа: $\Delta\psi_0 = 0$. В частности, когда $|\vec{r}| \to \infty$, $\vec{v} \to 0$, $H \to H_0$, $\rho \to \rho_0$ величину ψ_0 удобно выбрать так, чтобы $S \to 0$ при $|\vec{r}| \to \infty$. Очевидно тогда $\psi_0 = -\frac{1}{4\pi}(\vec{H}_0\vec{r})$.

Остается проверить, что система уравнений (4-6) не противоречит системе уравнений МГД. Подставляя (4) в уравнение движения (2) убеждаемся после простых преобразований, что оно приводится к виду:

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (V\nabla)\Phi - \frac{V^2}{2} + w(\rho)\right) +$$

$$+ \left[\frac{\vec{H}}{\rho}, \mathrm{rot}\left\{\frac{\partial\vec{S}}{\partial t} + \frac{\vec{H}}{4\pi} - [\vec{v}, \mathrm{rot}\,\vec{S}]\right\}\right] = 0$$

Учитывая (5,6), легко убедиться, что это равенство выполняется тождественно.

Можно говорить, что новая система уравнений (1,3,5,6) эквивалентна системе уравнений МГД. Действительно, в силу формулы (4) любое решение системы (1,3,5,6) порождает некое решение системы уравнений МГД. В предположении о единственности задачи Коши для системы (1-4) и системы (1,3,5,6) верно и обратное: любому решению системы (1-4) можно сопоставить некий класс решений системы (1,3,5,6). Для этого достаточно по набору значений $\vec{V}, \vec{H}, \rho$ в некоторый момент времени t_0 построить всевозможные наборы величин $\vec{S}$ и Φ удовлетворяющих формуле (4) и взять их в качестве начальных условий (1,3,5,6).

Далее, зная функцию Лагранжа, определим обобщенные импульсы построим гамильтониан системы:

$$\mathcal{H} = \int \left(\vec{S}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \Phi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathcal{L} \right) d\vec{\tau} =$$

$$= \int \left\{ \frac{\rho V^2}{2} + \varepsilon(\rho) + \frac{H^2}{8\pi} - \psi \, \mathrm{div} H \right\} d\tau$$

который по величине совпадает с энергией системы. При этом уравнения движения (1,3,5,6) являются уравнениями Гамильтона:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{S}}, \qquad \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{H}}$$

а переменные (ρ, Φ) и $(\vec{H}, \vec{S})$ являются парами канонически сопряжённых величин.

В однородной плазме, помещенной в однородное магнитное поле H_0, трем независимым парам ($\mathrm{div} H = \mathrm{div} S = 0$) канонически сопряженных величин соответствуют три типа волн. Разложим скорость $\vec{V}$ по степеням канонических переменных:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \dots \tag{8}$$

$$\vec{V}_0 = \frac{1}{\rho_0}\left[\vec{H}_0 \, \mathrm{rot}\, \vec{S}\right] + \nabla\Phi$$

$$\vec{V}_1 = -\frac{1}{\rho_0^2}\left[\vec{H}_0 \, \mathrm{rot}\, \vec{S}\right]\delta\rho + \frac{1}{\rho_0}\left[\vec{h}, \mathrm{rot}\, \vec{S}\right]$$

где $\vec{h}$ и $\delta\rho$ есть отклонения $\vec{H}$ и ρ от равновесных значений H_0 и ρ_0. Тогда гамильтониан среды будет также представ - лять собой ряд по степеням канонических переменных:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} + \ldots \tag{9}$$

$$\mathcal{H}_0 = \int \left\{ \frac{\rho_0 V_0^2}{2} + \frac{h^2}{8\pi} + c_s^2 \frac{\delta\rho^2}{2\rho_0} \right\} dr$$

$$\mathcal{H}_{int} = \int \left\{ \rho_0 (\vec{V_0} \vec{V_1}) + \frac{\delta\rho}{2} V_0^2 + q c_s^2 \frac{\delta\rho^3}{2\rho_0^2} \right\} dr$$

$$\text{где } \Delta\mathcal{E}(\rho) = \frac{\rho_0 c_s^2}{2} \left\{ \left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^2 + q \left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^3 + \ldots \right\}$$

Далее, совершая преобразование Фурье по координатам, перей - дем к переменным $a_k(i)$ по формулам:

$$\vec{h}_k = \vec{e}_k(1) \sqrt{2\pi\omega_1} \left(a_k(1) + a^*_{-k}(1) \right) + \vec{e}_k(2) \sum_{2,3} \sqrt{2\pi\omega_i} \left(a_k(i) + a^*_{-k}(i) \right) \lambda_i$$

$$\vec{S}_k = -i \vec{e}_k(1) \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega_1}} \left(a_k(1) - a^*_{-k}(1) \right) - i \vec{e}_k(2) \sum_{2,3} \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega_i}} \left(a_k(i) - a^*_{-k}(i) \right) \lambda_i \tag{10}$$

$$\delta\rho_k = \sum_{2,3} \left(\frac{\rho_0 \omega_i}{2 c_s^2} \right)^{1/2} \mu_i \left(a_k(i) + a^*_{-k}(i) \right)$$

$$\Phi_k = -i \sum_{2,3} \left(\frac{c_s^2}{2\rho_0 \omega_i} \right)^{1/2} \mu_i \left(a_k(i) - a^*_{-k}(i) \right)$$

где

$$\vec{e}_k(1) = \frac{[\vec{k}\vec{n}_0](\vec{k}\vec{n}_0)}{|[kn_0]||(\vec{k}\vec{n}_0)|}, \quad \vec{e}_k(2) = \frac{[\vec{k}[\vec{k}\vec{n}_0]]}{k|[\vec{k}\vec{n}_0]|}$$

