

15

**И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР**

ПРЕПРИНТ И ЯФ 89 - 73

**В.И.Юрченко**

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ СКИН-ЭФФЕКТА**

**Новосибирск**

**1973**

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ СКИН-ЭФФЕКТА

В.И.Юрченко

### А Н Н О Т А Ц И Я

Изложена методика расчета поля в нагрузках с простой геометрией при подключении их к генератору напряжения.

Рассмотрена задача о разряде емкости на виток из двух параллельных пластин бесконечной толщины. Показано, что при любых параметрах цепи происходит переполюсовка напряжения и тока и, в этом смысле, режим апериодического разряда не имеет места. Найдены некоторые полезные в приложениях характеристики процесса разряда в зависимости от параметров цепи.

Задача о потерях потока в генераторах сверхсильных полей сформулирована в виде системы двух уравнений. Для некоторых частных случаев даны решения этих уравнений. Показано, что потери потока существенно зависят от способа обжатия. Наиболее выгодны те, в которых длина контура оболочки в процессе обжатия уменьшается.

Для двух типов безжелезных магнитов даны оценки влияния скин-эффекта на геометрию поля в их зазорах.

### 1. Формулы для скин-слоя

Проводник занимает полупространство  $x > 0$ . В точке  $x = 0$  в момент  $t = -\infty$  включается гармоническое поле  $B(t) = B_0 \sin(\omega t)$ . Величина скин-слоя в этом случае определяется формулой

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\gamma \omega}}$$

где  $\gamma = \sigma \mu_0$ , а решение уравнения теплопроводности для индукции

$$\gamma \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

имеет вид  $B(x, t) = B_0 e^{-x/\delta_0} \sin(\omega t - x/\delta_0)$ .

Если в момент  $t = 0$  включается произвольно меняющееся поле, величину скин-слоя обычно определяют посредством /1/

$$\delta(t) = \frac{\varphi(t)}{B(t)} \quad (1.2)$$

где  $B(t) = B(0, t)$ ,  $\varphi(t) = \int_0^\infty B(x, t) dx$  - поток индукции в проводнике. Используя решение уравнения (1.1) с заданным на границе значением функции /2/, получим

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \gamma}} \cdot \frac{1}{B(t)} \int_0^t \frac{B(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (1.3)$$

Если магнитное поле в момент времени  $t \neq 0$  проходит через нуль,  $\delta(t)$  обращается в бесконечность и формула теряет смысл. В приложениях, однако, важно знать величину скин-слоя в процессе нарастания поля. Получим для этого случая простую приближенную формулу.

Векторный потенциал поля определим посредством  $A(x, t) = -\int_0^\infty B(x, t) dt$ . Тогда в формуле для электрического поля  $\vec{E} = -\partial \vec{A} / \partial t - \nabla \varphi$  останется только первый член (в данном случае  $\nabla \varphi = \text{const}$ , ввиду  $\text{rot}(\nabla \varphi) = 0$ , и, учитывая, что при  $x = \infty$   $\vec{A}, \vec{E} = 0$ , из формулы для электрического поля найдем, что  $\nabla \varphi = 0$ ), и для векторного потенциала при  $x > 0$  можно написать

$$\gamma \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

Векторный потенциал, как и индукция, подчиняется однородному уравнению теплопроводности и для него также можно ввести величину скин-слоя

$$\delta_A(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma\pi}} \cdot \frac{1}{A(t)} \int_0^t \frac{A(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$A(t) = A(0, t)$ . Учитывая, что  $A(t) = -\delta(t) \cdot B(t)$ , и используя (1.3), найдем

$$\delta \cdot \delta_A = \frac{1}{\gamma B(t)} \int_0^t B(t) dt$$

Простую оценку можно получить, считая  $\delta_A \approx \delta$ . Это дает

$$\delta(t) \approx \sqrt{\frac{1}{\gamma B(t)} \int_0^t B(t) dt} \quad (1.5)$$

В таблице приведены оценочные и точные значения скин-слоя для некоторых зависимостей  $B = B(t)$ , отнесенные к его величине для стационарного гармонического сигнала  $\delta_0$  с периодом колебаний  $4t$ . Для поля  $B = B_0 \cdot \sin(\omega t)$  это отношение дано в момент когда фаза  $\omega t = \pi/2$ . Как видно, формула (1.5) имеет достаточную для практических расчетов точность. Отметим, что при  $H(t) \sim \exp(-t/\tau)$  приближенная  $\delta \approx \sqrt{\tau/\gamma(1-\exp(-t/\tau))}$  и точная  $\delta = \sqrt{\tau/\gamma} \cdot \operatorname{erf}(t/\tau)$  формулы дают одно и то же значение для  $\delta(\infty)$ , а получающаяся отсюда аппроксимация  $\operatorname{erf}(x) \approx (1-\exp(-x^2))^{1/2}$  является достаточно точной.

$H \sim$		$t^3$	$t^2$	$t$	$\sin \omega t$	$\text{const}$
$\delta/\delta_0$	прибл.	0.413	0.512	0.627	0.707	0.886
	точно	0.457	0.533	0.667	0.780	1.00

## 2. Элементы с простой геометрией в цепи источника питания

В настоящее время в различных физических устройствах широко используются импульсные магниты, запитываемые от импульсного источника напряжения. При проектировании таких магнитов часто бывает недостаточно приближения бесконечно-тонкого скин-слоя и важно учесть влияние его конечной величины на форму импульса тока, его длительность, потери энергии и т.д.

Во многих случаях нагрузку с достаточной степенью точности можно заменить соединением элементов, имеющих простую геометрию (параллельные пластины, коаксиал, цилиндрический виток). В этих случаях ток в цепи при заданном напряжении можно рассчитать точно.

Параллельные пластины бесконечной толщины (рис.1) образуют виток, к которому приложено напряжение  $U(t)$ . Считаем, что  $h/d \gg 1$ , где  $h$  - высота шин (средняя длина силовой линии). С этим условием задача одномерна и для векторного потенциала в области  $0 \leq x \leq \infty$  справедливо уравнение

$$\gamma \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \gamma E^r \quad (2.1)$$

$E^r$  - компонент градиентного электрического поля  $\vec{E}^r = -\nabla\varphi$  вдоль оси  $y$ . Векторный потенциал будем отсчитывать от центра системы

$$A(x, t) = \int_{-\frac{d}{2}}^x B(x, t) dx$$

Градиентное электрическое поле  $E^r$  одинаково по сечению шины (ввиду  $\operatorname{rot} \vec{E}^r = 0$ ). Обход вектора  $\vec{E}^r$  по контуру витка, образованного шинами, равен разности потенциалов на выводах шин, т.е. приложенному напряжению. Величина  $E^r$  в обеих шинах одна и та же по абсолютной величине и отличается знаком. Будем считать, что удаленный от нас конец системы, показанной на рис.1, замкнут, а на другом конце напряжение приложено к правой шине относительно левой, тогда в правой шине

$$E^r = \frac{U(t)}{2l} \quad (2.2)$$

где  $l$  - длина системы вдоль оси  $y$ ,  $U(t)$  - напряжение источника питания.

Так как поле в зазоре однородно, можно написать

$$A|_{x=0} = B(0,t) \cdot d/2; \quad \frac{\partial A}{\partial x}|_{x=0} = B(0,t).$$

Отсюда получаем граничное условие для уравнения (2.1)

$$\frac{\partial A}{\partial x}|_{x=0} = \frac{2}{d} A|_{x=0} \quad (2.3)$$

Начальное условие возьмем нулевым. Применим к (2.1) - (2.3) преобразование Лапласа. Получим для изображения

$$\tilde{A}(x,p) = \frac{\tilde{u}(p)}{2lp} \left( 1 - \frac{e^{-\sqrt{lp}x}}{1 + \frac{d}{2}\sqrt{lp}} \right)$$

Возьмем напряжение  $\delta$ -образным ( $\tilde{u}(p) = 1$ ). Для тока в цепи получим

$$I_s(t) = \frac{h}{\mu_0 d} \exp(t/\tau) \cdot \text{Erfi}(\sqrt{t/\tau}) \quad (2.4)$$

где  $\tau = d^2 \gamma / 4$ . Этот тип релаксации приведен на рис. 2. Индукция в пластине в этом случае выражается формулой

$$B_s(x,t) = \frac{1}{ld} \exp\left(-\frac{x^2 \gamma}{4t}\right) e^{t/\tau} \text{Erfi}(\alpha)$$

где  $\alpha = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{t}{\gamma}} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{t}}$ .

При произвольной зависимости  $u = u(t)$  искомые величины определяются в соответствии с принципом Дюамеля [2]. Если задано отличное от нуля начальное условие

$$A(x,0) = A_0(x), \quad (2.5)$$

общее решение задачи можно получить суперпозицией решения с нулевым начальным условием и заданным напряжением и решения задачи (2.1), (2.3), (2.5) при  $u(t) = 0$ . В последнем случае, например, для релаксации тока в цепи можно напи-

сать

$$I(t) = \frac{4h}{\mu_0 d \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A_0\left(2\sqrt{\frac{t}{\gamma}} \xi\right) e^{-\xi^2} \left[ 1 - \frac{2}{d}\sqrt{\frac{\pi t}{\gamma}} e^{\alpha^2} \text{Erfi}(\alpha) \right] d\xi \quad (2.6)$$

где  $\alpha = \xi + (2/d)\sqrt{t/\gamma}$ . Рассмотрим поведение этого выражения при  $t \rightarrow \infty$ . Функцию  $A_0(2\sqrt{t/\gamma} \xi)$  при этом можно вынести из под интеграла, заменив предельным значением  $A(\infty)$ . Оставляя в асимптотическом разложении для  $\text{Erfi}(\alpha)$  один член и выполняя затем интегрирование по частям, получим

$$I(t) \sim \frac{h}{\mu_0} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi t}} A_0(\infty) \quad (2.7)$$

Как видно, независимо от начального значения тока, его знак при  $t \rightarrow \infty$  совпадает со знаком  $A_0(\infty)$  и этот ток переносит через сечение шины бесконечно-большой заряд (подобные эффекты не имеют места при релаксации тока в цепи из сосредоточенных  $L, R$ ). Нужно отметить, что случай бесконечной толщины шин на практике никогда не реализуется и заряд, переносимый током, на самом деле имеет конечное значение. Однако, когда величина скин-слоя много меньше толщины проводника, этот вывод можно считать справедливым, что приводит к неожиданному, на первый взгляд результату: при разряде емкости на нагрузку, показанную на рис. 1, ток и напряжение всегда меняют знак и, в этом смысле, режим, соответствующий аperiodическому разряду в обычном контуре, никогда не имеет места (см. п. 3).

Отметим, что условие  $u(t) = 0$ , при котором получена формула (2.6), означает, что либо шины закорочены с обоих концов, либо на разомкнутом конце нулевое напряжение поддерживается искусственным образом. В противном случае, конечно, ток равен нулю, и даже в отсутствие источника питания на разомкнутом конце появится наведенное напряжение, величину которого можно найти из (2.1), при условиях на границе  $A|_{x=0} = 0$

$\frac{\partial A}{\partial x}|_{x=0} = 0$  Это дает

$$u_{\text{наб.}} = -2l \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{\pi t}} \int_0^{\infty} A_0(x) e^{-\frac{\gamma x^2}{4t}} dx \right)$$

Пластины конечной толщины. Обе пластины имеют поперечный размер  $D$ . Здесь для уравнения (2.1)

кроме граничного условия (2.3) нужно задать еще  $\frac{\partial A}{\partial x}|_{x=D} = 0$

Для  $\delta$ -образного напряжения при нулевом начальном условии можно написать ( $0 \leq x \leq D$ )

$$A_s(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n D)}{2\lambda_n D + \sin(2\lambda_n D)} e^{-\frac{\lambda_n^2 t}{\gamma}} \cos \lambda_n (D-x)$$

Собственные числа  $\lambda_n$  должны быть найдены из уравнения

$$\operatorname{ctg} \lambda_n D = \frac{\lambda_n d}{2}$$

**Несимметричные нагрузки** В рассмотренных случаях величина  $E^r$  в каждом проводнике просто выражается через величину приложенного напряжения (формула (2.2)). Простое соотношение имеет место также для цилиндрического витка, где  $E^r = u(t)/(2\pi r)$ . В несимметричной геометрии величина  $E^r$  в каждом проводнике заранее неизвестна. Если геометрия элемента проста (прямые пластины, коаксиал), операторное решение прямой задачи (для заданного напряжения нужно определить ток в цепи) можно получить следующим образом.

Решение удобно начать с обратной задачи: задан ток - нужно найти напряжение. Пусть для тока в цепи известно изображение Лапласа  $\tilde{I}(\rho)$ . При простой геометрии элемента это позволяет получить изображение индукции в любой его точке. По изображению индукции находится изображение векторного потенциала. Затем из уравнения для векторного потенциала в каждом проводнике определяется величина  $\tilde{E}^r(\rho)$ . Ее обход по контуру витка дает  $\tilde{u}(\rho)$ . Таким путем устанавливается связь между  $\tilde{I}(\rho)$  и  $\tilde{u}(\rho)$ . При нулевом начальном условии эта связь особенно проста  $\tilde{u}(\rho) = \tilde{Z}(\rho) \cdot \tilde{I}(\rho)$ , где  $\tilde{Z}(\rho)$  - операторное сопротивление цепи. Выражая  $\tilde{I}(\rho)$  через  $\tilde{u}(\rho)$ , получаем решение прямой задачи в операторной форме.

Задача, таким образом, состоит в отыскании операторного сопротивления.

Рассмотрим для примера нагрузку, имеющую  $N$  витков из параллельных шин одинаковой высоты  $h$  (рассматривается плоскопараллельный случай, краевыми эффектами пренебрегаем). Каждый следующий виток, считая от центрального зазора, охватывает предыдущий. Шины витков пронумеруем от 1 до  $N$  (рис.3). Проводимость  $\sigma_n^{\pm}$  и толщина  $D_n^{\pm}$  шин различны.

Напряжение приложено к шине с номером 1 справа от центрального зазора относительно шины с номером  $N$  - слева.

В зазоре с номером  $n$  изображение индукции есть  $\frac{N-n+1}{N} \frac{\mu_0}{h} \tilde{I}(\rho)$ . Используя это выражение для записи граничных условий для уравнения (1.1) в операторном виде (начальное условие берем нулевым), определим в каждой пластине  $\tilde{B}(x,\rho)$ . При вычислении изображения для векторного потенциала  $\tilde{A}(x,\rho) = \int_{x_n}^x \tilde{B}(x,\rho) dx$  выбор начала отсчета - точки  $x_n$  может быть произвольным. Действительно, для двух различных  $x_n$  значения  $E^r(t)$  отличаются во всех шинах на одну и ту же величину. Это не влияет на конечный результат, т.к. ее обход по замкнутому контуру равен нулю.

Вычисляя

$$\tilde{E}^r(\rho) = \rho \tilde{A}(x,\rho) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \tilde{B}(x,\rho)}{\partial x}$$

и обход  $\tilde{E}^r(\rho)$  по контуру нагрузки получим для операторного сопротивления

$$\tilde{Z}(\rho) = \rho L_0 + \sum_{n=1}^N (K_n^+ R_n^+ + K_n^- R_n^-) \quad (2.8)$$

где  $L_0 = \frac{\mu_0 l}{h} \sum_{n=1}^N (N-n+1)^2 (d_n^+ + d_n^-)$

индуктивность нагрузки в случае сверхпроводящих шин,

$R_n^{\pm} = \frac{l}{\sigma_n^{\pm} D_n^{\pm} h}$  - сопротивление шины постоянному току,

$$K_n^{\pm} = k_n^{\pm} \frac{(1+g_n) \cdot \operatorname{ch} k_n^{\pm} - g_n}{\operatorname{sh} k_n^{\pm}}$$

$$g_n = 2(N-n) \cdot (N-n+1), \quad k_n^{\pm} = \sqrt{\sigma_n^{\pm} \mu_0 \rho} \cdot D_n^{\pm}$$

Отметим, что для синусоидального напряжения ( $\rho = i\omega$ ) эквивалентное омическое сопротивление пластины с номером  $n$  есть

$$R_{n \text{ экв}}^{\pm} = \operatorname{Re}(K_n^{\pm} \cdot R_n^{\pm})$$

а индуктивность ее объема

$$L_n^{\pm} = \operatorname{Im}(K_n^{\pm} \cdot R_n^{\pm}) / \omega$$

Рассмотрим предельные случаи. Положим для простоты  $\sigma_n^{\pm} = \sigma$ .

1.  $\frac{\delta}{D_n^{\pm}} \ll 1$ , где  $\delta$  - величина скин-слоя. Предельным переходом  $D_n^{\pm} \rightarrow \infty$  получим из (2.8)

$$Z(\rho) = \rho L_0 + \frac{2l}{h} \cdot \frac{N(2N^2+1)}{3} \sqrt{\frac{\mu_0 \rho}{\sigma}}$$

При  $N=1$

$$Z(\rho) = \rho \frac{\mu_0 l d}{h} + \frac{2l}{h} \sqrt{\frac{\mu_0 \rho}{\sigma}}$$

что соответствует нагрузке, показанной на рис. 1. Как видно, многовитковую нагрузку при расчете тока можно заменить одним витком, у которого отношение  $l/h$  больше в  $N(2N^2+1)/3$  раз, а  $d = \frac{3}{N(2N^2+1)} \sum_{n=1}^N (N-n+1)^2 (d_n^+ + d_n^-)$ .

Если, например, все зазоры в обмотке, кроме центрального, равны нулю, для величины  $\tau$  в (2.4) получим в  $(2N^2+1)^2/9N^2$  раз меньшее значение, чем для одновитковой нагрузки с тем же размером зазора. Из-за вихревых потерь при  $N \gg 1$  для многовитковой нагрузки характерно значительно более сильное затухание.

2. Возьмем  $D_n^{\pm} = D$ ,  $\rho = i\omega$ ,  $d_1^+ + d_1^- = d$ ,  $d_{n \neq 1}^{\pm} = 0$ . Получим из (2.8)

$$Z(\omega) = i\omega \frac{\mu_0 l d}{h} N^2 + \frac{Rk}{3 \operatorname{sh} k} [(2N^2+1) \operatorname{ch} k - 2(N^2)] \quad (2.9)$$

где  $R = \frac{2lN}{\sigma D h}$ ,  $k = \sqrt{i\gamma\omega} D$ . Рассмотрим низкие частоты, когда  $|k| \ll 1$ .

Чтобы получить выражение для  $Z(\omega)$  при низких частотах, когда можно пренебречь вихревыми потерями, нужно оставить в разложении по  $k$  нулевой и квадратичный члены. Для оценки влияния скин-эффекта на величину сопротивления и индуктивности нужно оставить соответственно члены четвертого и шестого порядка. Учитывая члены до четвертого порядка включительно (при  $D/\delta_0 \ll 1$  скин-эффект слабо сказывается на индуктивности), получим

$$Z(\omega) \approx i\omega \frac{\mu_0 l}{h} \left( d + \frac{2}{3} DN \right) N^2 + R \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{N^2-1}{12-60} \right) \left( \frac{D}{\delta_0} \right)^4 \right]$$

Если  $N \gg 1$ , вихревыми потерями можно пренебречь при  $\frac{N^2}{9} \left( \frac{D}{\delta_0} \right)^4 \ll 1$ , т.е. простое условие  $D/\delta_0 \ll 1$  в этом случае оказывается недостаточным (см. также /3, III/).

Тем же образом можно провести расчет для коаксиала или аксиально симметричной многослойной катушки, включая случай, когда число витков в каждом слое больше одного. Здесь для операторных сопротивлений получаются громоздкие выражения. Часто, однако, во встречающихся на практике случаях распределение поля в проводниках для этих геометрий не сильно отличается от его распределения в плоской прямой пластине /4/. В этих случаях можно сделать более простые приближенные расчеты.

Многоэлементные нагрузки. В практических случаях нагрузка содержит много различных элементов. Если известны их операторные сопротивления, общее операторное сопротивление цепи можно получить по обычным правилам сложения импедансов. Таким путем в цепь можно включить сосредоточенные нагрузки.

Пусть, например, нагрузка содержит  $N$  последовательно соединенных участков из параллельных шин, каждый из которых имеет свои значения размера зазора  $d_n$ , высоты шин  $h_n$ , длины  $l_n$  ( $n$  - номер элемента). Толщина шин бесконечна. Используя указанный способ, получим, что такую нагрузку в расчетах можно заменить одним эквивалентным элементом, для параметров которого  $l$ ,  $d$ ,  $h$  нужно потребовать

$$\frac{d \cdot l}{h} = \sum_{n=1}^N \frac{d_n \cdot l_n}{h_n}; \quad \frac{l}{h} = \sum_{n=1}^N \frac{l_n}{h_n}$$

Если для эквивалентной нагрузки найдена величина  $W_n$ , характеризующая потери энергии (мощность потерь, потери за импульс и т.д.), в  $n$ -м элементе эта величина будет иметь значение

$$W_{n,n} = W_n \cdot \frac{l_n}{h_n} \left( \sum_{n=1}^N \frac{l_n}{h_n} \right)^{-1}$$

### 3. Разряд емкости на нагрузку из двух параллельных шин

Импульсные магниты обычно запитываются от конденсаторной батареи. Для простых геометрий (см. п. 2) процесс разряда можно рассчитать точно. Ниже мы рассматриваем эту задачу для нагрузки из двух параллельных шин (рис. 1) в предположении, что толщину шин можно считать бесконечной и краевыми эффектами можно пренебречь, и используем полученное решение для вычисления некоторых полезных в приложениях характеристик процесса разряда в зависимости от параметров цепи.

Исходные уравнения

Напряжение на конденсаторе можно записать в виде

$$u(t) = u_0 - \frac{2h}{\mu_0 d \epsilon} \int_0^t A(0, t) dt$$

В этой формуле  $C$  - емкость конденсатора,  $u_0$  - начальное напряжение на его обкладках.