есть единичные вектора поляризации, $\vec{n}_0 = \vec{H}_0 / H_0$

$$\omega_k(1) = |(\vec{k}\vec{V}_A)|$$

$$\omega_k(2,3) = \frac{1}{2} \left| \sqrt{k^2 V_A^2 + k^2 c_s^2 + 2(\vec{k}\vec{V}_A) k c_s} \pm \sqrt{k^2 V_A^2 + k^2 c_s^2 - 2(\vec{k}\vec{V}_A) k c_s} \right|$$

$$\lambda_2 = \mu_3 = \left(1 - \frac{\omega_3^2 - k^2 c_s^2}{\omega_2^2 - k^2 c_s^2} \right)^{1/2}$$

$$\lambda_3 = \mu_2 = \left(1 - \frac{\omega_2^2 - k^2 c_s^2}{\omega_3^2 - k^2 c_s^2} \right)^{1/2}$$

$\vec{V}_A = \vec{H}_0 / (4\pi\rho_0)^{1/2}$ – альфвеновская скорость.

Такое представление диагонализует гамильтониан $\mathcal{H}_0$:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i \int \omega_k(i)\, a_k(i)\, a_k^*(i)\, d\vec{k}$$

т.е. переменные $a_k(i)$ есть нормальные переменные. Уравнения движения в этих переменных имеют вид уравнений Гамильтона:

$$\frac{\partial a_k(i)}{\partial t} = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_k^*(i)}$$

Откуда следует, что $\omega_k(i)$ есть соответственные частоты: $\omega_k(1)$ -альфвеновских, $\omega_k(2,3)$ -быстрых и медленных магнитозвуковых волн. Подставляя преобразование (10) в гамильтониан взаимодействия (9) получаем всевозможные членыгамильтониана взаимодействия волн. Так, например, трехволновому взаимодействию соответствует гамильтониан:

$$\mathcal{H}_{int} = \int \sum_{ije} \left[V^{ije^{*}}_{k k_1 k_2} a_k(i)\, a_{k_1}(j)\, a_{k_2}(e) + к.с \right] \times$$

$$\times\, \delta_{k-k_1-k_2}\, dk\, dk_1\, dk_2$$

§ 2. Неустойчивость монохроматичной альфвеновской волны большой амплитуды

Прежде чем переходить к вопросу об устойчивости,сделаем ряд замечаний. Вся физическая информация о взаимодействии волн заложена в матричных элементах V гамильтониана. Общее же выражение для них оказывается весьма громоздкими, и по этой причине бесполезным. Поэтому, в дальнейшем исследуем случай $C_S \ll V_A$, что соответствует плазме низкого давления ($\beta = 8\pi nT/H^2 \ll 1$). Такое возможно, например, в установках с магнитным удержанием плазмы и в ряде астрофизических ситуаций.

Для этого случая собственные частоты:

$$\omega(1) = |(kV_A)|\,,\; \omega(2) = kV_A\,,\; \omega(3) = \Omega_k = k_z C_S$$

а основное взаимодействие волн есть взаимодействие "быстрых" альфвеновских (1) и магнитозвуковых (2) волн (А - волн) с "медленными" - звуковыми (3). Качественно легко понять как устроено это взаимодействие. При распространении пакета А - волн в плазме её средние характеристики (плотность и скорость) медленно меняются. Это приводит к тому, что средняя альфвеновская скорость отличается от своего локального значения на $\Delta V_A = -\frac{1}{2} V_A\, \delta\rho_s/\rho_0$, где $\delta\rho_s$ -низкочастот -

ная вариация плотности плазмы, кроме того частота А-волн еще испытывает эффект Допплера: $\Delta\omega \sim k V_D$, где V_D -дрейфовая скорость среды. Если низкочастотные флуктуации плотности и скорости, инициированные А-волнами, попадают в резонанс с собственными колебаниями среды, в данном случае со звуком, то возникает взаимодействие, которое приводит к уширению спектра А-волн - иными словами происходит индуцированное рассеяние А-волн. Следует отметить, что в данном случае основ - ным взаимодействием будет рассеяние на низкочастотных флуктуациях плотности, рассеяние на флуктуациях скорости -эффект Допплера, мало по параметру β.

В силу этого гамильтониан взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{H}_{int} = - \int \frac{\delta\rho_s}{2\rho_0^2} \langle [\vec{H}_0 \operatorname{rot} \vec{S}]^2 \rangle \, dr \tag{11}$$

Здесь скобки означают усреднение по "быстрой" частоте, Варьируя гамильтониан (11) по $\delta\rho_s$, получаем, что уравнение для медленных движений имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + c_s^2 \frac{\delta\rho_s}{\rho_0} = \frac{\langle [\vec{H}_0 \operatorname{rot} \vec{S}]^2 \rangle}{2\rho_0^2}$$

Откуда следует, что со стороны А-волн на медленные движе - ния, в данном случае это замагниченные звуковые колебания /см./16/, действует высокочастотная сила $F = -\nabla U$, где

$$U = - \frac{1}{4 M n_0^2} \langle [\vec{H}_0 \operatorname{rot} \vec{S}]^2 \rangle$$

При необходимости учесть индуцированное рассеяние А-волн на ионах, мы должны записать дрейфовое кинетическое уравнение /12/ для медленной вариации функции распределения ионов f_i (см., например /13/):

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + V_z \frac{\partial f_i}{\partial z} - \frac{e}{M} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial f_0^i}{\partial V_z} = 0 \tag{12}$$

и условие квазинейтральности для медленных движений ($\Omega_k = k_z c_s \ll \omega_{pi}$):

$$\delta n_i = \int f_i \, dv = \frac{n_0}{T_e}\left(e\tilde{\varphi} - U\right) = \frac{\delta \rho_s}{M} \tag{13}$$

где $\tilde{\varphi}$ -низкочастотный потенциал. В последнем уравнении мы учли, что высокочастотная сила действует на электроны, а вследствии квазинейтральности её действие передается и на ионы.

При этом уравнения движения для А-волн сохраняют свой вид

$$\frac{\partial a_{k\lambda}}{\partial t} + i\omega_{k\lambda} a_{k\lambda} = -i \frac{\delta \mathcal{H}_{int}}{\delta a^*_{k\lambda}}; \; \lambda = 1, 2 \tag{14}$$

где гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_{int}$ (12) в переменных $a_{k\lambda}$ имеет вид:

$$\mathcal{H}_{int} = -\int \frac{\delta \rho_{\varkappa s}}{2\rho_0} \sum_{\lambda\lambda_1} F^{\lambda\lambda_1}_{kk_1} a^*_{k\lambda} a_{k_1\lambda_1} \delta_{k-k_1-\varkappa_z} \, dk\, dk_1\, d\varkappa$$

$$F^{\lambda\lambda_1}_{kk_1} = \left(\omega_{k\lambda}\omega_{k_1\lambda_1}\right)^{1/2}\left(\vec{n}_{k\lambda}\vec{n}_{k_1\lambda_1}\right), \; \vec{n}_2 = \frac{\vec{k}_\perp}{k_\perp}, \; \vec{n}_1 = \left[\vec{n}_2 \vec{n}_0\right]$$

Система уравнений (12-14) полностью описывает взаимодействие А-волн. При этом, однако, следует помнить, что гамильтониан $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}$ уже не является сохраняющейся величиной.

В рамках этих уравнений рассмотрим эволюцию узкого пакета А-волн. Качественное представление об этом процессе можно получить при изучении устойчивости монохроматической А-волны.

Конкретно рассмотрим устойчивость монохроматической волны в гидродинамическом пределе. Последнее означает для бесстолкновительной плазмы, что фазовая скорость биений $\Omega/\varkappa$ А-волн превышает тепловую ионную. В этом случае для медленных звуковых колебаний можно пренебречь затуханием Ландау на ионах. Следует помнить, что в сильно неизотермической плазме звуковые волны представляют собой собственные колебания, в то время как в плазме с $T_e \sim T_i$ звук представляет собой вынужденные колебания плотности плазмы. В том и другом случае применимо гидродинамическое описание. Тогда в уравнениях (14) выразим $\delta\rho_s$ через нормальные переменные $a_k(3) = b_k$:

$$\delta\rho_{ks} = \left(\frac{\rho_0 \Omega_k}{2c_s^2}\right)^{1/2} \left(b_k + b^*_{-k}\right)$$

Уравнения же для b_k получаются варьированием полного гамильтониана $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}$:

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + i\Omega_k b_k = -i\,\delta\mathcal{H}_{int}/\delta b_k^* \qquad (15)$$

В этих уравнениях монохроматической альфвеновской волне соответствует решение:

$$a_{k\lambda} = \frac{A}{\omega_0^{1/2}}\delta_{\lambda 1} e^{-i\omega_0 t}\delta_{k-k_0},\ b_k = 0,\ \omega_0 = \omega_{k_0}(1)$$

Линеаризуя уравнения (14,15) на фоне точного решения, положим для возмущений:

$$\delta a_k^\lambda \sim e^{-i(\Omega+\omega_0)t}\delta_{k-k_0-\varkappa}$$

$$\delta a_k^{\lambda *} \sim e^{-i(\Omega-\omega_0)t}\delta_{k-k_0+\varkappa}$$

Тогда для Ω получаем дисперсионное уравнение:

$$\frac{WG}{4Mn_0^2\omega_0}\sum_\lambda\left\{\frac{\left|F^{1\ \lambda}_{k_0\ k_0+\varkappa}\right|^2}{\Omega+\omega_0-\omega_{\lambda k_0+\varkappa}}+\frac{\left|F^{1\ \lambda}_{k_0\ k_0-\varkappa}\right|^2}{-\Omega+\omega_0-\omega_{k_0-\varkappa\lambda}}\right\}= \qquad (16)$$

$$= 1$$

Здесь $W=|A|^2$ -плотность энергии колебаний

$$G_{\varkappa\Omega}=\frac{\delta\rho_{s\varkappa\Omega}}{U_{\varkappa\Omega}}=n_0\frac{\varkappa_z^2}{\Omega^2-\varkappa_z^2c_s^2}$$

$U_{\varkappa\Omega}$ -Фурье-образ высокочастотной силы.

Приведем результаты исследования уравнения (16) в разных случаях. Характер неустойчивости существенно зависит от соотношения между температурами. Так при $T_e \gg T_i$ и достаточно малых амплитудах имеет место распадная неустойчивость с возбуждением ионного звука /8/. Волновой вектор возмущения для этой неустойчивости лежит на поверхности

$$\omega_{k_0}=\omega_{\lambda\, k_0-\varkappa}+\Omega_\varkappa$$

а инкремент её равен:

$$\Gamma=\left[\frac{W}{8nT}\frac{\Omega_s}{\omega_0}\left|F^{1\ \lambda}_{k_0\ k_0-\varkappa}\right|^2\right]^{1/2}$$

Отсюда в частности следует, что при распаде альфвеновской (A) волны на альфвеновскую и звук (S) инкремент по порядку величины совпадает с инкрементом при распаде на быструю магнитозвуковую волну (M) и звук $\Gamma\sim(\omega_0\Omega_s W/nT)^{1/2}$