Введем обозначения

$$L_0 = \frac{\mu_0 l d}{h}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}; \quad \delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\gamma \omega_0}}; \quad \epsilon = \frac{\delta_0}{d}$$

где  $L_0$  - индуктивность зазора,  $\omega_0$  - частота колебаний в случае сверхпроводящих шин,  $\delta_0$  - величина скин-слоя для этой частоты, и перейдем к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{\sqrt{2} x}{\epsilon d}; \quad \tau = \omega_0 t; \quad a(\xi, t) = \frac{2 l \omega_0}{u_0} A(x, t)$$

$$u(\tau) = \frac{u(t)}{u_0}; \quad i(\tau) = \frac{\omega_0 L_0}{u_0} I(t)$$

где  $I(t)$  - ток в цепи. В этих переменных уравнения (2.1) - (2.3), с учетом нулевого для нашей задачи начального условия, запишутся в виде

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + 1 - \int_0^\tau i(\tau) d\tau$$

$$i(\tau) = a(0, \tau) \quad (3.1)$$

$$\left. \frac{\partial a}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \sqrt{2} \epsilon a \Big|_{\xi=0} \quad a(\xi, 0) = 0$$

а напряжение на конденсаторе

$$u(\tau) = 1 - \int_0^\tau i(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

Точное решение

Операторные решения для интересующих нас величин в (3.1), (3.2) будут

$$a(\xi, \tau) = \frac{\sqrt{\rho} + \sqrt{2} \epsilon (1 - e^{-\xi \sqrt{\rho}})}{\sqrt{\rho} (\rho^2 + \sqrt{2} \epsilon \rho \sqrt{\rho} + 1)} \quad (3.3)$$

$$i(\tau) = \frac{1}{\rho^2 + \sqrt{2} \epsilon \rho \sqrt{\rho} + 1}; \quad u(\tau) = \frac{\rho + \sqrt{2} \epsilon \sqrt{\rho}}{\rho^2 + \sqrt{2} \epsilon \rho \sqrt{\rho} + 1}$$

Рассмотрим прежде всего ток и напряжение в цепи. Оригиналы их изображений можно записать в виде

$$i(\tau) = \sum_{n=1}^4 Q_n e^{z_n^2} \operatorname{Erf}(z_n) \\ u(\tau) = - \sum_{n=1}^4 Q_n \Delta_n^2 e^{z_n^2} \operatorname{Erf}(z_n) \quad (3.4)$$

где  $Q_n = \frac{\Delta_n^2}{4 + 3\sqrt{2} \epsilon \Delta_n}$ ,  $z_n = -\frac{\sqrt{\tau}}{\Delta_n}$ ,  $\Delta_n$  - корни полинома  $\Delta^4 + \sqrt{2} \epsilon \Delta + 1$ . Запишем для  $\Delta_n$  явные выражения. Введем параметр  $q = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\epsilon}$ . При  $q > 1$

значение полинома для любых действительных  $\Delta$  больше нуля и его корни образуют две пары комплексно-сопряженных чисел

$$\Delta_1 = \tau + j\beta; \quad \Delta_2 = -\tau + j\omega \\ \Delta_3 = \tau - j\beta; \quad \Delta_4 = -\tau - j\omega \quad (3.5)$$



( $j$  - мнимая единица). Параметры  $z, s, w$  - вещественны, для них можно написать

$$z = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}}{2} \sqrt[3]{\sqrt{1+\sqrt{1-q^4}} + \sqrt{1-\sqrt{1-q^4}}} \quad (3.6)$$

$$s = \sqrt{z^2 + \sqrt{4z^4 - 1}}; \quad w = \sqrt{z^2 - \sqrt{4z^4 - 1}}$$

Здесь мы считаем, что при вычислении радикалов разрез в комплексной плоскости идет по отрицательной полуоси. Таким образом,  $z, s, w > 0$ . При  $q < 1$   $w^2 < 0$  и  $\Delta_2, \Delta_4$  - вещественны.

Установим некоторые соотношения между  $Q_n$  и  $\Delta_n$ . Для этого рассмотрим функцию

$$\frac{z^m}{z^4 + \sqrt{2}\varepsilon z^3 + 1}$$

с целым  $m$ , которая имеет в полной комплексной плоскости конечное число полюсов. Сумма всех ее вычетов, включая вычет в бесконечности, равна нулю [5]. Используя это правило для  $m = 0, -2, -4$ , получим

$$\sum_{n=1}^4 Q_n \Delta_n = 0; \quad \sum_{n=1}^4 Q_n \Delta_n^3 = 0; \quad \sum_{n=1}^4 Q_n \Delta_n^5 = \sqrt{2}\varepsilon \quad (3.7)$$

Используя выражение  $Ez f(z) = 2 - Ez f(-z)$ , запишем теперь формулы (3.4) в виде

$$i(\tau) = i_a e^{-\lambda\tau} \sin(\omega\tau + \varphi_i) + i_p(\tau) \quad (3.8)$$

$$u(\tau) = u_a e^{-\lambda\tau} \cos(\omega\tau + \varphi_u) + u_p(\tau)$$

где

$$\lambda = -\operatorname{Re} \Delta_1^{-2}; \quad \omega = -\operatorname{Im} \Delta_1^{-2} \quad (\lambda, \omega > 0)$$

$$i_a = 4|Q_1|; \quad \varphi_i = \frac{\pi}{2} - \arg Q_1; \quad (3.9)$$

$$u_a = 4|Q_1 \Delta_1^2|; \quad \varphi_u = \pi - \arg(Q_1 \Delta_1^2)$$

$$i_p(\tau) = \sum_{n=1}^4 (-1)^n Q_n e^{z_n^2} \operatorname{Erf}[(1)^n z_n] \quad (3.10)$$

$$u_p(\tau) = -\sum_{n=1}^4 (-1)^n Q_n \Delta_n^2 e^{z_n^2} \operatorname{Erf}[(1)^n z_n]$$

Формулы (3.8) представляют ток и напряжение в виде суммы двух частей. Первая часть по форме похожа на выражения для разряда конденсатора в контуре с сосредоточенными параметрами. Вторая часть - функции  $i_p(\tau), u_p(\tau)$  - соответствует некоторому переходному процессу. Разделение на две части оправдано тем, что их поведение во времени существенно различно (рис.4). Можно сказать, что формулы (3.8) описывают экспоненциально-затухающие колебания возле монотонно меняющихся функций  $i_p(\tau), u_p(\tau)$ . Рассмотрим поведение последних при  $\tau \rightarrow \infty$ . Из (3.5), (3.6) следует, что при любых  $q, n$   $\operatorname{Re} [(-1)^n z_n] > 0$ . Асимптотическое разложение функции  $\operatorname{erf}(z)$  в этой полуплоскости дано в [6]. Используя его и соотношения (3.7), получим из (3.10)

$$i_p(\tau) \sim -\frac{3\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} \tau^{-\frac{5}{2}}; \quad u_p(\tau) \sim -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \tau^{-\frac{3}{2}} \quad (3.11)$$

Как видно, при достаточно больших  $\tau$   $u(\tau), i(\tau) < 0$ , т.е. формулы (3.11) показывают, что при любых параметрах цепи происходит переполюсовка напряжения и тока, и в этом смысле, режим соответствующий аperiodическому разряду в обычном контуре, в нашей цепи никогда не реализуется. Объяснение этому неожиданному факту можно найти в некоторых особенностях процесса релаксации поля. В п.2 было выяснено, что в процессе релаксации ток переносит через сечение шины бесконечно большой заряд. Пусть теперь при некотором  $\tau$   $\mathcal{A}(\infty, \tau) > 0$  и, кроме того,  $u(\tau) > 0$ . Такой случай осуществляется, когда ток в разряде достигает первого максимума. Ясно, что релаксация (2.6), (2.7) приведет к переполюсовке конденсатора. Затем напряжение в некоторый момент пройдет через минимум и, как следует из (3.2), в этот момент ток также изменит знак (разумеется все эти рассуждения верны, пока размер скин-слоя много меньше поперечного размера проводника).

Отметим, что зависимости типа (3.11) обязаны проявлению скин-эффекта. Из (3.11) следует  $i_p = -d u_p / d \bar{t}$ , что и должно быть по уравнению (3.2). Попытка же связать эти величины посредством  $u_p = R i_p$  или  $u_p = \frac{d}{d \bar{t}} (\mathcal{L} i_p)$ , где  $R, \mathcal{L}$  - безразмерные аналоги индуктивности и сопротивления, приводит к бессмысленным значениям для  $R, \mathcal{L}$ . Можно было бы сказать, что при  $\bar{t} \rightarrow \infty$  магнитное поле проникает в шину на большую глубину, следовательно, сопротивление имеет индуктивный характер. Поэтому запись  $u_p = R i_p$  неверна. Однако, при выраженном скин-эффекте соотношение между потоком и током в нагрузке может быть весьма своеобразным: поток поля в диапазоне  $-\infty \leq x \leq \infty$  может быть положительным, а ток отрицательным; поток может убывать, а ток возрастать. В этом случае обычное определение индуктивности теряет смысл. Например, формальная запись  $d(\mathcal{L} i_p) / d \bar{t} = u_p$  дает, что  $\mathcal{L} < 0$  возрастает как  $\bar{t}^2$ . С другой стороны, из физических соображений ясно, что глубина проникновения поля и, следовательно, эквивалентный зазор между шинами растут лишь как  $\sqrt{\bar{t}}$ .

Скин-эффект проявляется также в отличии параметров (3.9) от тех же параметров для затухающих колебаний в контуре с сосредоточенными  $R, L$ . Действительно, при малых  $\epsilon$  естественной была бы замена нашей нагрузки последовательно соединенными  $R = \epsilon \omega_0 L$  и  $L = L_0 (1 + \epsilon)$ , что является эквивалентной для нее цепью в случае стационарного синусоидального напряжения с частотой  $\omega_0$ . Ток и напряжение при этом можно записать в виде первых членов формул (3.8), в которых с точностью до членов первого порядка малости по  $\epsilon$

$$\lambda \approx \frac{\epsilon}{2}; \quad \omega \approx 1 - \frac{\epsilon}{2};$$

$$i_a \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}; \quad \varphi_i = 0;$$

$$u_a \approx 1; \quad \varphi_u \approx -\frac{\epsilon}{2};$$

С другой стороны, формулы (3.9) при малых  $\epsilon$  дают

$$\lambda = \frac{\epsilon}{2}; \quad \omega \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

$$i_a \approx 1 - \frac{\epsilon}{4}; \quad \varphi_i \approx \frac{\epsilon}{4};$$

$$u_a \approx 1 + \frac{\epsilon}{4}; \quad \varphi_u \approx -\frac{\epsilon}{4};$$

Сравнение формул показывает, что с принятой точностью затухающие колебания в (3.8) при учете скин-эффекта сдвинуты по фазе на  $\epsilon/4$  и на такую же величину имеют большие значения амплитуд. Для поля в проводнике также можно получить представление типа (3.8). Из (3.3) следует

$$\frac{\partial a}{\partial \xi} = \sqrt{2} \epsilon e^{-\frac{\xi^2}{4\bar{t}}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{g_n^2} \operatorname{Erf}(g_n)$$

где  $g_n = z_n + \frac{\xi}{2\sqrt{\bar{t}}}$ . То есть структура формулы для поля с точностью до множителя та же, что и для тока, и тем же образом можно разбить это выражение на две части. При больших  $\bar{t}$ , когда точки  $g_n$  близки к  $z_n$ , поле в шине, соответствующее переходному члену, затухает как  $\bar{t}^{-3/2}$ . Тот же закон имеет место, когда на границе проводника в момент  $\bar{t} = 0$  включается синусоидальное поле /7/. Отличие нашего случая свободных колебаний состоит в том, что в точке  $\xi = 0$  переходной член не равен нулю и затухает здесь как  $\bar{t}^{-5/2}$ . В предельном случае  $q = 0$ , что соответствует  $d = 0$ , удобно перейти к переменным

$$\xi_* = x \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon}}; \quad \tau_* = \frac{t}{\sigma}; \quad a_* = \frac{2L}{u_0 \theta} \cdot A;$$

$$i_* = \frac{I \cdot \theta}{u_0 C}; \quad u_* = \frac{u}{u_0};$$

где  $\theta = \left( \frac{2\mu_0 L C}{k \sqrt{\sigma}} \right)^{1/3}$ . В этих переменных исходные уравнения для этого случая будут совпадать с (3.1), (3.2) за исключением соотношения между  $i_*$  и  $a_*$  и граничного условия, которые нужно взять в виде

$$i_*(\tau_*) = \left. \frac{\partial a_*(\xi_*, \tau_*)}{\partial \xi_*} \right|_{\xi_*=0}; \quad a_*(0, \tau_*) = 0;$$

Решение задачи можно получить с помощью преобразования Лапласа. В формулах для тока и напряжения в этом случае /8/ также можно выделить переходные члены -  $i_{*p}(\tau_*)$ ,  $u_{*p}(\tau_*)$ , причем из формулы для  $i_*(\tau_*)$  следует, что при  $d = 0$  ток не нарастает до бесконечности, как это было бы в случае бесконечно-тонкого скин-слоя, и вблизи нуля меняется как  $\sqrt{\tau_*}$  (рис.46).