Эта неустойчивость имеет место при

$$W/nT<\beta^{1/2}$$

С увеличением W/nT неустойчивость перестраивается. Для простоты рассмотрим как себя ведёт неустойчивость с ростом амплитуды в канале $A \to A + S$. При $W/nT > \beta^{1/2}$ в дисперсионном уравнении (16) можно пренебречь величиной $\Omega_{\varkappa}^2$ по сравнению с Ω^2. Тогда неустойчивые волновые вектора лежат на поверхности $\omega_{k_0} = \omega_{k_0 - \varkappa}^{(1)}$. Такая неустойчивость носит название модифицированной распадной /13,14/. Она имеет инкремент, максимальный при $\varkappa_z = 2k_{0z}$:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\omega_0 \left(\frac{W}{\rho_0 V_A^2}\right)^{1/3} \qquad (17)$$

который не зависит от температуры, отсюда, в частности следует, что эта неустойчивость имеет место $W/nT > 1$.

Для другого канала ($A \to M + S$) неустойчивость с ростом W/nT ($W/nT > \beta^{1/3}$) имеет тот же характер. Неустойчивые волновые вектора лежат на поверхности $\omega_{k_0} = \omega_{k_0 - \varkappa}^{(2)}$ инкремент по порядку величины совпадает с (17) и максимален в области $\varkappa \sim k_0$.
Следует сказать несколько слов о применимости полученных результатов. Для применимости нашего описания существенно единственное требование: все характерные времена нелинейных процессов τ должны быть больше $1/\omega_0$ ($\omega_0 \sim \omega_{k_0 \pm \varkappa, \lambda}$). Отсюда получаем ограничение на амплитуду $W/\rho V_A^2 \ll 1$.

§ 3. Колмогоровские спектры МГД турбулентности

В предыдущем параграфе рассматривалась задача о неустойчивости узкого в К - пространстве волнового пакета. Здесь мы рассмотрим противоположный случай достаточно широкого пакета.

При достаточно большой ширине пакета можно считать, что фазы отдельных волн не скоррелированы и являются случайными величинами. Это позволяет описывать систему волн на языке корреляционных волн функций. Для парных корреляционных функций:

$$\langle a_{k\lambda} a^*_{k_1\lambda_1}\rangle = N_{k\lambda}\,\delta_{k-k_1}\,\delta_{\lambda\lambda_1} \text{ и } \langle b_k b^*_{k_1}\rangle = n_k\,\delta_{k-k_1}$$

можно получить замкнутую систему уравнений:

$$\dot n_k = 2\pi \int |V_{k_1 k_2 k}|^2 \left(N_{k_1} N_{k_2} - n_k N_{k_1} + n_k N_{k_2}\right)$$

$$\delta_{k+k_1-k_2}\,\delta_{\Omega_k+\omega_{k_1}-\omega_{k_2}}\,dk_1 dk_2$$

$$\dot N_k = 2\pi \int |V_{k k_1 k_2}|^2 \left(N_{k_1} n_{k_2} - N_k n_{k_2} - N_k N_{k_1}\right)$$

$$\delta_{k-k_1-k_2}\,\delta_{\omega_k-\omega_{k_1}-\Omega_{k_2}}\,dk_1 dk_2\ -$$

$$-\ 2\pi \int |V_{k_1 k k_2}|^2 \left(N_k n_{k_2} - N_{k_1} n_{k_2} - N_k N_{k_1}\right) \qquad (18)$$

$$\delta_{k_1-k-k_2}\,\delta_{\omega_{k_1}-\omega_k-\Omega_{k_2}}\,dk_1 dk_2$$

где $V^{\lambda\lambda_1}_{k k_1 k_2} = \left(\dfrac{\Omega_{k_2}}{8\rho_0 c_s^2}\right)^{1/2} F^{\lambda\lambda_1}_{k k_1}$ *)

При выводе уравнений (18) использовалась слабость взаимодействия волн: а именно малость "нелинейности" по сравнению с дисперсией волн /3/. Как известно (см.например /15,16/, основной вклад в дисперсию МГД – волн вносит дисперсия на циклотронной ионной частоте ω_{Hi}, которая имеет порядок: $\Delta\omega(i) \sim \dfrac{\omega^3(i)}{\omega^2_{Hi}}$

x) Здесь и ниже опущено суммирование по λ, чтобы его включить, следует заменить $dk_1 \to \sum_\lambda dk_1$, $N_k \to N_k^\lambda$, $\omega_k \to \omega_{k\lambda}$ и т.д.

Это приводит к критерию на величину амплитуды волн-степени "нелинейности":

$$W/nT < \left(\frac{\omega_K^{(i)}}{\omega_{Hi}}\right)^{\nu} \ll 1$$

Система уравнений (18) описывает процессы распада одной волны на две другие и обратный процесс - процесс слияния. Любопытно отметить, что в каждом акте распада энергия А-волн меняется слабо, перекачка энергии по спектру носит диффузионный характер ($\omega_{K\lambda} \simeq \omega_{K_1\lambda_1}$). Частоты А-волн при этом изменяется на $\Delta\omega = \Omega_s$ или $\Delta|k_z| = k_{di} f \sim k_z \frac{c_s}{v_A}$.

В уравнениях (18) включим источники турбулентности и её затухание. Для этого в левую часть уравнений введем члены $\Gamma_K n_K$ и $\gamma_{K\lambda} N_{K\lambda}$. Мы будем полагать, что области отрицательности (область накачки) и области положительности (область затухания) инкрементов Γ_K и $\gamma_{K\lambda}$ разделены в К-пространстве так, что существует некоторая промежуточная, область - инерционный интервал, в которой динамика турбулентности определяется взаимодействием волн. Если в инерционном интервале влиянием накачки и затухания можно пренебречь, то распределения n_K и $N_{K\lambda}$ должны не зависеть от конкретного вида γ_K и Γ_K .