Отметим, что при  $q > 0$  из операторного решения для  $i(\tau)$  следует, что  $i'_{\tau=0} = 1$ , т.е. ток вблизи нуля меняется линейно и его производная по времени в нуле имеет то же значение, что и в контуре с сосредоточенной индуктивностью, равной  $L_0$ .

Таким образом, путем уменьшения размера зазора можно увеличить амплитуду поля в нём лишь до какой-то конечной величины. Как видно из рис.5, где показан график зависимости от  $\varepsilon$   $i_{xm}$  максимального при разряде значения  $i_x$  ( $d \neq 0$ ), таковой путь увеличения поля при  $\delta > d$  становится малоэффективным. Можно сказать, что здесь параметр  $d$  слабо влияет на процесс разряда, а основной нагрузкой источника питания является область скин-слоя.

На рис.6 показаны расчетные значения некоторых характеристик процесса разряда в зависимости от  $\varepsilon$ . Здесь  $\tau_{\varphi 0}$  - время нарастания тока  $i(\tau)$  от нуля до максимального значения  $i_m$ ,  $\tau_u$  - момент времени, когда завершается первая полувольт тока и конденсатор перезаряжается до напряжения  $u = u_k$ . Величина  $W_n = i_m^2$  даёт отношение энергии поля в рабочем объеме (полезной энергии) в момент  $\tau = \tau_{\varphi 0}$  к первоначально запасенной в конденсаторе,  $W_k = u_k^2$  - отношение конечной энергии в конденсаторе к начальной.

Как видно,  $W_n$ ,  $W_k$  при  $\varepsilon \leq 1$  имеют близкие значения, т.е. эффективные потери энергии за время  $\tau_{\varphi 0}$  и  $\tau_u$  отличаются мало (в классическом контуре эти потери отличаются более чем в 2 раза). Это объясняется тем, что на участке спада тока от максимального значения до нуля плотность тока, а значит и электрическое поле, в точке  $x=0$  становятся в некоторый момент времени отрицательными, следовательно, вектор Пойнтинга получает направление в сторону зазора. Таким образом, часть реактивной энергии, вошедшей в скин-слой, выходит из него и возвращается в конденсатор. При больших значениях  $\varepsilon$  получается даже, что

$W_k > W_n$ , причем при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ,  $W_n \rightarrow 0$ , а  $W_k$  стремится к некоторому отличному от нуля значению.

Отметим, что для практически интересных значений  $\varepsilon \leq 1$   $\tau_{\varphi 0}$  мало отличается от его величины в идеальном контуре с  $L = L_0$ ,  $R = 0$ , которая равна в наших переменных  $\frac{\pi}{2}$ .

## Другие типы нагрузок

Если для нагрузки известно операторное сопротивление, то операторное решение процесса разряда выражается по обычным формулам

$$\tilde{U}(\rho) = \frac{Z(\rho) U_0}{\rho(Z(\rho) + \frac{1}{\rho C})}; \quad \tilde{I}(\rho) = \frac{U_0}{\rho(Z(\rho) + \frac{1}{\rho C})}$$

Переход к оригиналу достаточно просто осуществляется численно [9].

Часто в расчетах нагрузку можно представить в виде  $N$  различных последовательно соединенных участков из параллельных шин бесконечной толщины. Тогда задача сводится к рассмотренной (см.п.2). В формулах для тока и напряжения  $L_0$  будет суммарной индуктивностью всех зазоров (см.(2.10))

$$L_0 = \mu_0 \sum_{n=1}^N \frac{d_n l_n}{h_n}$$

а параметр  $d$  иметь значение

$$d = \left( \sum_{n=1}^N \frac{d_n l_n}{h_n} \right) \left( \sum_{n=1}^N \frac{l_n}{h_n} \right)^{-1}$$

Если, например, нагрузка состоит из магнита с параметрами  $l_m$ ,  $d_m$ ,  $h_m$  и фидера, расстояние между шинами которого равно нулю, для  $L_0$  получим то же значение, что и без фидера, а

$$d = \frac{d_m}{1 + \frac{l_{\varphi} h_m}{l_m h_{\varphi}}}$$

где  $l_{\varphi}$ ,  $h_{\varphi}$  - соответственно длина и высота шин фидера. Как видно, наличие фидера эквивалентно увеличению параметра  $\varepsilon$

в  $1 + \frac{L_p \cdot h_m}{L_m \cdot h_p}$  раз.

В случае многовитковой нагрузки при  $\frac{D}{\delta_0} \gg 1$  (см. (2.9)) процесс разряда описывается формулами для одного витка с индуктивностью зазора  $\frac{\mu_0 \ell d}{h} N^2$  и  $\epsilon = \frac{\delta_0}{d} \frac{2N^2 + 1}{3N}$ .

#### 4. О потерях потока при получении сверхсильных полей путем быстрого обжата проводящих оболочек

Взрывной метод генерирования сильных магнитных полей, предложенный и обоснованный в 1951г. А.Д.Сахаровым /10/, в настоящее время используется в различных исследованиях. В устройствах, работающих на этом принципе, из-за конечной проводимости материала оболочки всегда имеются потери потока: поток поля через охваченную оболочкой площадь в конце обжата меньше его величины в начале процесса. В практических случаях этот эффект значительно уменьшает коэффициент усиления поля /1/ и при проектировании взрывных генераторов его необходимо учитывать.

Точный расчет потерь потока имеется только для случая параллельных пластин, сближающихся с постоянной скоростью и имеющих постоянную проводимость /11-13/. В конкретных случаях для этой цели используются различные приближенные методы /1/. Ниже, в предположении, что материал оболочки твердый и известны некоторые параметры, зависящие только от её геометрии, задача о потерях потока формулируется в виде системы двух уравнений, решение которых можно осуществить численно, а для некоторых частных случаев, отличных от рассмотренного в /11-13/ даны точные решения этих уравнений.

#### Исходные уравнения

Сечение оболочки, сжимающей поток в области  $G$ , схематично показано на рис.7. Изменяющийся во времени контур  $F(t)$  выбран так, что вектор плотности тока параллелен линии контура в каждой его точке  $s$ . Будем считать, что потери потока через контакт  $C$ , связанные с неоднородностями поверхностей, отсутствуют, обжатие потока начинается в момент  $t = t_n$ , а начальный

поток создается в промежутке  $0 \leq t \leq t_n$ . Для расчета тока в такой системе можно использовать уравнение баланса потока. Учитывая проникновение некоторой части потока в проводник и потери его через скользящий контакт /1/, это уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(t) + \int_{F(t)} \varphi(s, t) ds + \int_{t_n}^t v(\tau) [\varphi_k^+(\tau) + \varphi_k^-(\tau)] d\tau = \\ = \Phi(t_n) + \int_{F(t_n)} \varphi(s, t_n) ds \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\Phi(t)$  - поток индукции через площадь, охваченную контуром  $F$ ,  $\varphi(s, t)$  - поток индукции в оболочке на единицу длины  $F$  в точке  $s$ ,  $v(t) > 0$  - скорость, с которой контакт  $C$  движется по контуру  $F(t)$ ;  $\varphi_k^+(t)$ ,  $\varphi_k^-(t)$  - значения величины  $\varphi(s, t)$  в точке контакта  $C$  с разных его сторон. При наличии нескольких контактов в левой части (4.1) должна стоять сумма интегралов по всем контактам. Для расчета тока нужно выразить  $\Phi(t)$  и  $\varphi(s, t)$  через его величину  $I(t)$ .

Будем считать, что размер скин-слоя много меньше радиусов кривизны оболочки и проникновение поля в металл достаточно точно описывается с помощью одномерной задачи для поля в проводнике, занимающем полупространство  $x > 0$ . Векторный потенциал поля будем отсчитывать от бесконечности. Тогда при  $x > 0$  можно написать (п.1)

$$\sigma_s \mu_0 \frac{\partial A_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 A_s}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

где  $\sigma_s(x, t)$  - проводимость материала оболочки. Подобное уравнение для случая нелинейной диффузии рассматривалось в /14/. Значок  $s$  показывает, что рассмотрение проводится в точке  $s$ . В этой точке

$$\varphi(s, t) = -A_s(0, t) \quad (4.3)$$

Граничное условие для уравнения (4.2) можно записать в виде

$$\left. \frac{\partial A_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu_0 \frac{I(t)}{b(s,t)} \quad (4.4)$$

Здесь  $b(s,t)$  - средняя длина силовой линии в данной точке контура. Величину  $b(s,t)$  мы считаем известной. В практических случаях эта величина слабо зависит от размера скин-слоя и определяется только расположением проводников в данный момент времени.  $b(s,t)$  можно положить равным высоте образующих генераторов пластин, если она много больше расстояния между ними. При учете краевых полей  $b(s,t)$  получается большей примерно на величину этого расстояния. Величину  $b(s,t)$  можно измерить на моделях.

Помимо этого будем считать известной  $L(t)$  - индуктивность витка, охватывающего область  $G$  при бесконечно-тонком скин-слое. Тогда для потока индукции через площадь, охваченную контуром  $F$ , можно написать

$$\Phi(t) = L(t) \cdot I(t) \quad (4.5)$$

При конечной величине скин-слоя выражение (4.5) является точным, если виток выполнен из прямых пластин бесконечной высоты. В противном случае поток, проходящий через область  $G$  отличается от задаваемого формулой (4.5). В практических случаях, однако, это отличие пренебрежимо мало.

Для определения  $I(t)$  по уравнениям (4.1) - (4.5) необходимо задать закон его изменения во времени в интервале  $0 \leq t \leq t_n$ , когда создается начальное поле. В этом интервале рассчитывается только уравнение (4.2). Затем зависимость тока от времени определяется из совместного решения двух уравнений (4.1) и (4.2).

При  $\sigma_2(x,t) = \sigma = const$  задача упрощается. Из (4.2), (4.4) в этом случае получим

$$\varphi(s,t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\sigma \pi}} \int_0^t \frac{I(\tau) d\tau}{b(s,\tau) \sqrt{t-\tau}} \quad (4.6)$$

и задача сводится к расчету только одного уравнения (4.1).

### Точные решения для некоторых простых случаев

Рассмотрим некоторые простые случаи обжатия потока, когда  $\sigma_2(x,t) = \sigma = const$ . Считаем, что во всех случаях высота оболочки везде одна и та же ( $b(s,t) = const$ ) и поле внутри её однородно и равно  $H(t)$ . Будем считать для простоты, что поле создается мгновенно в момент  $t=0$ . Из (4.1), (4.6) для  $H(t)$  в этом случае получим

$$H(t) \cdot S(t) + \frac{1}{\sqrt{\sigma \mu_0 \pi}} \int_0^t \left( \mathcal{L}(\tau) \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{H(\eta) d\eta}{\sqrt{\tau-\eta}} \right) d\tau = H(0) \cdot S(0) \quad (4.7)$$

где  $S(t)$  - величина площади, охваченной контуром  $F$ ,  $\mathcal{L}(t)$  - его длина. Возьмем от (4.7) производную по времени, поделим результат на  $\mathcal{L}(t)$  и проинтегрируем получившееся уравнение в пределах от 0 до  $t$ , получим

$$H(t) \cdot \frac{S(t)}{\mathcal{L}(t)} + \frac{1}{\sqrt{\sigma \mu_0 \pi}} \int_0^t \frac{H(\eta) d\eta}{\sqrt{t-\eta}} = H(0) \cdot \frac{S(0)}{\mathcal{L}(0)} - \int_0^t H(t) \cdot \frac{S(t)}{\mathcal{L}^2(t)} \cdot \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} dt \quad (4.8)$$

Такая форма исходного уравнения для случаев, рассматриваемых ниже, более удобна в расчетах.

Сравним три случая обжатия оболочки генератора из двух параллельных пластин (рис. 8а, б, в), начальное расстояние между которыми равно  $a_0$ . Введем обозначения

$$\tau = \frac{t}{t_0}; \quad h(\tau) = \frac{H(t)}{H(0)}; \quad \varepsilon = \frac{2}{a_0} \sqrt{\frac{t_0}{\sigma \mu_0}}$$

Величину  $t_0$  для каждого случая определим дополнительно.

а) В случае, показанном на рис.8а, контакт С начинает движение от точки  $x=0$  в направлении оси  $x$  с постоянной скоростью  $v_x$ . Размер  $a = a_0 = \text{const}$ ,  $t_0 = l/v_x$  обжатие прекращается в момент  $\tau_k = l_k / (v_x t_0)$ . Рассматриваем случай  $l - l_k \gg a_0$ . При этом  $\mathcal{L}(t) \approx 2(l - v_x t)$ ,  $S(t) = a_0(l - v_x t)$ . Уравнение (4.8) примем вид

$$h(\tau) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{h(\eta)}{\sqrt{\tau-\eta}} d\eta = 1 + \int_0^{\tau} \frac{h(\eta)}{1-\eta} d\eta \quad (4.9)$$

Решение этого уравнения есть (см.приложение)

$$h(\tau) = e^{\varepsilon^2 \tau} \text{Erfi}(\varepsilon \sqrt{\tau}) + g(\tau) + \varepsilon \sqrt{\pi} \int_0^{\tau} \frac{g(\eta)}{\sqrt{\tau-\eta}} d\eta \quad (4.10)$$

где

$$g(\tau) = \frac{\tau}{1-\tau} \left[ (1+2\varepsilon^2 \tau^2) e^{\varepsilon^2 \tau} \text{Erfi}(\varepsilon \sqrt{\tau}) - 2\sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{\tau} \right] \quad (4.11)$$

Введём величину  $K_0 = \frac{1}{1-\tau_k} = \frac{S(0)}{S_k}$

( $S_k$  - площадь витка нагрузки), которая равна коэффициенту усиления поля в случае сверхпроводящих шин. При  $K_0 \gg 1$  и при быстром обжатии ( $\varepsilon \ll 1$ ) из (4.10)-(4.11) для коэффициента усиления поля можно получить

$$K = h(\tau_k) \approx K_0 \left( 1 - \frac{4\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{\pi K_0^{-1/2}}{4} \right) \right) \quad (4.12)$$

Отметим, что до тех пор, пока применимо наше приближение ( $l - v_x t \geq a_0$ ), при достаточно быстром обжатии поле меняется во времени как  $\frac{1}{1-\tau}$ .

б) Случай, показанный на рис.8б аналогичен рассмотренному в /11-13/ и отличается только наличием нагрузочного витка. Пластины генератора на участке  $0 \leq x \leq l$  сближаются с постоянной скоростью  $v_y$ . Здесь в уравнении (4.8)

$$S(t) = l a_0 \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right) + S_k$$

$$\mathcal{L} = 2l + \mathcal{L}_k = \text{const}$$

где  $t_k = a_0 / v_y$ ,  $S_k$  - площадь витка нагрузки,  $\mathcal{L}_k$  - его длина. В данном случае возьмем

$$t_0 = \left( a_0 + \frac{S_k}{l} \right) \frac{1}{v_y}; \quad \varepsilon = \frac{\mathcal{L}(0)}{S(0)} \sqrt{\frac{t_0}{\sigma \mu_0}}$$

(для случаев, реализуемых на практике  $\varepsilon \approx \frac{2}{a_0} \sqrt{\frac{t_0}{\sigma \mu_0}}$ ).

Для  $h(\tau)$  будем иметь

$$h(\tau) (1-\tau) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{h(\eta)}{\sqrt{\tau-\eta}} d\eta = 1$$

Решение этого уравнения дано в /13/. В момент  $\tau_k = \frac{t_k}{t_0}$  его можно записать в виде

$$h(\tau_k) = \frac{1}{2} K_0^{\frac{3}{2}} e^{\varepsilon^2 K_0} \int_{K_0}^{\infty} \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\eta}{\eta-1}} \right) e^{-\varepsilon^2 \eta} \eta^{-\frac{3}{2}} d\eta$$

где  $K_0 = \frac{1}{1-\tau_k} = \frac{S(0)}{S_k}$ .

При больших значениях  $K_0$  выражение в скобках под интегралом можно взять равным  $1 + 2\varepsilon/\sqrt{\pi}$ , после чего для коэффициента усиления поля получим

$$K \approx (1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}) K_0 [1 - \sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{K_0} e^{\varepsilon^2 K_0} E_2 f(\varepsilon \sqrt{K_0})]$$

При достаточно "быстром" обжатии, когда  $\varepsilon^2 K_0 \ll 1$  это дает

$$K \approx K_0 (1 - \sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{K_0}) \quad (4.13)$$

а при "медленном" обжатии -  $\varepsilon^2 K_0 \gg 1$

$$K \approx K_{пр} (1 - \frac{3}{2\varepsilon^2 K_0})$$

где

$$K_{пр} = \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi} \varepsilon} \quad (4.14)$$

предельное значение  $K$  при отсутствии нагрузки ( $K_0 = \infty$ ) /11-13/.

в) Этот случай показан на рис. 8в. Контакт С движется с постоянной скоростью  $v_x$  и, кроме того, пластины сближаются с относительной скоростью  $v_y$ . Нагрузочный виток отсутствует. Соотношение между  $v_x$  и  $v_y$  таково, что, когда контакт С доходит до точки  $x = l$ , расстояние между пластинами становится равным нулю. Рассматриваем случай  $l \gg a_0$ . При этом

$$L \approx 2l(1-\tau), \quad S = a_0 l (1-\tau)^2, \quad t_0 = l/v_x = a_0/v_y$$

Для  $h(\tau)$  будем иметь 
$$h(\tau)(1-\tau) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{h(\xi)}{\sqrt{\tau-\xi}} d\xi = 1 + \int_0^\tau h(\xi) d\xi$$

Обозначим через  $f(\tau) = \int_0^\tau h(\xi) d\xi$ . Для изображения  $F(p) \equiv f(\tau)$  получим

$$\frac{dF}{d\rho} + (1 + \varepsilon \rho^{-1/2}) F = \rho^{-2}$$

Оригинал, изображение которого подчиняется этому уравнению, вычислен в /12/. Используя его, найдём

$$h(\tau) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_{1-\tau}^1 \frac{\xi^{-2}(1-\xi^{1/2})}{(\xi-1+\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2(1-\xi^{1/2})^2}{\xi-1+\tau}\right] d\xi$$

Отсюда для поля в конце обжатия получим следующее значение

$$h(1) = \frac{3}{4} \varepsilon^{-4} + \frac{3}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{-3} + \frac{3}{2} \varepsilon^{-2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{-1} \quad (4.15)$$

Сравнение рассмотренных случаев показывает, что несмотря на потери через контакт, наиболее выгоден такой способ обжатия, когда длина контура  $F$ , на котором происходят потери потока, в процессе обжатия уменьшается. При одном и том же  $\varepsilon$  потери потока существенно зависят от способа обжатия. Из (4.12), (4.13) следует, что при одинаковом значении  $K_0$  потери потока в случае б) больше в  $\frac{\pi \sqrt{K_0}}{4}$ , чем в случае а). Предельное поле в случае в) при  $\varepsilon \ll 1$  больше в  $\frac{3}{2} \varepsilon^{-2}$ , чем в случае б), (формула (4.14)). Различие велико, если учесть, что  $K_0 \gg 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

Отметим, что в случаях б) и в) различно изменение со временем площади, охваченной контуром  $F$ . Это, однако, не меняет характера высказанных замечаний. Если в случае б) взять такой же закон изменения площади, что и в случае в)  $S = l a_0 (1-\tau)^2$  ( $S_n = 0$ ,  $L_n = 0$ ), то при том же значении  $t_0$  пластины начнут сближение со скоростью  $2v_y$  и, равномерно замедляясь, будут в конце обжатия иметь скорость равную нулю. Очевидно, в этом случае предельное поле будет даже меньше, чем это следует из формулы (4.14).

### З а к л ю ч е н и е

Выше рассматривались простые варианты обжата оболочки при условии  $\sigma = const$ . С таким условием не представляет каких-либо трудностей численное интегрирование уравнения (4.1) для произвольно заданных  $L(t)$  и  $b(z, t)$ . Однако, при величине получаемых полей  $\sim 1 \text{ МЭ}$ , когда необходим учет температурной зависимости  $\sigma$ , такие расчеты имеют только качественный характер. В этом случае можно провести приближенные расчеты, записывая вместо (4.5)

$$\varphi(z, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{b(z, t)} \delta(z, t)$$

и используя для величины скин-слоя  $\delta$  приближенные выражения, учитывающие омический нагрев проводника /1/.  
Возможно также совместное численное решение уравнений (4.1), (4.2). Для уравнения (4.2) в нелинейном случае можно использовать разностный метод расчета /15/. Это позволяет на каждом слое по времени  $t = t_n$  определить из (4.2), (4.4)  $\varphi(z, t_n)$  как функцию  $I_n$  - величины  $I$  в момент  $t = t_n$ .

После этого  $I_n$  определяется из (4.1) (после замены интегралов в (4.1) численными формулами интегрирования) как корень уравнения типа  $f(I_n) = 0$ . Методы решения такой задачи изложены в /16/.

#### П р и л о ж е н и е

В уравнении (9) сделаем замену

$$h(\tau) = (1-\tau) f(\tau) \quad (\text{П.1})$$

К уравнению для  $f(\tau)$

$$(1-\tau)f(\tau) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \int_0^{\tau} \frac{(1-\eta)f(\eta)}{\sqrt{\tau-\eta}} d\eta = 1 + \int_0^{\tau} f(\eta) d\eta$$

применим преобразование Лапласа. Для изображения  $F(p) = f(\tau)$  получим

$$\frac{d}{dp} F(p) + F(p) \cdot \left(1 - \frac{1}{p + \varepsilon\sqrt{p}}\right) = \frac{1}{p + \varepsilon\sqrt{p}} \quad (\text{П.2})$$

Введем вспомогательное изображение  $G(p) = \frac{F(p)}{(\varepsilon + \sqrt{p})^2}$

Его оригинал обозначим через  $g(\tau)$ . Из (П.1), (П.2) следует

$$(1-\tau)g(\tau) = \frac{d}{d\rho} G(\rho) + G(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}(\varepsilon + \sqrt{\rho})^2}$$

$$h(\tau) = \frac{1}{\rho + \varepsilon\sqrt{\rho}} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\rho}}\right) G(\rho)$$

Отсюда для  $h(\tau)$  и  $g(\tau)$  получаем формулы (4.10), (4.11).

### 5. Изменение со временем показателя спада поля в безжелезном магните

В ускорительной технике используются безжелезные магниты, в которых формирование поля осуществляется благодаря скин-эффекту /17-19/. При  $\delta/a \ll 1$ , где  $\delta$  - величина скин-слоя,  $a$  - какой-либо характерный размер системы, характеристики поля мало отличаются от случая  $\delta = 0$ . Для практических целей представляет интерес оценка этой близости в зависимости от  $\delta/a$ .