В теории гидродинамической турбулентности определение спектра турбулентности распределения пульсаций по масштабам, в инерционном интервале базируется на двух гипотезах А.Н.Колмогорова /1/. Первая, гипотеза об автомодельности, гласит, что спектр турбулентности в инерционном интервале определяется единственной величиной P -постоянным потоком энергии по спектру, вторая предполагает, что взаимодействие пульсации с разными K носит локальный характер. Принимая эти гипотезы, уже из соображений размерности можно получить, как устроены турбулентные спектры в инерционном интервале.

Так постоянному потоку числа частиц $N_{k\lambda}$ (полное число частиц в инерционном интервале - интеграл движения)

$$P_N = \frac{\partial}{\partial t} \sum_\lambda \int N_{k\lambda}\, dk$$

соответствует спектр :

$$N_{k\lambda} \sim P_N^{1/2} k^{-4} \quad , \; n_k \sim P_N^{1/2} k^{-4} \tag{19}$$

А для постоянного потока энергии:

$$P_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\Omega_k n_k + \sum_\lambda \omega_{k\lambda} N_{k\lambda} \right) dk$$

получаем:

$$N_{k\lambda} \sim P_\varepsilon^{1/2} k^{-9/2} \quad , \; n_k \sim P_\varepsilon^{1/2} k^{-9/2} \tag{20}$$

Отметим, что эти выводы существенно опираются на гипотезу локальности взаимодействия.

Из сохранения в инерционном интервале полного числа частиц, энергии и импульса легко понять, что поток числа частиц N направлен в малые k, в то время как поток энергии P_ε направлен в область больших k.

Отметим, что спектры (19) и (20) не описывают тонкие свойства функций распределений - их угловую зависимость, т.е. определены с точностью до произвольной функции от углов. Для определения угловой зависимости следует решать точные уравнения (1.8). Решения этих уравнений удается найти для взаимодействия альфвеновских и звуковых волн. ($N_{k2} = 0$). Для этого уравнения (1.8) запишем в виде ($N_{k1} = N_k$):

$$\dot{n}_k = -\int U_{k_2|kk_1} T_{k_2|kk_1}\, dk_1 dk_2 \quad (21)$$

$$\dot{N}_k = \int \left(U_{k|k_1k_2} T_{k|k_1k_2} - U_{k_1|kk_2} T_{k_1|kk_2} \right) dk_1 dk_2$$

где введены следующие обозначения:

$$U_{k|k_1k_2} = 2\pi \left| V'_{kk_1k_2} \right|^2 \delta_{k-k_1-k_2}\, \delta_{\omega-\omega_1-\Omega_2}$$

$$T_{k|k_1k_2} = N_{k_1} n_{k_2} - N_k n_{k_2} - N_k N_{k_1}$$

Легко видеть, что уравнения (4.5) имеют термодинамически - равновесные решения:

$$N_k = \frac{T}{\omega_k + \mu}, \quad n_k = \frac{T}{\Omega_k}$$

распределения Рэлея-Джинса, обращающие столкновительный член в ноль.

Для определения неравновесных распределений заметим, что функция U обладает следующими свойствами: U есть биоднородная функция по аргументам K_z и $K_\perp$ со степенями однородности по K_z - +1 и по $K_\perp$ - -2, кроме того и инвариантна относительно вращения вокруг оси z - направления магнитного поля $\vec{H}_0$. В силу этого, будем искать решения в виде:

$$n_k = A k_z^{\alpha} k_\perp^{\beta}, \quad N_k = B k_z^{\alpha} k_\perp^{\beta} \quad (22)$$

Рассмотрим стационарные решения второго уравнения системы (21):

$$\int \left(U_{k|k_1k_2} T_{k|k_1k_2} - U_{k_1|kk_2} T_{k_1|kk_2} \right) = 0 \quad (23)$$

Совершим отображение области интегрирования второго интеграла (определяемая законами сохранения) к области интегрирования первого интеграла. Для этой цели удобно ввести комплексную функцию $w = k_x + i k_y$. Тогда область интегрирования второго интеграла, определяемая законами сохранения

$$k_{z1} - k_z - k_{z2} = 0$$

$$w_1 - w - w_2 = 0$$

$$\omega_1 - \omega - \omega_2 = 0$$

С помощью конформного преобразования по переменным k_z и w:

$$k_z = k_z' \frac{k_z}{k_z'} \qquad w = w' \frac{w}{w'}$$

$$k_{z1} = k_z \frac{k_z}{k_z'} \qquad w_1 = w \frac{w}{w'} \qquad (24)$$

$$k_{z2} = k_z'' \frac{k_z}{k_z'} \qquad w_2 = w'' \frac{w}{w'}$$

переходит в область интегрирования первого интеграла в (23). Совокупность всех преобразований вида (24) образует группу G. Причем эта группа есть прямое произведение двух групп, каждая из которых есть группа растяжений и поворотов в пространстве размерности n. В данном случае $G = G(1) \otimes G(2)$. Отметим, что преобразования вида (24) были найдены В.Е.Захаровым /3-5/ для одномерных систем, а потом обобщены на двумерный и трехмерный случай для изотропных моделей А.В.Кацом и В.М.Конторовичем /17/. Преобразования (24) называются квазиконформными, при таких преобразованиях, естественно углы между векторами $\vec{k_\perp}$ и $\vec{k_{\perp 1}}$ сохраняются. Тогда после преобразования (24) выражение под интегралом в (23) факторизуется:

$$\int U_{kk_1k_2} T_{kk_1k_2}\left[1-\left(\frac{k_z}{k_{z1}}\right)^{2\alpha+4}\left(\frac{k_\perp}{k_{\perp 1}}\right)^{2\beta+4}\right] dk_1 dk_2 = 0$$

Отсюда следует, что кроме термодинамически равновесных решений существуют и неравновесные

$$n_k = A k_z^{-2} k_\perp^{-2}, \quad N_k = B k_z^{-2} k_\perp^{-2} \tag{25}$$

которые ранее были получены из соображений размерности и соответствуют решениям с постоянным потоком числа частиц P_N.