Выясним, при каких условиях геометрия поля не зависит от  $\delta$ . Для неизменности геометрии необходимо, чтобы в любой момент времени контуры проводников совпадали с силовыми линиями поля. Это требует, чтобы поток поля в проводнике был одинаков в любой точке  $J$  его контура

$$|\vec{B}(z_1, t)| \cdot \delta(z_1, t) = |\vec{B}(z_2, t)| \cdot \delta(z_2, t) \quad (6.1)$$

Отсюда видно, например, что наименьшего изменения следует ожидать, если вблизи поверхности

$$\sigma(z) \sim |\vec{B}^{(0)}(z)|^2$$



где  $\sigma(z)$  — проводимость, а  $\vec{B}^{(0)}(z)$  — величина поля в точке  $z$  при  $\delta=0$ .

Для проводников с однородной проводимостью величину скин-слоя можно считать везде одинаковой (по крайней мере при  $\delta/R_m \ll 1$ , где  $R_m$  — наименьший радиус кривизны контура проводника), поэтому для выполнения (6.1) нужно  $|B(z,t)| = |\vec{B}(z,t)|$ .

Это возможно только в случае коаксиала или двух параллельных шин бесконечной высоты. В любых других случаях геометрия поля будет меняться.

Оценим это изменение в магните, профили шин которого выбраны так, что при  $\delta=0$  в медианной плоскости ( $z=0$ ) поле имеет вид

$$B_z(x) = B_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^{-n_0}$$

Оценку удобно провести сделав конформное преобразование

$$f = v + iw = \frac{x_0}{1-n_0} \left( \frac{\theta}{x_0} \right)^{1-n_0}$$

$$\theta = x + iz$$

При таком преобразовании профили шин станут прямыми линиями, а порядок их расположения вдоль оси абсцисс останется прежним (рис. 9а, б).

Уравнение для векторного потенциала примет вид

$$\mu_0 \sigma(v, w) \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial w^2} + \mu_0 \sigma(v, w) q(t)$$

где

$$\sigma = \sigma_0 / |f'_\theta|^2$$

$$|f'_\theta| = \left[ \frac{(1-n_0)^2 (v^2 + w^2)}{x_0} \right]^{\frac{n_0}{2(n_0-1)}}$$

$$q(t) = \begin{cases} E_1^r(t) & \text{в шине 1} \\ E_2^r(t) & \text{в шине 2} \end{cases}$$

$\sigma_0 = \text{const}$  в проводниках и  $\sigma_0 = 0$  в пустоте. Можно считать, что уравнение для  $A$  записано в обычных координатах для системы из двух параллельных шин с неоднородной проводимостью  $\sigma(v, w)$ .

Возьмем для определенности величину  $B_w = \partial A / \partial v$  положительной. Зависимость  $A$  от  $v$  при некоторых значениях  $w$  и  $t$  будет иметь вид, показанный на рис. 9в, где

$$A_1 = \int_0^t E_1^r(t) dt ; \quad A_2 = \int_0^t E^r(t) dt$$

$\varphi_i$  — поток поля в момент  $t$  в шине с номером  $i$ , его можно найти по формуле

$$\varphi_i(w, t) = \delta_i(w, t) \cdot B_w(v_i, w, t) \quad (6.2)$$

$\delta_i(w, t)$  — величина скин-слоя в шине с номером  $i$ . Поскольку  $\delta \sim \sigma^{-1/2}$ , то, считая  $\sigma(v, w)$  постоянной на глубине скин-слоя и равной  $\sigma(v_i, w)$ , можно написать

$$\delta_i(w, t) \approx |f'_\theta(v_i, w)| \cdot \delta(t)$$

где  $\delta(t)$  — величина скин-слоя в плоской шине из однородного проводника с проводимостью  $\sigma_0$  для заданной зависимости магнитного поля от времени.

Для показателя спада в медианной плоскости можно написать

$$n(x, t) = n_0 - \left(x \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{B_w} \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} = \quad (6.3)$$

$$= n_0 + \left(x \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{1}{B_w} \frac{\partial^2 A}{\partial w^2}$$

При вычислении добавки к  $n_0$  будем учитывать только члены  $\sim \delta(t)$ . Тогда в (6.2), (6.3) можно принять  $B_w(v_i, w, t) = B_w^{(0)}(t)$ . Учитывая, что

$$A(v_1, w) = A_1 + \varphi_1(w, t)$$

$$A(v_2, w) = A_2 - \varphi_2(w, t)$$

получим на краях апертуры

$$\frac{n(x_1, t) - n_0}{n_0} \approx \frac{(n_0 - 1) \delta}{x_1}$$

$$\frac{n(x_2, t) - n_0}{n_0} \approx - \frac{(n_0 - 1) \delta}{x_2}$$

Как видно, относительное изменение  $n$  на краях апертуры  $\sim \delta/R$ , где  $R$  - радиус кривизны силовых линий, и имеет разный знак. По этой причине на равновесной орбите относитель-

ное изменение  $n$  будет существенно меньше. Полагая  $n(x_0, t) \sim [n(x_1, t) + n(x_2, t)]/2$ , получим, что это изменение порядка  $(\delta/R) \cdot (a/R)$ , ( $a$  - размер апертуры,  $a/R \ll 1$ ). В случае  $n_0 = 1$  изменения нет. Этот случай соответствует коаксиальной геометрии поля. Интересно, что, хотя  $\lim_{n_0 \rightarrow 0} (n - n_0) = 0$ , но

$$\lim_{n_0 \rightarrow 0} \frac{n - n_0}{n_0} \neq 0$$

Для поля на оси  $x$  в квадрупольной линзе тем же методом можно получить:

$$B_z \approx B_0(t) \left[ \frac{x}{a} + \frac{\delta(t)}{2a} \left(\frac{x}{a}\right)^5 \right]$$

где  $a$  - полуразмер апертуры линзы.

Более точное решение этих задач можно получить разностным методом /20/.

Л и т е р а т у р а

1. Г.Клоффель. Сверхсильные импульсные магнитные поля М., 1972 г.
2. Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов. Сборник задач по математической физике. Москва, 1956.
3. Ю.Ю.Абрамов, А.А.Ведемов, Ю.А.Дрейзин. ДАН 201, № 2, стр.342, 1971 г.
4. Л.М.Барков, В.В.Огурцов, С.Х.Хахимов. ПТЭ, 2, 137, 1966.
5. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. "Методы теории функций комплексного переменного", Москва, 1958г.
6. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, 1963.
7. В.И.Волосов, Б.В.Чириков. ЖТФ, XXX, Вып.5, стр.508, 1964.
8. А.Б.Новгородцев, Г.А.Шнеерсон. Известия ВУЗов, Энергетика, т.8, № 12, стр.96, 1965 г.
9. Г.Деч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. Москва, 1971 г.
10. Сахаров А.Д., Людаев Р.З. и др. ДАН СССР, 165, 65 (1965).
11. *Patton A., Millar W. Journal of Applied Physics*  
35, 1141 (1964).
12. *Lehner G., Linhart J. G. Somon J. P. Nuclear Fusion*  
4, 362 (1964).
13. Е.Н.Биченков. ПМТФ № 6, (1964).
14. Г.А.Шнеерсон. ЖТФ, 37, 513 (1967).
15. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. Москва, 1966.
16. И.С.Березин, Н.П.Жидков. Методы вычислений, т.1, Москва, 1966.
17. Т.П.Всеволожская, Л.Л.Дамилов, Г.И.Сильвестров, Н.Ф.Соколова. ПТЭ, № 6, стр.32, 1968.
18. Т.А.Всеволожская, В.Н.Пакин, Г.И.Сильвестров. АЭ, 22, стр.210, 1967.

19. Т.А.Всеволожская и др. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 84, 1966
20. В.И.Юрченко. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 1973.

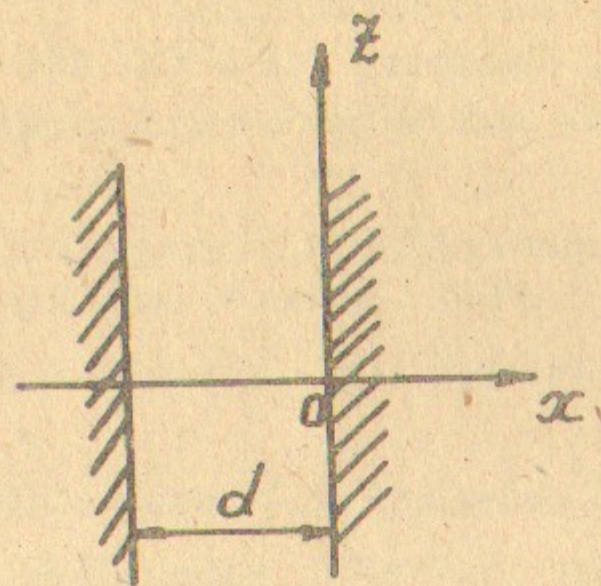


Рис. 1.

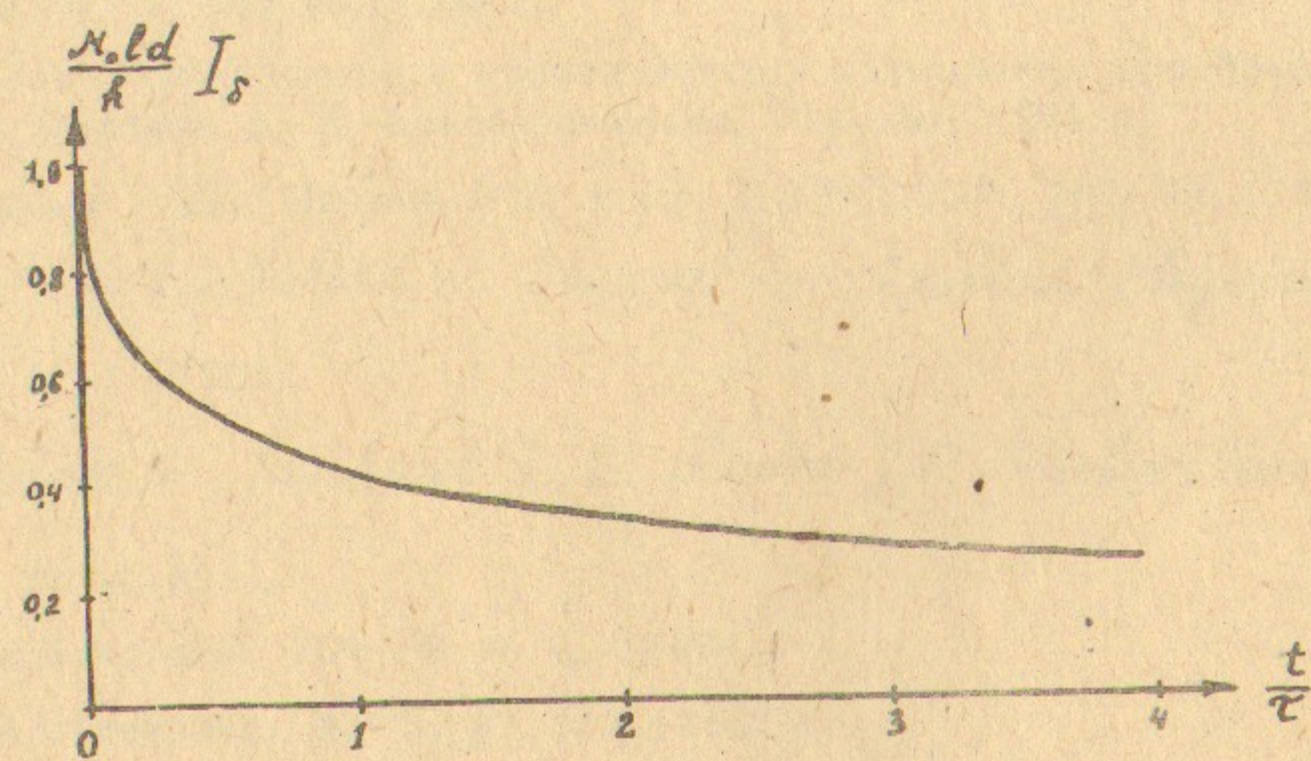


Рис. 2.

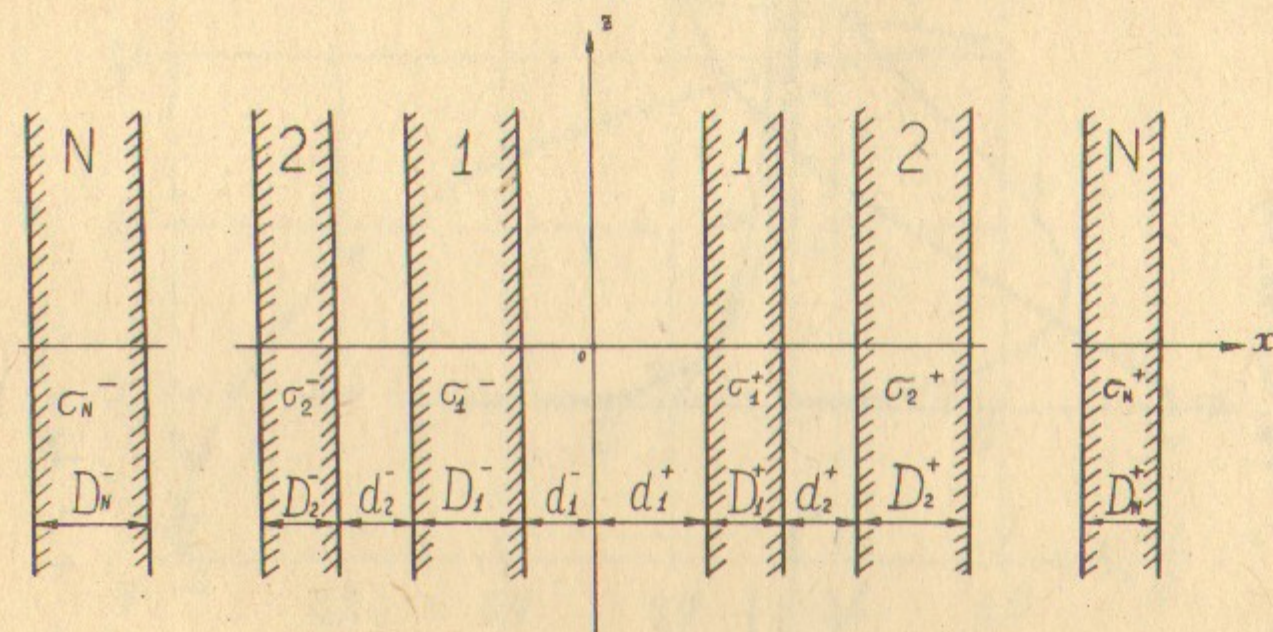


Рис. 3.

б

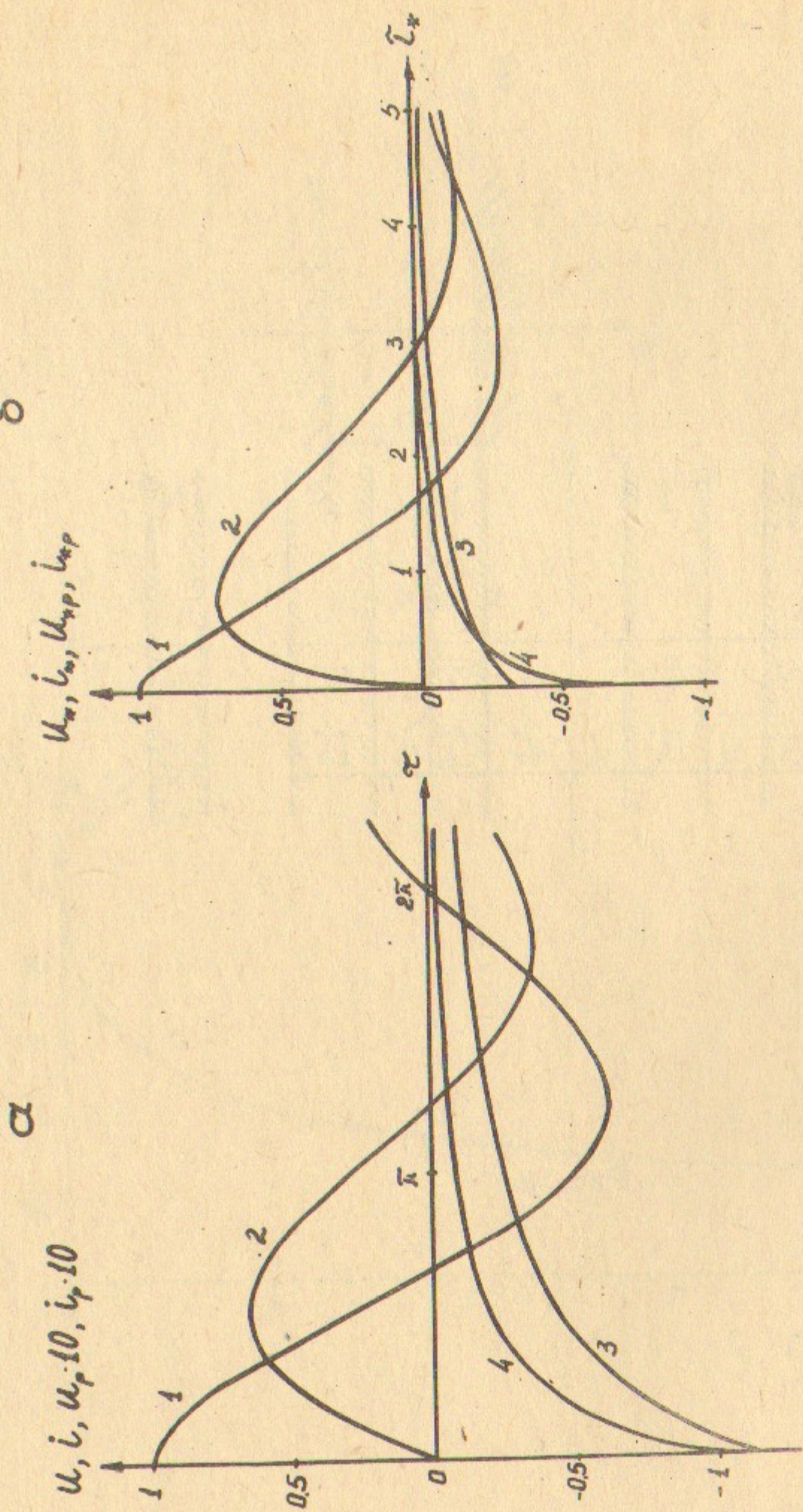


Рис. 4.

а)  $q=2,5$  ( $\epsilon=0,496$ ).  
 1 -  $u$ ; 2 -  $i$ ; 3 -  $u_p$ ; 4 -  $i_p$ .  
 б)  $q=0$ .  
 1 -  $u_x$ ; 2 -  $i_x$ ; 3 -  $u_{xp}$ ; 4 -  $i_{xp}$ .

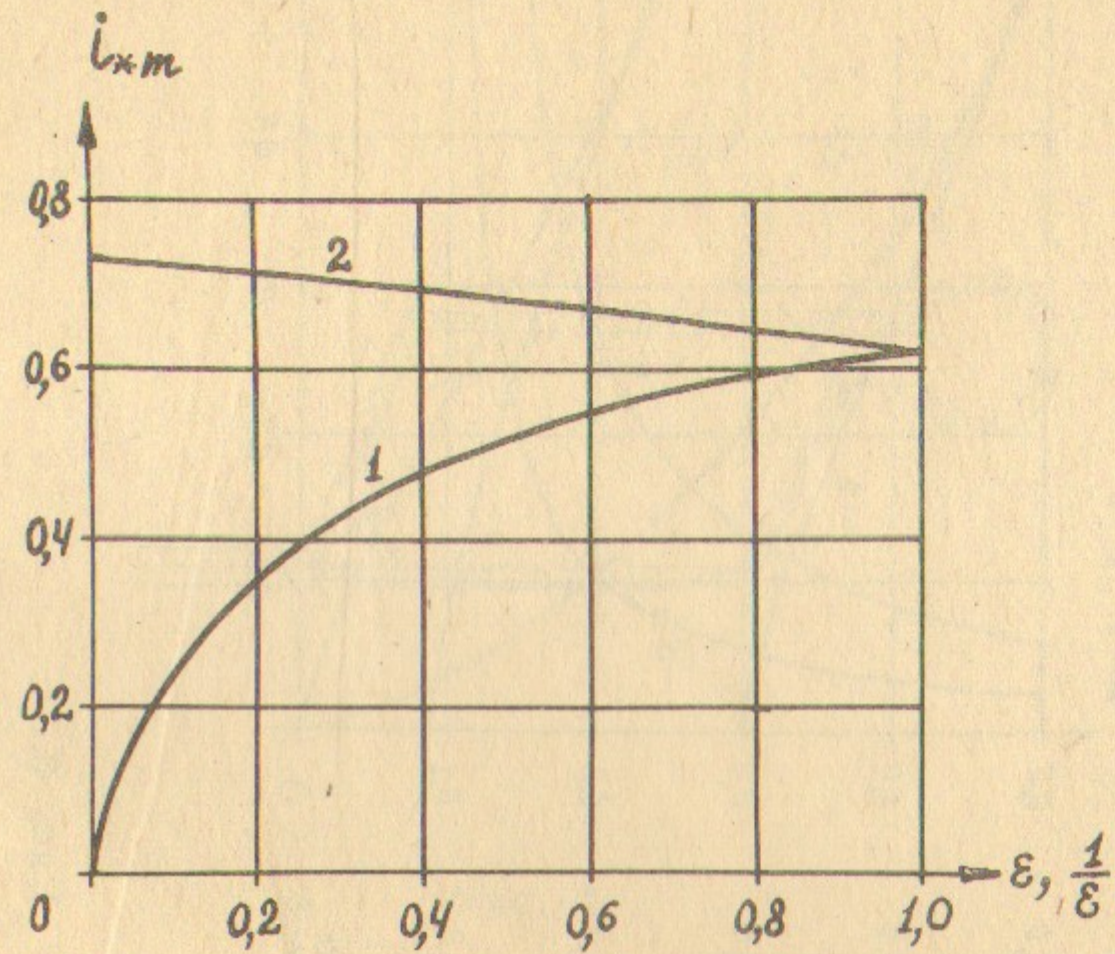


Рис. 5.

1 -  $i_{xm}$  в зависимости от  $\epsilon$ ; 2 -  $i_{xm}$  в зависимости от  $1/\epsilon$ .