Связь между коэффициентами A и B определяется при этом из первого уравнения системы (18). Легко видеть, что A не зависит от времени (в противном случае A зависила бы от K). Отсюда следует оценка: $C_s A \sim V_A B$. Таким образом, в стационаре энергии звуковых и альфвеновских волн оказываются одного порядка.

Для определения второго неравновесного решения (20) построим величину $\mathcal{E}_k = \omega_k N_k + \Omega_k n_k$ –плотность энергии в K – пространстве. Из (21) следует, что $\mathcal{E}_k$ подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = \iint\left\{\omega_k U_{kk_1k_2} T_{kk_1k_2} - \omega_k U_{k_1kk_2} T_{k_1kk_2} - \Omega_k U_{k_2k_1k} T_{k_2k_1k}\right\} dk_1 dk_2 \tag{26}$$

Рассмотрим стационарные решения этого уравнения.
Как и раньше, будем искать решения (26) в виде (22). В выражении (26) аналогично совершим отображение области инте-

грирования второго и третьего интеграла к области интегрирования первого. Для второго интеграла это преобразование совпадает с преобразованием (24), а для третьего оно имеет вид:

$$k_z = k_z'' \frac{k_z}{k_z''} \qquad \omega = \omega'' \frac{\omega}{\omega''}$$

$$k_{z1} = k_z' \frac{k_z}{k_z''} \qquad \omega_1 = \omega' \frac{\omega}{\omega''} \tag{27}$$

$$k_{z2} = k_z \frac{k_z}{k_z''} \qquad \omega_2 = \omega \frac{\omega}{\omega''}$$

После подстановки (24) и (27) в (26) получим:

$$\int |V'_{kk_1k_2}|^2 \delta_{k-k_1-k_2} \delta_{\omega-\omega_1-\Omega_2} T_{kk_1k_2} \, dk_1 dk_2$$

$$\left\{ \omega_k - \omega_k \left(\frac{k_z}{k_{z1}}\right)^{2\alpha+4} \left(\frac{k_\perp}{k_{\perp1}}\right)^{2\beta+4} - \Omega_k \left(\frac{k_z}{k_{z2}}\right)^{2\alpha+4} \left(\frac{k_\perp}{k_{\perp2}}\right)^{2\beta+4} \right\}$$

Откуда следует, что фигурная скобка обращается в ноль при $\alpha = -5/2, \beta = -2$, т.е. решения имеют вид

$$n_k = A\, k_z^{-5/2} k_\perp^{-2}, \qquad N_k = B\, k_z^{-5/2} k_\perp^{-2}$$

Эти решения соответствуют постоянному потоку энерги P_ε.
При этом связь между величинами A и B, как и раньше, определяются из стационарных уравнений (18).
Из этих уравнений получаем прежнюю оценку на соотношение между A и B: $C_S A \sim V_A B$.

Полученные решения имеют физический смысл, если турбулентность имеет локальный характер. Требование локальности состоит в том, что вклад во взаимодействие волн от областей источников и затухания турбулентности был достаточно мал. Последнее сводится к требованию сходимости интегралов в уравнениях (21).

Сходимость интегралов по k_z обеспечивается наличием двух δ -функций от K_z. оказываются логарифмически расходящимися. Логарифмическая расходимость, на наш взгляд, представляется достаточно слабой. Её можно отрезать как при больших $K_\perp$, так и малых. Параметром обрезания на малых $K_\perp$, например, может служить слабая неоднородность в поперечном направлении, тогда $K_{\perp min} \sim 1/L$, где L - размер неоднородности. Для больших $K_\perp$ параметр связан с дисперсией волн. Следует сказать, что для звуковой турбулентности в замагниченной плазме именно наличие дисперсии на циклотронной частоте позволило доказать локальность /16/. Резюмируя все сказанное, можно считать, что турбулентность альфвеновских и звуковых волн в замагниченной плазме является локальной в продольном направлении. В поперечном направлении, по-видимому, факт локальности связан с дисперсией МГД - волн.

§ 4. Параметрическая неустойчивость МГД-волн

Одним из важных механизмов возбуждения МГД турбулентности может служить параметрическое возбуждение волн /18/ внешним магнитным полем, получившим название метода "магнитной накачки" /19/. Суть этого метода состоит в том, что при изменении внешнего магнитного поля по закону: $\vec{H} = \vec{H_0} + 2\vec{h_p}\cos\omega_p t$ происходит параметрическое возбуждение волн, т.е. энергия внешнего поля передается колебаниям плазмы, что в конечном итоге приводит к её нагреву.

Изменение во времени магнитного поля, которое мы будем считать малым по сравнению с H_0, приводит к появлению дополнительного слагаемого в $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_p = \int 2\left([\vec{h_p}, \operatorname{rot}\vec{S}], \vec{V_0}\right)\cos\omega_p t \, d\vec{r}$$

Переходя в этом выражении к переменным a_k получим в пределе $\beta \ll 1$:

$$\mathcal{H}_p = \int \frac{1}{2} h_p V_k \left[e^{-i\omega_p t} a_k^* a_{-k}^* + \text{к.с} \right] dk$$

где $V_k = -\frac{1}{H_0}\omega_k$

(Здесь для простоты мы ограничились случаем $\vec{h}_p \parallel \vec{H}_0$).