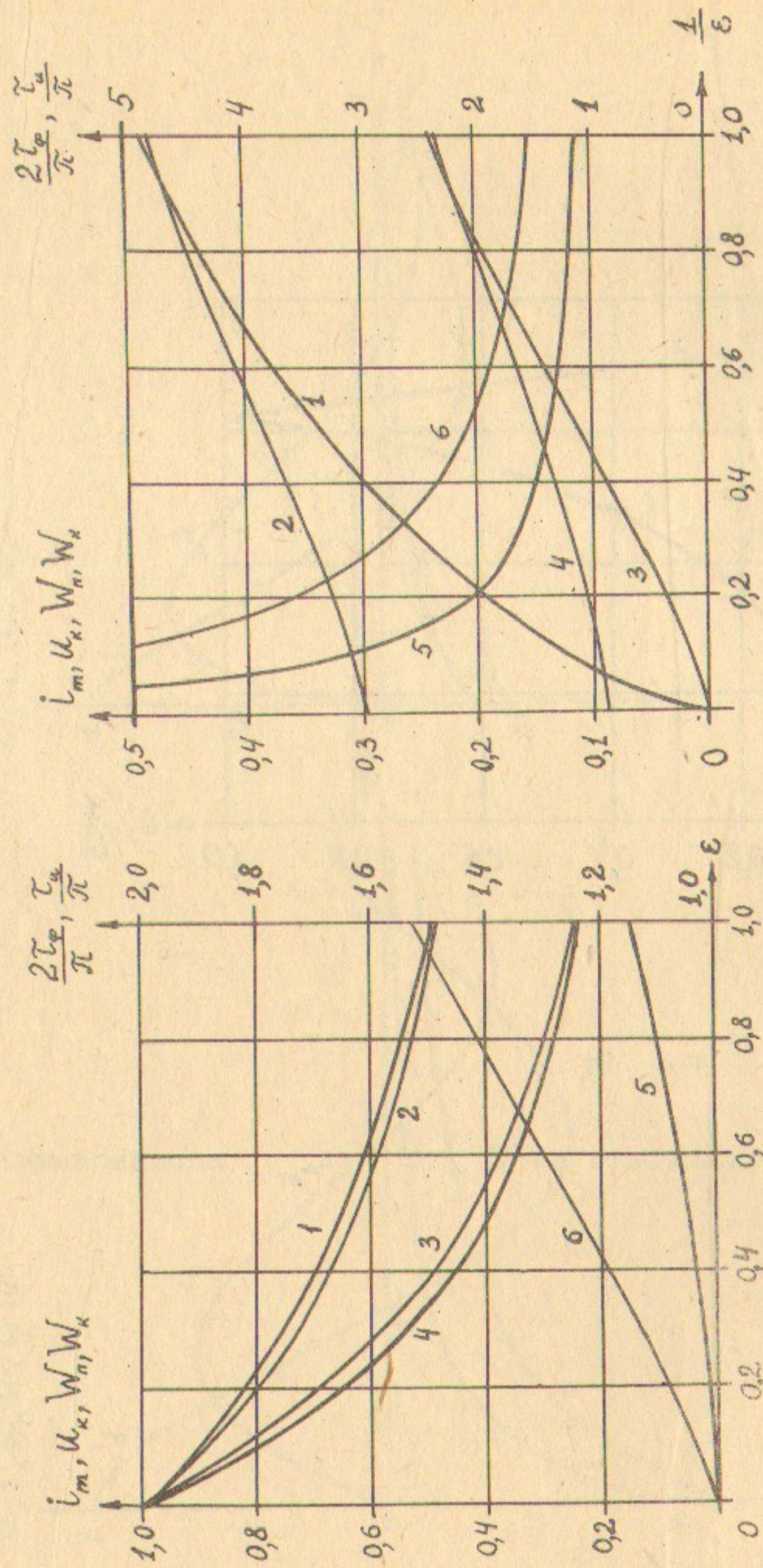


Рис. 6.

Рис.6. 1 -  $i_m$  ; 2 -  $|u_k|$  ; 3 -  $W_n$  ; 4 -  $W_k$  ;  
 5 -  $\frac{2T_p}{\pi}$  ; 6 -  $\frac{T_u}{\pi}$  ;

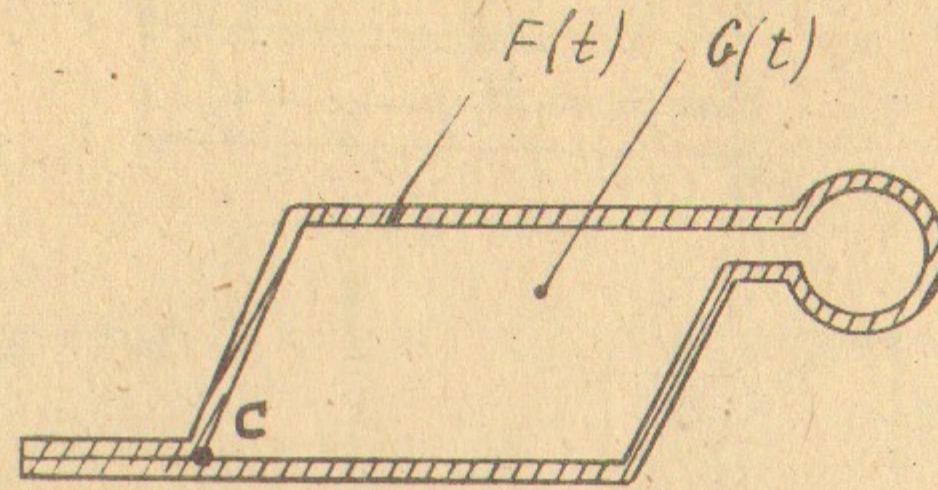
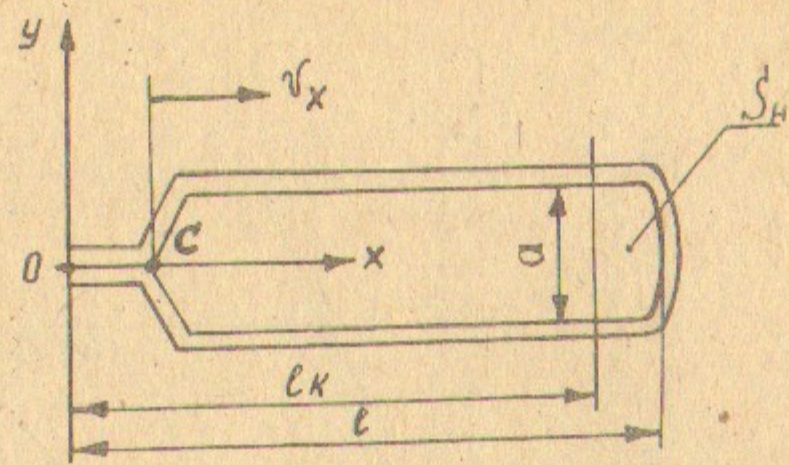
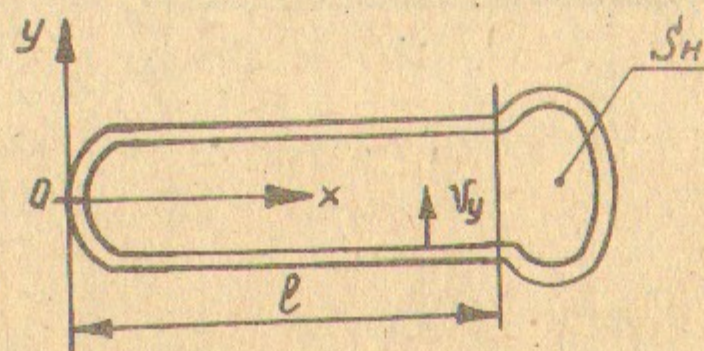


Рис. 7.

a)



б)



в)

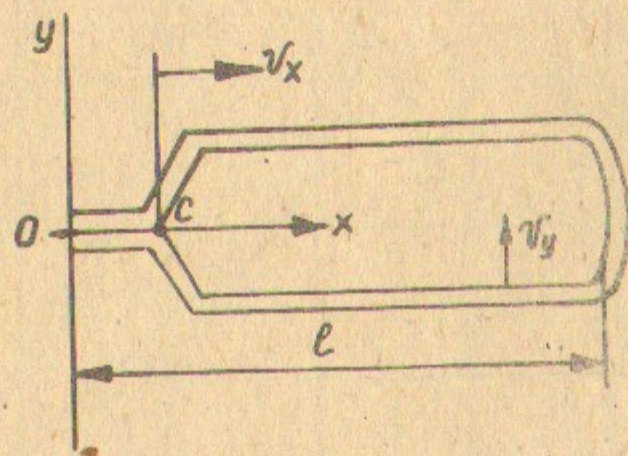


Рис. 8.

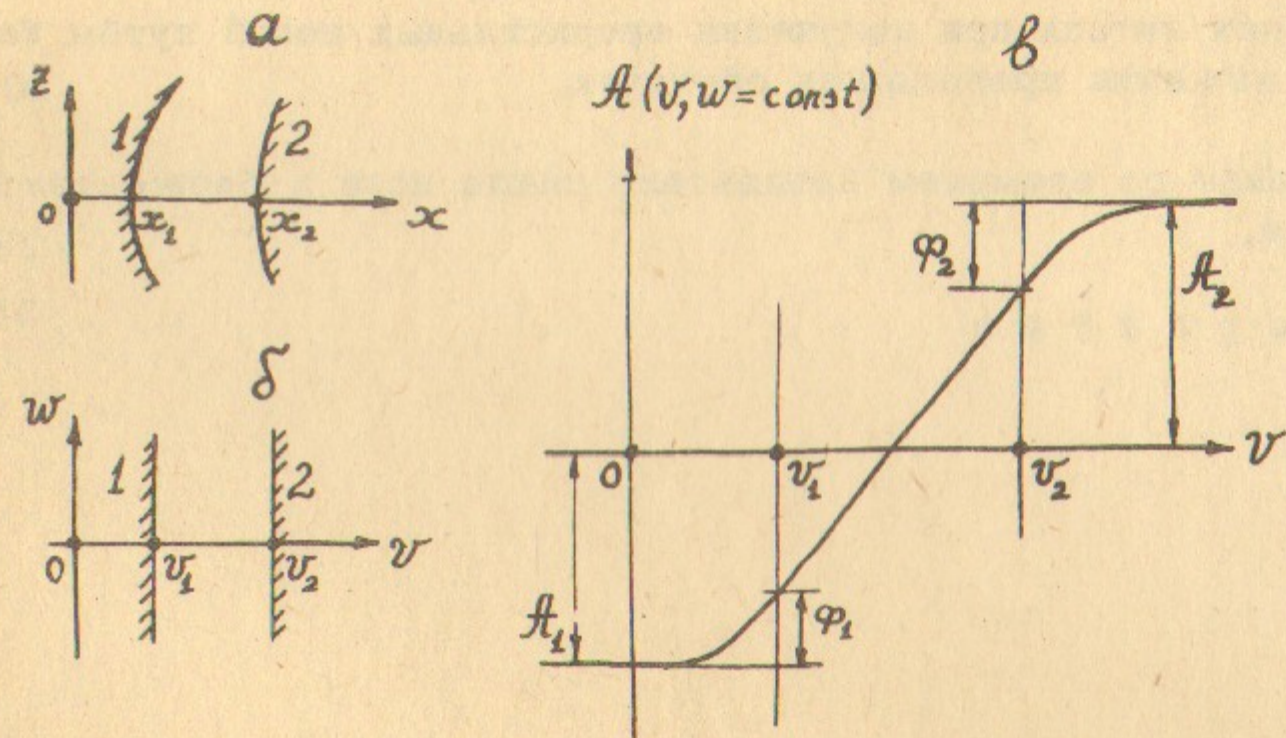


Рис. 9.

С о д е р ж а н и е

1. Формулы для скин-слоя.	3
2. Элементы с простой геометрией в цепи источника питания.	5
3. Разряд ёмкости на нагрузку из двух параллельных ции.	11
4. О потерях потока при получении сверхсильных полей путём быстрого обжатия проводящих оболочек.	20
5. Изменение со временем показателя спада поля в безжелезном магните.	29
6. Литература	34

---

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов  
Подписано к печати 24.10.1973г. МН 08589  
Усл. 2,0 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ №89 . ПРЕПРИНТ

---

Отпечатано на ротаприте в ИЯФ СО АН СССР, вг.