Именно, появление этого слагаемого и приводит к параметрической неустойчивости. Действительно, из уравнений движения:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i(\omega_k - i\gamma_k) a_k + i h V_k a_{-k}^* e^{-i\omega_p t} =$$

$$= -i \frac{\delta \mathcal{H}_{int}}{\delta a_k^*} \qquad (28)$$

в которые мы феноменологически включили затухание МГД-волн[x)], следует, что при $h_p > H_0 \min \gamma_k/\omega_k$ происходит параметрическое возбуждение пары волн a_k и a_{-k} с инкрементом

$$\gamma = -\gamma_k + \sqrt{(hV_k)^2 - \left(\omega_k - \frac{\omega_p}{2}\right)^2} \qquad (29)$$

Максимум инкремента лежит на поверхности $\omega_k = \frac{\omega_p}{2}$. На этой поверхности фазы пары волн a_k и a_{-k} жестко скоррелированы: $a_k = -i a_{-k}^*$

В результате этой неустойчивости волны нарастают до такой амплитуды, что дальнейшая эволюция системы определяется в основном нелинейным взаимодействиям волн. Если в результате неустойчивости возбуждается достаточно широкий па-

x) Выражение для затухания МГД-волн можно найти в /20/.

кет волн, то можно считать, что фазы индивидуальных волн случайны (при сохранении суммы фаз в паре). Это позволяет перейти от динамического описания (28) к статистическому на языке корреляционных функций /21/:

$$\langle a_k a_{k_1}^* \rangle = N_k \delta_{k-k_1}, \quad \langle a_k a_{-k} \rangle e^{-i\omega_p t} = \sigma_k \delta_{k-k_1}$$

Прежде чем переходить к выводу уравнений для N и σ, сделаем ряд преобразований. В уравнениях движения (28) избавимся от быстрой временной зависимости с помощью преобразования: $a_k \to a_k e^{-i\frac{\omega_p}{2}t}$. Эта замена приводит в уравнении (28) к изменению частоты ω_k на $\omega_k - \frac{\omega_p}{2}$.

Далее удобно из всех волн a_k выделить параметрически возбужденные (Ак), которые отличны от нуля вблизи поверхности $\omega_k = \omega_p/2$. Такое разделение связано со следующим обстоятельством. При распаде пары параметрически возбужденных волн Ак и А-к на четыре волны a_{k_1}, b_{k_2} и $a_{k'}\ b_{k''}$ сохраняется лишь сумма фаз всех волн. Отсюда, считая фазы волн a_k и b_k случайными, следует, что σ-коррелятор для волн a_k с хорошей точностью равен нулю и отличием от нуля лишь в неустойчивой области. Механизм, рассмотренный выше, связанный с распадами, естественно приводит к ограничению неустойчивости. Кроме этого механизма существует другой - фазовый механизм ограничения амплитуды /21/. Последний связан с собственной нелинейностью параметрически возбужденных волн. Если инкремент параметрической неустойчивости (29) не превышает частоты звука ($h_p/H_0 < \beta^{1/2}$), то легко видеть, что основной вклад в собственную нелинейность вносит упругое рассеяние А-волн через виртуальный звук. Этому взаимодействию соответствует гамильтониан:

$$\mathcal{H}^{(4)}_{int} = \frac{1}{2} \int T_{kk_1k_2k_3} A^*_{k_1} A^*_{k} A_{k_2} A_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3}\, dk\, dk_1\, dk_2\, dk_3$$

где $T_{kk_1k_2k_3} = -\left[V_{kk_1}V_{k_1k_3} + V_{kk_3}V_{k_1k_3}\right]$

$$V_{kk_1} = \left(\frac{\omega_k \omega_{k_1}}{8\rho_0 C_s^2}\right)^{1/2} (\vec{n}_k \vec{n}_{k_1})$$

Это взаимодействие приводит к перенормировке накачки и частоты волн A_k /21/:

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} + i(\tilde{\omega} - i\gamma_k)A_k + iP_k A^*_{-k} =$$
$$= -i\int V_{kk_1k_2}\, a_{k_1}(b_{k_2} + b^*_{-k_2})\,\delta_{k-k_1-k_2}\, dk_1 dk_2 \qquad (30)$$

где $\tilde{\omega} = \omega_k - \frac{\omega_p}{2} + 2\int T_{kk_1} N^{n}_{k_1} dk_1$ – перенормированная частота $P_k = h_p V_k + \int S_{kk_1}\sigma_{k_1} dk_1$ –перенормированная накачка за счет собственной нелинейности,

$$T_{kk_1} = T_{kk_1kk_1},\ S_{kk_1} = T_{k-k,k_1-k_1},$$

$$\langle A_k A^*_{k_1} \rangle = N^{n}_{k}\,\delta_{k-k_1}$$

Вывод уравнений для N_k и σ_k является традиционым. Так из уравнений (30) получаем уравнения для и , содержащие тройные корреляционные функции. Уравнения для тройных корреляционных функций в свою очередь содержат четверные. Расцепляя четверные на парные и пренебрегая производной тройных корреляционных функций по t, получаем замкнутую систему уравнений для $N^{n}_{k}, \sigma_k, N_k, n_k$:

$$\frac{\partial N^{n}_{k}}{\partial t} + 2\gamma_k N^{n}_{k} = 2\,\mathrm{Im}(P_k\sigma^*_k) + St(N^{n}N_1 n_2) - St(N_1 N^{n}_1 n_2)$$

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial t} + 2(\gamma_k + \gamma_{Nk})\sigma_k + 2i\omega_{ef}\sigma_k = iN^{n}_{k} P_k \qquad (31)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + 2\gamma_k N_k = St(NN_1^* n_2) - St(N_1^* N n_2) + St(NN_1 n_2) -$$
$$- St(N_1 N n_2)$$

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + 2\Gamma_k n_k = - St(N_1 N_2^* n) - St(N_1^* N_2, n) - St(N_1 N_2 n)$$

где $$St(NN_1 n_2) = \int U_{k1k_1k_2} \Pi_{k1k_1k_2} \, dk_1 dk_2$$

$$\gamma_{NL} = \frac{1}{2} \int \left\{ U_{k1k_1k_2}(n_2 + N_1) + U_{k_1 1 k k_2}(n_2 - N_1) \right\} dk_1 dk_2$$

$$\omega_{ef} = \tilde{\omega} + \pi \int |V_{kk_1k_2}|^2 \left\{ (n_2 + N_1) P\left(\frac{1}{\frac{\omega_p}{2} - \omega_1 - \Omega_2} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \delta_{k-k_1-k_2} + (n_2 + N_1) P\left(\frac{1}{\frac{\omega_p}{2} - \omega_1 + \Omega_2} \right) \delta_{k-k_1+k_2} \right\} dk_1 dk_2$$

Здесь использовалась формула:

$$\frac{1}{x+i0} = P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x)$$

Эта система уравнений описывает динамику турбулентности при параметрическом возбуждении. Из этих уравнений следует, что поток энергии в плазму определяется через σ - коррелятор:

$$P_E = \mathrm{Im} \int \omega_k h v_k \sigma_k^* \, dk \tag{32}$$

а также и поток числа частиц:

$$P_N = \mathrm{Im} \int h v_k \sigma_k^* \, dk \tag{33}$$

Как известно /21/ при фазовом механизме ограничения амплитуды $N^* = |\sigma|$. Однако, как следует из первого уравнения системы (31), столкновительный член $St(N)$ содержит два

типа членов: нелинейное затухание $- 2\gamma_{NL} N^{\tau}$ и "шумовой" член. Если первый приводит к сохранению жесткой корреляции $|\sigma_k| = N_k^{\tau}$, то второй приводит, наоборот, к её расшатыванию $N^{\tau} > |\sigma|$. Последнее приводит, как видно из (32,33), к уменьшению потоков энергии в плазму
Для фазового механизма характерна тенденция к конденсации волн в K-пространстве. Все волны в стационаре лежат на поверхности $\tilde{\omega} = 0$ /21/. Однако, наличие собственного шума не приводит к появлению сингулярного распределения. Кроме того, оказывается, что характерные нелинейные времена τ распадного, а вместе с ним и шумового, и "фазового" механизмов имеют один порядок:

$$\frac{1}{\tau} \sim \gamma_{NL} \sim \omega_p \frac{W}{nT}$$

Накачка колебаний внешним полем компенсируется оттоком энергии по спектру. Считая превышения над порогом большим, а именно $hV_k \gg \gamma_k$, приравняем эту величину инкременту параметрической неустойчивости. В результате получаем ограничение на амплитуду

$$\frac{W}{nT} \sim \frac{h_p}{H_0}$$

Отсюда следует оценка на поток энергии в плазму:

$$P_\varepsilon \sim \omega_0 \beta \; W_{ex} \;, W_{ex} \approx \frac{h_p^2}{8\pi} \tag{34}$$

и поток числа квазичастиц

$$P_N \sim \beta \, W_{ex} \tag{35}$$

Можно считать, что в результате параметрической неустойчивости устанавливается в области больших и малых и колмогоровский режим. При этом в области малых K реализуются спектры с постоянным потоком числа "квазичастиц" (34), а в области больших K - с постоянным потоком энергии (35).

В заключение автор благодарит В.Е.Захарова за внимание и постоянный интерес к работе и В.С.Львова за полезные обсуждения.

Литература

1. А.Н.Колмогоров. ДАН СССР, 30, 299, 1941.
2. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 51, 688, 1966.
3. В.Е.Захаров. ПМТФ, 4, 34, 1965.
4. В.Е.Захаров, Н.Н.Филоненко. ПМТФ, 5, 62, 1967.
5. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 60, 1714, 1971.
6. В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов. ДАН СССР, 194, 1288, 1970.
7. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, М., "Наука",1967.
8. А.А.Галеев, В.Н.Ораевский. ДАН СССР, 147,71, 1962.
9. В.Н.Ораевский. Ядерный синтез, 4,263, 1964.
10. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., "Гостехиздат", 1959.
11. Б.И.Давыдов. ДАН, 69, 165, 1949.
12. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. УФН, 73, 132,1961.
13. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.
14. В.Е.Захаров, А.М.Рубенчик. ПМТФ, 5,84, 1972.
15. В.И.Карпман, Р.З.Сагдеев . ЖТФ, 44,592, 1963.
16. Е.А.Кузнецов. ЖЭТФ, 62, 584, 1972.
17. А.В.Кац, В.М.Конторович. Письма в ЖЭТФ, 14, 392,1970.
18. В.П.Силин. УФН, 194, 677, 1971.
19. А.И.Ахиезер, В.Ф.Алексин, В.Д.Ходусов. Ядерный синтез, 11, 403, 1971.
20. В.Л.Гинзбург, А.А.Рухадзе. Волны в магнитоактивной плазме. М., "Наука", 1970.
21. В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.С.Старобинец, 59, 1290, 1970.

Ответственный за выпуск В.Л.Ауслендер
Подписано к печати 20.9-73г. МН 08542
Усл. 1,3 печ.л., тираж 200экз. Бесплатно.
Заказ №81 . ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг.