

**И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

**ПРЕПРИНТ И Я Ф 94 - 73**

**В.И.Юрченко**

**РАСЧЁТ ДВУМЕРНЫХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ  
ПОЛЕЙ НА ЭВМ**

**Новосибирск**

**1973**



В.И.Юрченко

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ  
ПОЛЕЙ НА ЭВМ

А Н Н О Т А Ц И Я

Описывается методика расчета двумерных (плоскопараллельных и обладающих симметрией вращения) магнитных полей с учетом скин-эффекта, основанная <sup>на</sup> замене дифференциального уравнения системой разностных уравнений, связывающих значения векторного потенциала в узлах прямоугольной сетки для двух моментов времени. Для решения разностных уравнений опробовано два итерационных метода: продольно-поперечная итерационная схема и метод верхней релаксации.

Методика иллюстрируется расчетом поля в импульсном магните. Расчет производится для  $\delta$ -образного напряжения. В таком виде результаты счета могут быть простым образом использованы для определения поля при любой зависимости напряжения от времени. Описан метод расчета поля при разряде конденсатора на магнит единичной длины.



## В в е д е н и е

Импульсные магниты, в которых скин-эффект играет существенную роль применяются в различных физических устройствах. Такие магниты, например, используются при получении сверхсильных полей /1/, а при малой величине скин-слоя для формирования в рабочем зазоре нужной геометрии поля /2,3/. Для оптимизации их параметров необходимо иметь эффективный метод расчёта магнитного поля с учетом скин-эффекта.

Наиболее пригодным для расчета квазистационарного поля является уравнение для векторного потенциала. Уравнение теплопроводности для магнитного поля практически непригодно для этой цели ввиду сложных граничных условий /4/. Векторный потенциал использовался для записи интегрального уравнения для вектора электрического поля  $\vec{E}$  /5/ и плотности тока  $\vec{j}$  /6-8/, с последующим решением интегральных уравнений на ЭВМ. В /5/ описан метод решения интегрального уравнения в случае синусоидального напряжения. В принципе этот метод позволяет получить решение задачи для импульсного напряжения путем расчета спектральной функции с последующим её интегрированием. Реальное выполнение подобной процедуры весьма сложно. Для импульсных процессов более удобно разложение поля по собственным функциям, способ определения которых дан в /6-8/.

Эти методы пригодны только для решения линейной задачи, когда  $\mu$  не зависит от величины индукции, а проводимость проводников от температуры. Последнее существенно, например, при получении сверхсильных полей /1/. Желательно поэтому иметь какой-либо прямой метод решения.

Для решения уравнений в частных производных можно использовать разностный метод, который состоит в замене исходного уравнения системой уравнений для значений функции в отдельных точках (узлах) координатной сетки и последующего решения этих уравнений. Этот метод прост и эффективен в реализации и при единообразном подходе применим к различным (линейным и нелинейным) задачам математической физики. По этим причинам разностный метод часто вытесняет уже известные методы расчёта.



В стационарном случае двумерное уравнение в частных производных для векторного потенциала эффективно рассчитывается разностным методом в случае  $\mu = \mu(\beta)$  [9, 10]. Ниже излагается разностный метод расчёта двумерного поля при учете скин-эффекта.

Специальные вопросы теории разностных схем не рассматриваются. Их можно найти в [11-15]. Целью настоящей работы является изучение характерных особенностей метода, обусловленных спецификой задачи и практическое выяснение его возможностей.

### 1. Разностные уравнения

При решении разностным методом задача разбивается на два этапа: нужно построить разностные уравнения и затем найти их решение.

В плоскопараллельном случае отличная от нуля  $y$ -составляющая векторного потенциала  $A(x, z, t)$  должна определяться из уравнения

$$\gamma \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} + \gamma E^r \quad (1)$$

с каким-либо начальным условием, где  $\gamma = \sigma \mu$ . ( $\sigma$  - проводимость среды)  $E^r$  - компонент градиентного электрического поля  $\vec{E}^r = -\nabla \varphi$  вдоль оси  $y$ . Величина  $E^r$  в проводниках постоянна по сечению (ввиду  $\text{rot } \vec{E}^r = 0$ ) и должна согласоваться с решением (1) так, чтобы ток в каждом проводнике имел заданное значение. Если проводники образуют цепь, к концам которой приложено напряжение  $U(t)$ , значения  $E^r$  в проводниках подбираются так, чтобы по каждому из них шел одинаковый ток, а циркуляция  $\vec{E}^r$  по контуру цепи равнялась заданной разности потенциалов на её концах -  $U(t)$ .

Уравнение (1) имеет зависящие от координат коэффициенты  $\gamma$  и  $\mu$ . В этом случае разностные уравнения можно получить с помощью уравнения баланса, записываемого для каждой элементарной ячейки сетки [14]. Возьмем прямоугольную сетку. В нашем случае уравнение баланса совпадает с усредненным по времени в интервале  $t_{l-1}$  до  $t_l$  уравнением закона полного тока через площадку  $S$ , ограниченную пунктирным контуром на рис. 1. При этом для определения векторного потенциала на  $l$ -ом слое по времени -  $A^l$  получаем разностное уравнение

$$-\bar{\gamma} \frac{A^l - A^{l-1}}{\tau_l} + \sigma_l \Lambda A^l + (1 - \sigma_l) \Lambda A^{l-1} + \bar{\gamma} E^{r, l-1/2} = 0 \quad (2)$$

где  $\tau_l$  - шаг по времени,  $\sigma_l$  - вес верхнего слоя  $t = t_l$ .  
В узле  $i, j$

$$\bar{\gamma}_{i,j} = \frac{1}{h_{x,i} h_{z,j} S} \int \gamma(x, z) dx dz$$

$$h_{x,i} = \frac{h_{x,i} + h_{x,i+1}}{2}; \quad h_{z,j} = \frac{h_{z,j} + h_{z,j+1}}{2}$$

$\Lambda$  - разностный оператор, соответствующий дифференциальному в правой части уравнения (1)

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

Оператор  $\Lambda_1$  действует вдоль строк

$$\Lambda_1 A = a_i A_{i-1,j} - (a_i + b_i) A_{i,j} + b_i A_{i+1,j}$$

где

$$a_i = \frac{1}{\mu_{i-1/2} h_{x,i} h_{z,i}}; \quad b_i = \frac{1}{\mu_{i+1/2} h_{x,i} h_{z,i+1}}$$

$\mu_{i \pm 1/2}$  - есть полусумма предельных значений  $\mu$  слева и справа от прямой  $i \pm 1/2$  при  $z = z_j$ . Аналогичный вид имеет оператор  $\Lambda_2$ , действующий вдоль столбцов.

Уравнение (2) и граничные условия, записанные в разностном виде дают систему разностных уравнений для определения  $A^l$ . Для расчета векторного потенциала на  $l$ -ом слое по времени необходимо сохранять в памяти машины значения векторного потенциала на предыдущем слое в области занятой проводником. В остальной области  $\bar{\gamma} = 0$ ,  $\Lambda A^{l-1} = 0$  и запоминание его значений здесь необязательно.



Для построения разностных схем используются также вариационные методы (Ритца, Галёркина) /11,16/.

Запишем (1) в конечных разностях по  $t$ . Для упрощения формул возьмем  $\mu=1$ :

$$\gamma \frac{A^l - A^{l-1}}{\tau_e} = \sigma_e \Delta A^l + (1 - \sigma_e) \Delta A^{l-1} + \gamma E^{r, l-1/2}$$

Для  $A^l$  получим эллиптическое уравнение

$$L A^l = \Delta A^l - q^l A^l = f^{l-1/2} \quad (3)$$

$$q^l = \frac{\gamma}{\sigma_e \tau_e}$$

$$f^{l-1/2} = -\left( q^l A^{l-1} + \frac{1 - \sigma_e}{\sigma_e} \Delta A^{l-1} + \frac{\gamma}{\sigma_e} E^{r, l-1/2} \right)$$

При решении уравнения (3) методом Галёркина искомую функцию представляют в виде /16/:

$$A^l = \sum_{m=1}^{N_k} \alpha_m \varphi_m^h(x, z) \quad (4)$$

где  $\alpha_m$  - постоянные коэффициенты,  $\varphi_m^h$  - набор функций. Их число  $N_k$  и сами функции  $\varphi_m^h$  зависят от  $h$  так, что любую функцию, удовлетворяющую (3), можно с любой точностью аппроксимировать выражением (4), при достаточно малом  $h$ . Коэффициенты  $\alpha_m$  в методе Галёркина находятся из условия ортогональности невязки  $L A^l - f^{l-1/2}$  функциям  $\varphi_m^h(x, z)$

$$\iint_D (L A^l - f^{l-1/2}) \varphi_m^h dx dz = 0 \quad (5)$$

где  $D$  - область определения уравнения (3).

Разобьем прямоугольную сетку на треугольники (рис.2а). В каждом шестиугольнике, содержащем узел  $i, j$  определим функцию  $\varphi_{i,j}^h$  в виде пирамиды, основанием которой является взятый шестиугольник, вершина расположена на перпендикуляре, выходящем из узла  $(i, j)$ , а высота равна единице. Вне шестиугольника  $\varphi_{i,j}^h = 0$ . Такой выбор функций

$\varphi_{i,j}^h$  предложен в /17/. Запишем

$$A^l = \sum_{i,j} A_{i,j}^l \varphi_{i,j}^h(x, z)$$

Это означает, что решение ищется в виде непрерывной функции, которая в узле  $(i, j)$  равна  $A_{i,j}^l$ , а в каждом треугольнике линейна по  $x, z$ .

Будем считать для простоты, что коэффициент  $\gamma$  в каждом прямоугольнике исходной прямоугольной сетки имеет постоянное значение. Из (5) получим, что в узле  $(i, j)$

$$\sum_{m=0}^6 C_m \frac{A^l(Q_m) - A^{l-1}(Q_m)}{\tau_e} = \sigma_e \lambda A^l + (1 - \sigma_e) \lambda A^{l-1} + \frac{2\delta_2 + \delta_2 + \delta_3 + 2\delta_4}{6} E^{r, l-1/2} \quad (6)$$



В этом уравнении оператор  $\Delta$  имеет тот же вид, что и в (2),  $Q_m$  при  $m=0, 1, \dots, 6$  обозначают соответственно узлы  $(i, j)$ ,  $(i-1, j)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $(i+1, j+1)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i, j-1)$ ,

$(i-1, j-1)$  и

$$C_0 = \frac{2\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + 2\delta_4}{12};$$

$$C_1 = \frac{\delta_1 + \delta_3}{24}; \quad C_2 = \frac{\delta_3 + \delta_4}{24}; \quad C_3 = \frac{\delta_4}{12};$$

$$C_4 = \frac{\delta_2 + \delta_4}{24}; \quad C_5 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{24}; \quad C_6 = \frac{\delta_1}{12};$$

$$\gamma_n = \frac{1}{h_{x,i} h_{z,j} D_n} \iint \gamma(x, z) dx dz$$

$D_n$  - прямоугольные области вокруг узла  $(i, j)$  (рис. 26). Как видно, это разностное уравнение имеет более сложный вид, чем уравнение (2).

При построении разностных уравнений вариационными методами вид этих уравнений существенно зависит от выбора функций  $\varphi_{i,j}^k$ . Обычно эти функции выбирают так, как это сделано выше.

Расчёты, проведённые в ряде конкретных случаев показывают, что разностные уравнения (6) не дают каких-либо преимуществ в точности по сравнению с (2), а способ их построения и численная реализация сложнее. Поэтому более предпочтителен метод баланса. Сложный вид (6) связан с законом аппроксимации величины  $q^l A^l$  в (3). В узле  $P$  сетки в данном случае имеем

$$q^l A^l \approx \sum_Q C(Q, P) A^l(Q)$$

где суммирование по  $Q$  включает

узел  $P$  и соседние с  $P$  узлы. Уравнение (6) приводится к виду (2) (с несущественными отличиями), если сделать замену

$$\sum_Q C(Q, P) A^l(Q) \rightarrow A^l(P) \sum_Q C(Q, P) \quad (7)$$

Расчёты показывают, что от такой замены точность схемы не ухудшается (см. также /18/).

Важно отметить, что точность расчётов существенно выше, если точки пересечения линий сетки с границами областей, в которых характеристики среды существенно отличаются (контур магнитопровода, границы проводника), совпадают с её узлами. В противном случае положение границ учитывается разностной схемой приближенно, границы "размазываются", поэтому для обеспечения нужной точности может потребоваться слишком большое количество узлов. Это устраняют построением специальных сеток /9/. При использовании прямоугольной сетки нужного совпадения можно добиться чаще всего лишь при сильной её неравномерности, что само по себе уменьшает точность расчёта.

Укажем простой способ построения четырёхугольной сетки, лишенной этого недостатка.

Построим в области, где имеется криволинейная граница прямоугольную сетку (рис. 3а). Деформируем её следующим образом. Найдём точки пересечения горизонтальных линий с криволинейной границей и перенесём ближайший к точке пересечения узел на горизонтальной линии в эту точку. При этом часть вертикальных линий деформируется, горизонтальные линии останутся без изменения (рис. 3б). Далее на вертикальных линиях, оставшихся без изменения и пересекающих границу найдём ближайший к точке пересечения узел и также перенесём его в точ-



ку пересечения. Это приводит к деформации части горизонтальных линий. В результате этой процедуры линии исходной прямоугольной сетки деформируются на некоторых участках, но не более чем на пол-шага, а точки пересечения линий сетки с границей будут её узлами. Участки границы между такими узлами заменим отрезками прямых и триангулируем область диагоналями четырёхугольников так, чтобы диагонали не пересекали границу (рис.3в).

Примем, что в каждом треугольнике коэффициенты в уравнении (1) имеют постоянное значение, искомая функция линейно зависит от  $x, z$  и в узлах сетки принимает значения  $A_{i,j}$ . Разностные уравнения в этом случае можно записать с помощью метода Рунда (при этом матрица разностных уравнений получается симметричной), используя затем замену (7), или же при помощи уравнения баланса.

Образуем вокруг узла  $(i, j)$  область  $D_{i,j}$  (заштрихована на рис.4), границу которой  $\Gamma_{i,j}$  зададим следующим образом. Если одна из проходящих через узел  $i, j$  сторон треугольника образована диагональю четырёхугольника, включим в область  $D_{i,j}$  малый треугольник  $T$  так, чтобы граница проходила по средней линии, лежащей против узла  $(i, j)$ . Если обе стороны треугольника являются линиями исходной сетки, включим в область

$D_{i,j}$  четырёхугольник  $R$  так, чтобы граница  $\Gamma_{i,j}$  проходила по двум средним линиям треугольника (рис.4). Образованные таким образом области  $D_{i,j}$  покрывают область определения уравнения (1). Проинтегрируем уравнение (1) по области  $D_{i,j}$

$$\iint_{D_{i,j}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} + \gamma \left( E^r - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \right] dx dz =$$

$$= - \oint_{\Gamma_{i,j}} (\vec{H} \cdot d\vec{\Gamma}) + \iint_{D_{i,j}} \gamma \left( E^r - \frac{\partial A}{\partial t} \right) dx dz = 0$$

Второй интеграл в последнем равенстве заменим приближенный величиной

$$\iint_{D_{i,j}} \gamma \left( E^r - \frac{\partial A}{\partial t} \right) dx dz = \bar{\gamma}_{i,j} S_{i,j} \left( E^r - \frac{\partial A_{i,j}}{\partial t} \right)$$

где

$$\bar{\gamma}_{i,j} = \frac{1}{S_{i,j}} \iint_{D_{i,j}} \gamma(x, z) dx dz$$

$S_{i,j}$  - площадь области  $D_{i,j}$ . Если теперь вычислить  $\vec{H}$  из принятой выше аппроксимации для  $A$ , разностное уравнение в узле  $(i, j)$  получится из

$$\bar{\gamma}_{i,j} \frac{\partial A_{i,j}}{\partial t} = - \frac{\mu_0}{S_{i,j}} \oint_{\Gamma_{i,j}} (\vec{H} \cdot d\vec{\Gamma}) + \bar{\gamma}_{i,j} E^r \quad (8)$$

после записи этого уравнения в конечных разностях по  $t$ . Описанный способ прост в реализации. Простым образом осуществляется деформация исходной прямоугольной сетки. Границы областей в целочисленных координатах  $i, j$ , от которых зависят коэффициенты разностных уравнений, имеют простой вид (рис.3г). Разностные уравнения в узлах не подвергнутой деформации части сетки имеют обычный пятиточечный вид (2), и коэффициенты их могут быть вычислены заранее (например,  $a_i, b_i$ , образующие одномерные массивы и не требующие большого объема памяти ЭВМ). Только в относительно небольшом количестве узлов, лежащих на границе областей и вблизи её, разностные уравнения нужно строить по общей формуле (8). Впрочем, способ их получения также достаточно прост. Например, на участке границы  $D_{i,j}$  -  $\Gamma(T)$ , проходящей по средней линии треугольника с вершинами в точках  $(X_0, Z_0), (X_1, Z_1), (X_2, Z_2)$ , будет

$$- \oint_{\Gamma(T)} (\vec{H} \cdot d\vec{\Gamma}) = \frac{1}{\mu(T)} \cdot \frac{-(\vec{r}_3 \cdot \vec{r}_3) A_0 + (\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3) A_1 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3) A_2}{2 \cdot [\vec{r}_1 \times \vec{r}_2]_y} \quad (9)$$



где  $\vec{r}_1 = (x_1 - x_0, z_1 - z_0)$ ,  $\vec{r}_2 = (x_2 - x_0, z_2 - z_0)$ ,  $\vec{r}_3 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ,  
 $\mathcal{M}(T)$  - значение величины  $\mathcal{M}$  в треугольнике  $T$ . Пло-  
 щадь треугольника  $T$  можно вычислить по формуле

$$s(T) = |[\vec{r}_1 \times \vec{r}_2]| / 8.$$

Заметим, что формула (9) справедлива также для участка гра-  
 ницы, проходящей по сторонам четырёхугольника  $R$ .

## 2. Граничные условия

В задачах по расчёту магнитных полей чаще всего встре-  
 чаются два типа граничных условий:

$$1) \quad A|_r = f(z, t) \quad r - \text{точка границы}$$

$$2) \quad \frac{\partial A}{\partial n}|_r = 0$$

Если узлы сетки лежат на границе, первое граничное ус-  
 ловие учитывается естественным образом: в лежащем на гра-  
 нице узле  $A_{i,j}$  полагается равным граничному значению.

Второе граничное условие просто учитывается, если уча-  
 сток границы, на котором оно задается, является прямой линией.  
 Если направить, например, прямую  $z=0$  по этой линии и рас-  
 положить узлы на прямых  $z = -h, 0, h$ , то второе граничное  
 условие можно заменить соотношением

$$A(x, -h) = A(x, h)$$

Можно также расположить узлы на прямых  $z = -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}$  и  
 считать

$$A(x, -\frac{h}{2}) = A(x, \frac{h}{2}) \quad (10)$$

Случай криволинейной границы рассмотрен в /11/.

Если узлы сетки расположены на границе (как, например,  
 на рис. 3г) разностные уравнения соответствующие условию 2)  
 можно получить следующим образом. Продолжим сетку за  
 границу области на один шаг и запишем разностные уравнения  
 в граничных узлах обычным образом, предполагая, что в сосед-  
 ней области относительная магнитная проницаемость  $\mathcal{M}$  имеет  
 некоторое конечное значение. Тогда разностные уравнения в  
 граничных узлах получатся предельным переходом  $\mathcal{M} \rightarrow \infty$ .

## 3. Итерационные методы

Для обеспечения нужной точности в типичных задачах  
 по расчёту двумерного поля в магнитах требуется сетка с чис-  
 лом узлов  $\sim 10^3$ , т.е. система разностных уравнений имеет вы-  
 сокий порядок. Решение таких систем осуществляют итера-  
 ционными методами (методами последовательных приближе-  
 ний). Опишем здесь два наиболее "популярных" и простых в  
 реализации. Один из итерационных методов для уравнения Пуас-  
 сона заключается в интегрировании по времени уравнения теп-  
 лопроводности

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + \rho \quad (11)$$

вплоть до выхода решения на стационарный режим, когда

$\partial \psi / \partial t = 0$  /14/. В нашем случае пригоден тот же прием. Для  
 определения  $A^l$  в (2) можно использовать продольно-поперечную  
 итерационную схему

$$A^{l, j+\frac{1}{2}} + \mu \tau^{(3)} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_e \tau_e} A^{l, j+\frac{1}{2}} - \lambda_1 A^{l, j+\frac{1}{2}} \right) = F^j$$

$$A^{l, j+1} + \mu \tau^{(3)} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_e \tau_e} A^{l, j+1} - \lambda_2 A^{l, j+1} \right) = F^{j+\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$F^j = A^{l, j} + \mu \tau^{(3)} (\lambda_2 A^{l, j} + f^l)$$

$$F^{j+\frac{1}{2}} = A^{l, j+\frac{1}{2}} + \mu \tau^{(3)} (\lambda_1 A^{l, j+\frac{1}{2}} + f^l)$$



$$f^l = \begin{cases} \frac{\bar{y}}{\sigma_e \tau_e} A^l + \frac{1-\sigma_e}{\sigma_e} \Lambda A^{l-1} + \frac{\bar{y} E^{r, l-\frac{1}{2}}}{\sigma_e} & \text{если } \bar{y} \neq 0 \\ 0 & \text{если } \bar{y} = 0 \end{cases}$$

В этих уравнениях  $j$  - номер итерации. Для нахождения  $A^{l, j+1/2}$  применяется прогонка по строкам, для  $A^{l, j}$  - по столбцам. Множитель при итерационном параметре  $\tau^{(j)}$  следует взять равным относительной магнитной проницаемости в данном узле сетки. По существу это означает, что в области занятой железом будет рассчитываться уравнение типа (11) ( $\rho=0$ ). Отсутствие этого множителя дало бы уравнение

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi$$

Введение множителя  $\mu$  в итерационную схему делает одинаковым процесс распространения сигнала в области занятой железом и вне его (где  $\mu=1$ ). Этот прием как, показывают расчеты, значительно уменьшает необходимое число итераций.

Для ускорения процесса сходимости желательно использовать циклический набор параметров  $\tau^{(j)}$ , который можно определить тем же образом, что и для задачи Дирихле в квадрате со стороной  $b$  и с квадратной сеткой с шагом  $h$ . В последнем случае проводится  $k_0$  циклов с набором параметров  $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(n)}$ , полагая /15/

$$\tau^{kn+s} = \tau^{(s)}; \quad k=1, 2, \dots, k_0-1, \quad 1 \leq s \leq n$$

$$\tau^{(1)} = m \tau^{\max}; \quad \tau^{\max} = \frac{b^2}{\pi^2}; \quad m=0,4 \quad (13)$$

$$\tau^{(s+1)} = q \tau^{(s)}; \quad s=1, 2, \dots, n-1; \quad q=0,16$$

$$\frac{\ln \eta}{\ln q} - 1 < n \leq \frac{\ln \eta}{\ln q}$$

$$\eta = \frac{\tau^{\min}}{\tau^{\max}}; \quad \tau^{\min} = \frac{h^2}{4}$$

Практические вычисления показывают, что этот итерационный метод уверенно сходится и может быть использован для расчета задачи (2). Для уменьшения числа итераций величину  $b$  в формуле для  $\tau^{\max}$  желательно оптимизировать, опробовав несколько значений  $b$  (которые должны быть порядка размера системы) в предварительных расчетах.

Эффективным и простым в реализации оказывается также метод верхней релаксации /11/. Формула, связывающая два последовательных значения  $A_{i,j}^{l,s}$  и  $A_{i,j}^{l,s+1}$ , в методе верхней релаксации имеет вид

$$A_{i,j}^{l,s+1} = A_{i,j}^{l,s} + \delta_{i,j}$$

$$\delta_{i,j} = -\omega \cdot f_{i,j} / \left( \frac{\partial f_{i,j}}{\partial A_{i,j}} \right)$$

где  $f_{i,j}$  - невязка, формула для которой совпадает с левой частью уравнения (2),  $\omega$  - параметр сверхрелаксации. Невязка вычисляется по тем значениям векторного потенциала в узлах сетки, которые сложились к моменту вычисления поправки. Последние осуществляются



последовательно по строкам или столбцам. Отметим, что метод верхней релаксации можно использовать в нелинейных задачах. Оптимальное значение параметра  $\omega$  вычисляется известными методами [11]. Если требуется решить задачу без всякого вычисления, то обычно принимают  $\omega = 1,8 - 1,9$ .

#### 4. Пример расчета

Ниже изложен пример расчета поля в импульсном безжелезном магните, формирующем однородное поле. Принято, что относительная магнитная проницаемость среды зависит только от координат, т.е. рассматривается линейная задача.

##### О численном счёте

Четверть сечения безжелезного магнита показана на рис.5, где за единицу расстояния по осям  $x, z$  взят размер апертуры. Как видно, рассматривается относительно простой вариант конфигурации шин и полюса железа, характеризующийся параметрами  $H, R$ . Параметр  $R$  выбран так, чтобы индукция у полюса была примерно в 6 раз меньше её величины в центре апертуры, с тем, чтобы при индукции в центре  $\sim 10$  Тесла не было насыщения железа. Размер апертуры  $a$  взят равным 2 см, проводимость металла шины  $5,9 \cdot 10^7 \text{ ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$  (проводимость меди). Результаты расчетов могут быть перенесены на другие значения проводимости и апертуры посредством преобразования подобия для уравнения теплопроводности. Длина магнита  $L$  полагается равной 1 м.

Значение относительной магнитной проницаемости железа магнитопровода  $\mu$  было взято равным 100.

Считаем, что длина магнита вдоль оси  $y$  много больше его поперечного размера. Требуется найти решение уравнения (1), в котором коэффициент  $\gamma = a^2 \mu$  имеет постоянное значение в области проводника и равен нулю в остальной области. Величина  $E^r$  одинакова по сечению шины (ввиду  $\text{rot } E^r = 0$ ). Циркуляция этого вектора по контуру витка, образованному шиной равна разности потенциалов на выводах шин, т.е. приложенному

напряжению  $u(t)$ . Ввиду симметрии величина  $E^r$  в обеих шинах одна и та же по абсолютной величине и отличается знаком. Примем, что напряжение  $u(t)$  приложено к правой шине относительно левой. Тогда в правой шине

$$E^r = \frac{u(t)}{2L}$$

Уравнение (1) с таким значением  $E^r$  рассчитывалось разностным методом в прямоугольной области, показанной на рис.5 с начальным условием

$$A|_{t=0} = 0$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial A}{\partial z} \Big|_{\Gamma_1} = 0 ; \quad A \Big|_{\Gamma_2} = 0$$

Тип используемой сетки ясен из рис.5, где изображена редкая сетка с числом узлов равным  $19 \times 22$  (первая цифра означает число шагов по горизонтали, вторая — по вертикали). Сетка строилась так, чтобы точки пересечения линий сетки с контуром проводника были её узлами. Такой тип сетки обеспечивает лучшую точность. В левом нижнем углу сетка равномерна по каждому направлению. По оси  $x$  сетка равномерна до  $x = 0,75$  с заданным шагом  $h$ , по оси  $z$  до  $z = H$  с примерно тем же шагом. Затем по обоим направлениям каждый следующий шаг сетки возрастает примерно на 10% по сравнению с предыдущим. Коэффициент возрастания шага подбирался так, чтобы линия  $x = R$  совпадала с линией сетки. Для упрощения программы контур полюса железа отличался от заданного (показан штрихом), но не более чем на пол-шага.

Значения векторного потенциала в узлах сетки определялись из (2). Граничное условие на прямой  $z = 0$  учитывалось по формуле (10).



Решение разностных уравнений на каждом слое по времени получалось методом итераций. В расчётах использовалась продольно-поперечная итерационная схема (12). Величина  $\delta$  формуле для  $\tau_{max}$  полагалась равной поперечному размеру магнитопровода ДЕ (в единицах апертуры  $\delta = 3$ ). После каждого итерационного цикла с набором параметров (13) вычислялось максимальное отклонение расчетных значений поля на отрезках ОВ, ОС, ДЕ от его значений после предыдущего итерационного цикла  $\frac{\delta H}{H}$ . Счет по схеме (5) прекращался при условии  $\frac{\delta H}{H} \leq 10^{-5}$ .

В случае линейной задачи, которая здесь рассматривается ( $\mu$  не зависит от величины индукции, а проводимость проводника - от температуры), достаточно рассчитать поле для  $\delta$ -образной или ступенчатой зависимости напряжения от времени. В таком виде результаты расчетов универсальны, т.к. могут быть простым образом использованы для определения поля при любом заданном напряжении или же для определения поля и напряжения при заданном токе в цепи. Ниже рассматривается случай  $\delta$ -образного напряжения. Здесь любая линейная комбинация векторного потенциала и его производных  $\mathcal{B}$  для произвольной зависимости  $u = u(t)$  даётся формулой

$$\mathcal{B}(t) = \int_0^t \beta_0(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (14)$$

где  $\beta_0$  - тоже линейная комбинация для  $\delta$ -образного напряжения.

В нулевой момент времени ( $\ell = 0$ ) поле рассчитывалось в электростатическом приближении (бесконечно-тонкий скин-слой). Для расчета использовалась схема (12), в которой  $\sigma_0 = 0,5$ ,  $\tau_0 = 10^{-8}$  сек,  $f^0 = f / (2\pi\sigma_0\tau_0)$ ,  $A^{01} = 0$ . Получающиеся расчетные значения векторного потенциала  $A^0$  соответствуют полю, возникшему при нулевом начальном условии под действием прямоугольного импульса напряжения с основанием  $\tau_0$  и площадью прямоугольника равной 1. Параметр  $\tau_0$  достаточно мал, чтобы считать этот импульс  $\delta$ -образным.

При  $\ell \geq 1$  расчетные значения векторного потенциала описывают процесс релаксации поля. Здесь напряжение в форму-

лах полагалось равным нулю, первое приближение  $A^{01}$  равным  $A^{\ell-1}$ , параметры  $\tau_\ell, \sigma_\ell$  зависели от  $\ell$ . Т.к. при релаксации наиболее сильно изменение поля во времени при малых  $t$ , шаг по времени вначале был мелким и по мере возрастания  $\ell$  - увеличивался. Закон изменения  $\tau_\ell, \sigma_\ell$  в зависимости от номера  $\ell$  подбирался из следующих соображений. Релаксация поля в апертуре идет по закону

$$B(t) \approx B^0 \frac{a}{a + 2\delta(t)} \approx B^0 \left(1 - \frac{2\delta(t)}{a}\right)$$

где  $B^0$  - индукция в центре в нулевой момент времени,  $\delta$  - величина скин-слоя. Т.к.  $\delta \sim \sqrt{t}$ , выгодно при записи уравнения баланса проводить интегрирование не по координате  $t$ , а по координате  $\theta = \sqrt{t/T}$ ,  $T$  - момент времени, до которого производится интегрирование. Зависимость поля от  $\theta$  при малых  $\theta$  близка к линейной, и при интегрировании по этой координате можно получить более высокую точность. Действительно, выражение  $\sigma_\ell \wedge A^\ell + (1 - \sigma_\ell) \wedge A^{\ell-1}$  в уравнении (2) есть аппроксимация интеграла

$$\frac{1}{\tau_\ell} \int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \wedge A dt = \frac{1}{\tau_\ell} \int_{\theta_{\ell-1}}^{\theta_\ell} \wedge A \cdot 2T \cdot \theta d\theta$$

Т.к.  $\wedge A \approx \gamma \frac{\partial A}{\partial t}$ , а в области скин-слоя  $\frac{\partial A}{\partial t} \sim t^{-\frac{1}{2}} \sim 1/\theta$  подинтегральное выражение в интеграле справа слабо зависит от  $\theta$ . Аппроксимируем интеграл по формуле трапеций

$$\frac{1}{\tau_\ell} \int_{\theta_{\ell-1}}^{\theta_\ell} \wedge A \cdot 2T \theta d\theta \approx \frac{T(\theta_\ell - \theta_{\ell-1})}{\tau_\ell} (\wedge A^\ell_{\theta_\ell} + \wedge A^{\ell-1}_{\theta_{\ell-1}})$$



Т.к.  $\theta_l - \theta_{l-1} = \frac{\tau_l}{T(\theta_l + \theta_{l-1})}$ , это выражение пере-  
ищется в виде

$$\sigma_l \Lambda A^l + (1 - \sigma_l) \Lambda A^{l-1}$$

где  $\sigma_l = \theta_l / (\theta_l + \theta_{l-1})$ . В расчетах  $T$  было равно 5 мсек,  
шаг по координате  $\theta$  был взят равномерным, при этом ( $l > 1$ )

$$\theta_l = \frac{l}{N} \quad t_l = T \cdot \theta_l^2$$

$$\tau_l = \frac{T(2l-1)}{N^2} \quad \sigma_l = \frac{l}{2l-1}$$

$N$  — число шагов по координате  $\theta$ . При любом  $l \geq 1, \sigma > \frac{1}{2}$ ,  
что необходимо для устойчивости схемы.

В процессе расчетов путем увеличения числа узлов сетки  
и увеличения  $N$  было выяснено, что описанная выше разностная  
задача устойчива и сходится.

#### Точность расчетов и некоторые результаты

Ошибки расчета обусловлены как дискретизацией задачи  
по пространственным переменным и времени, так и приближен-  
ным решением разностных уравнений. Условие  $\frac{2N}{h} \gg 1$  обеспечивает  
достаточное число итераций, чтобы пренебречь ошибкой послед-  
него типа. Ошибка, обусловленная конечной величиной шага по  
времени зависит от номера  $l$ . В таблице 1 приведены расчет-  
ные значения индукции в центре апертуры, полученные при раз-  
личных  $N$  на сетке  $31 \times 36$ ,  $h = \frac{0,5}{8}$ .

Таблица 1

$\theta$	$N$	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000
2	49,85	$l=0$	-	-	-	$l=1$ 35,01	-	-	-	$l=2$ 22,18
		$l=0$	-	-	-	$l=2$ 32,69	-	-	-	$l=4$ 22,235
		$l=0$	-	$l=1$ 41,58	-	-	$l=3$ 27,22	-	-	$l=8$ 22,244
4	49,85	$l=0$	-	-	-	$l=4$ 32,73	$l=5$ 29,72	$l=5$ 26,93	$l=7$ 24,49	$l=8$ 22,244
		$l=0$	-	-	-	$l=3$ 36,32	-	-	-	-
		$l=0$	-	$l=2$ 40,18	-	-	$l=5$ 29,72	$l=5$ 26,93	$l=7$ 24,49	$l=8$ 22,244
8	49,85	$l=0$	$l=1$ 45,86	-	-	$l=4$ 32,73	$l=5$ 29,72	$l=5$ 26,93	$l=7$ 24,49	$l=8$ 22,244
		$l=0$	-	-	-	$l=3$ 36,32	-	-	-	-
		$l=0$	-	$l=2$ 40,18	-	-	$l=5$ 29,72	$l=5$ 26,93	$l=7$ 24,49	$l=8$ 22,244



Сравнение результатов показывает, что при четном  $l$  ( $\theta = 0,5$  при  $N=4; 8$  и  $\theta=1$  при  $N=2; 4; 8$ ) погрешность вычислений значительно меньше, чем при нечетном  $l$ . Поэтому число шагов  $N$  задавалось четным, а нужные величины запоминались и выводились на печать при четных  $l$ .

В таблице II приведены некоторые расчетные значения параметров поля на сетке  $42 \times 47$ ,  $h = \frac{0,5}{12}$ , когда  $N=10$ .

В этой таблице  $\delta$  - величина скин-слоя, которая рассчитывалась также как и шины с бесконечной толщиной

$$\delta = \Phi(t) / B(t)$$

где  $\Phi(t) = \int_0^t E' dt - A_n(t)$  - поток индукции в шине к моменту  $t$ ,  $A_n(t)$ ,  $B(t)$  - величины векторного потенциала и индукции на поверхности шины (в точке  $x = 0,5$ ,  $z = 0$ ),  $B_0$  - индукция в центре апертуры,  $I$  - ток в шинах (удвоенное значение интеграла от поля на отрезке  $OB$ ),  $F$  - погонная сила действующая на шины (удвоенное значение интеграла от  $\frac{B^2}{2\mu_0}$  на том же отрезке) в пересчете на  $B_0 = 10$  Тесла,  $\epsilon_x, \epsilon_z$  - неоднородность поля по горизонтали и вертикали (рис. 6)

$$\epsilon_x(x) = \frac{B_z(x,0) - B_0}{B_0} \cdot 100\%$$

$$\epsilon_z(z) = \frac{B_z(0,z) - B_0}{B_0} \cdot 100\%$$

Погрешность вычислений для данных таблицы II обусловлена в основном дискретизацией задачи по пространственным переменным. Величина этой погрешности определялась сравнением результатов таблицы II с результатами расчетов на сетках  $31 \times 36$ ,  $h = \frac{0,5}{8}$  и  $19 \times 22$ ,  $h = \frac{0,5}{4}$  (последняя показана на рис. 5), имеющих большую величину  $h$ . При этом было получено, что максимальная ошибка в определении уровня поля -  $B_0$  и тока -

Таблица II

$\theta$	$t$ мксек.	$\delta$ мм	$B_0$ тесла	$I$ ка	$\epsilon_x(0,5)$ %	$\epsilon_z(0,5)$ %	$F$ г/см $B_0 = 10$ тесла	$A_n$ вебер
0	0	0	49,85	2650	0,201	-1,00	2,06	0,5
0,2	200	1,9	41,87	2205	0,753	-2,30	1,99	0,4201
0,4	800	4,0	35,43	1862	1,92	-3,94	1,94	0,3569
0,6	1800	6,2	30,23	1591	3,83	-5,50	1,92	0,3066
0,8	3200	8,6	25,90	1372	5,73	-6,55	1,91	0,2641
1,0	5000	11,5	22,24	1190	6,82	-7,01	1,93	0,2275



$-I^{(x)}$  меньше 0,4%. Максимальная погрешность величин  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$ , характеризующих распределение поля, порядка 1%.

Ошибка, обусловленная конечной величиной шага по  $\theta$ , для данных таблицы II примерно в 5 - 10 раз меньше. В данном случае минимальное значение  $N$  определяется в основном погрешностью аппроксимации расчетных значений векторного потенциала при  $\delta$ -образном напряжении на другие значения  $t$ . Это требуется для определения поля по формуле (14) при произвольной зависимости напряжения от времени. Для улучшения точности аппроксимацию полиномами следует проводить по координате  $\theta$ , а не  $t$ . При этом, как показывает расчет поля при разряде конденсатора (см. ниже), величина  $N=10$  достаточна для того, чтобы ошибка аппроксимации была меньше указанных выше ошибок расчета.

Важной характеристикой безжелезного магнита является величина энергии, необходимая для получения заданного уровня поля в апертуре при определенном времени его нарастания. Импульсные магниты обычно питаются от конденсаторной батареи. Опишем метод расчета разряда конденсатора на магнит длиной в 1 м. При известном решении для  $\delta$ -образного напряжения этот расчет проводится простым образом. Ток в цепи выражается посредством интеграла (14)

$$I(t) = \int_0^t u(\tau) I^{(0)}(t-\tau) d\tau \quad (15)$$

где  $I^{(0)}(t)$  - ток для  $\delta$ -образного напряжения,  $u(t)$  - напряжение на конденсаторе. Запишем также

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{1}{C} I(t) \quad (16)$$

где  $C$  - емкость конденсатора.

ж) Удвоенное значение интеграла поля на отрезке ОВ даёт заниженное, примерно на 0,3%, значение тока ввиду неполного контура интегрирования. Приводимая в тексте точность относится на самом деле в этому интегралу, а не к току.

Разобьем интервал интегрирования в (15) на равные отрезки длиной  $\tau$ . Значениям функций в момент  $t = m\tau$  будем приписывать индекс  $m$ . Интеграл в уравнении (15) запишем по формуле трапеций, уравнение (16) запишем в разностном виде

$$I_m = S_{m-1} + \frac{\tau I_0^{(0)} u_m}{2} \quad (17)$$

$$S_{m-1} = \tau \left( \frac{I_m^{(0)} u_0}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} u_i I_{m-i}^{(0)} \right)$$

$$\frac{u_m - u_{m-1}}{\tau} = -\frac{1}{C} \frac{I_m + I_{m-1}}{2}$$

Сумму в выражении для  $S_{m-1}$  при  $m=1$  следует положить равной нулю. Исключая из этих уравнений  $I_m$ , получим

$$u_m = \frac{u_{m-1} - \frac{\tau}{2C} (I_{m-1} + S_{m-1})}{1 + \frac{\tau^2}{4C} I_0^{(0)}} \quad (18)$$

Полагая  $I_0 = 0$ ,  $u_0 = u(0)$ , по рекуррентным формулам (17), (18) можно найти  $I_m, u_m$ , после чего любая линейная комбинация векторного потенциала и его производных определяется по формуле (14).

В таблице III приведены результаты расчетов, где  $t_\varphi$  - заданное время нарастания поля от нуля до  $B_{max} = 10$  Тесла,  $C, u_0, W$  - величины емкости, начального напряжения и энергии в конденсаторе ( $C u_0^2 / 2$ ), необходимые для этого. Остальные параметры имеют тот же смысл, что и в таблице II. Их значения соответствуют моменту времени  $t = t_\varphi$ . На рис. 7 приведены графики напряжения и тока в цепи, пронормированные на их максимальные значения, когда  $t_\varphi = 5$  мсек. Для расчетов использовались данные таблицы II.



Таблица III

$t_{\varphi}$	$C_{\varphi}$	$U_0/\beta$	$W_{\text{кдж}}$	$\delta_{\text{мм}}$	$I_{\text{ка}}$	$\epsilon_x(0,5)\%$	$\epsilon_z(0,5)\%$
200	$4,2 \cdot 10^{-2}$	1736	64,0	1,4	527,5	0,582	- 1,97
800	$6,7 \cdot 10^{-1}$	477	76,3	2,9	526,0	1,29	- 3,12
1800	3,3	232	90,3	4,4	525,8	2,38	- 4,24
3200	10,5	142	106	5,9	526,8	3,64	- 5,17
5000	25,5	98,9	125	7,6	529,0	4,70	- 5,80

Величина действующей на шины силы не может быть определена по формуле (14). Для её определения нужно было бы запоминать распределение поля на отрезке ОВ для различных  $\theta$  в  $\delta$ -образном импульсе. Как видно из таблицы II, изменение силы в зависимости от величины скин-слоя, связанное с изменением геометрии поля в зазоре (рис.5), мало, и для таблицы III можно принять  $f \approx 2$  т/см. Более точное значение можно получить, если какому-либо значению скин-слоя в таблице III ставить в соответствие величину силы из таблицы II при том же скин-слое. Такой прием может быть использован и для определения других параметров. Пока величина скин-слоя мала по сравнению с апертурой, параметры поля для различных  $u(t)$  при одной и той же величине скин-слоя отличаются мало (рис.8). Величину же скин-слоя для данного  $u(t)$  легко можно оценить.

Все описанные выше расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6. Программа была написана на языке системы "Альфа" /19/. Время расчета данных таблицы II составляет 6 минут.

### 5. Обсуждение

Проведенные расчеты показали, что в квазистационарном случае решение уравнения для векторного потенциала методом сеток сводится к простой и эффективной схеме расчета. В применении к безжелезным магнитам это позволяет использовать его для численного поиска оптимальной геометрии шин и магнитопровода.

Метод может быть применен также для расчета нелинейной задачи. Здесь в итерационной схеме метода верхней релаксации нужно учитывать зависимость  $\mu$  от  $B$ . В этом случае число арифметических действий для проведения одной поправки существенно больше. Поэтому расчет такой задачи, если требуемая точность высока, может быть проведен на ЭВМ достаточно высокого класса.

В случае двумерной задачи в области с везде отличной от нуля проводимостью или в случае одномерной задачи пригодны безитерационные методы расчета. В одномерной задаче ме-



тод прогонки, в двумерной - метод переменных направлений. В этих случаях применение разностного метода особенно эффективно.

Выше рассматривался случай симметрично расположенных проводников. Для заданного  $U(t)$  величина  $E^r$  в каждом проводнике известна. Для несимметрично расположенных проводников, так же как и в случае многовитковой системы, величина  $E^r$  в каждом проводнике должна определяться в ходе расчёта. Постановка задачи для этих случаев дана в /4/.

Отметим, что предварительное решение задачи для  $\delta$ -образного импульса даёт универсальную характеристику системы проводников и значительно сокращает затраты машинного времени. Расчёт для произвольного  $U(t)$  осуществляется затем простым образом. Кроме того, как показывают расчёты поля в магните при разряде ёмкости (для элементов с простой геометрией этот процесс можно рассчитать точно /20/), это решение позволяет достаточно просто согласовать в расчётах рассматриваемую систему с различными нагрузками на её концах.

Описанная в работе методика использовалась для анализа поля в безжелезных магнитах различных типов. Результаты будут опубликованы дополнительно.

Приношу благодарность Б.В.Чирикову и Ю.А.Кузнецову за полезные обсуждения и В.Л.Ауслейдеру за предложенную тему.

## Л и т е р а т у р а

1. Г.Кнопфель. Сверхсильные импульсные магнитные поля. "Мир", 1972.
2. Т.А.Всеволожская и др. ПТЭ, 1968, № 6, 32.
3. Т.А.Всеволожская и др. Атомная энергия, 20, 210 (1967).
4. В.И.Юрченко. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 82-73, (1973).
5. О.В.Тозони. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. "Техника", 1967.
6. Э.В.Колесников, Д.Д.Саввин. Известия ВУЗ'ов, Электромеханика, № 8, 1968.
7. Э.В.Колесников. Известия ВУЗ'ов, Электромеханика, № 12, 1970.
8. Э.В.Колесников. Известия ВУЗ'ов, Электромеханика, № 1, 1971.
9. Л.Резеготти. Труды второго всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц (1970г.), т.1, стр. 133, Москва, 1972г.
10. Н.И.Дойников, А.С.Симаков. ЖТФ, XXXIX, 1463, 1969.
11. В.Вазов, Дж.Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, Москва, 1963 г.
12. Гавури М.К. Лекции по методам вычислений. "Наука", М., 1967.
13. Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. ФМ, М., 1962.
14. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. "Наука", 1966.
15. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. "Наука", 1971.
16. С.Г.Михлин. Вариационные методы в математической физике. "Наука", М., 1970.



17. R. Courant. *Bull. Amer. Math. Soc.*,  
 49, 1-23, 1943

18. Дьяконов Е.Г. О некоторых методах решения систем уравнений разностных и проекционно-разностных схем. Сб. "Вычислительные методы линейной алгебры" ВЦ Сибирского отделения АН СССР, Новосибирск, стр. 28-58, 1972.

19. А.П.Ершов, Г.И.Кожухин, Н.В.Поттосин. Руководство к использованию системой Альфа. Новосибирск, "Наука", Сиб.отделение, 1968.

20. В.И.Юрченко. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 89-73, 1973.

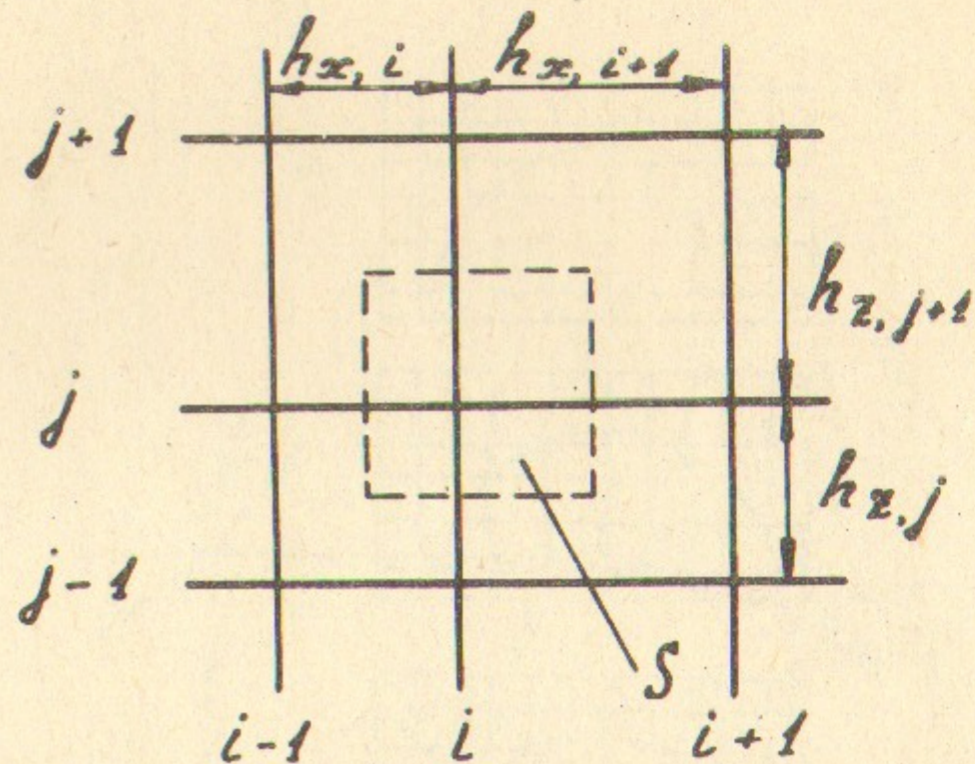


Рис. 1.  $\delta$

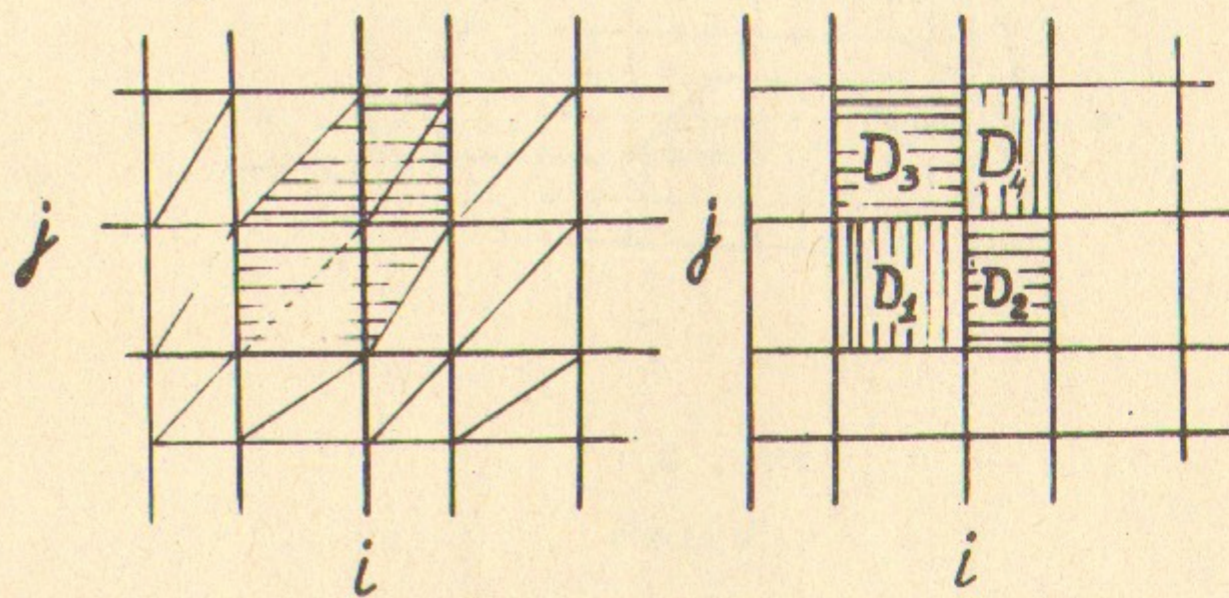


Рис. 2.



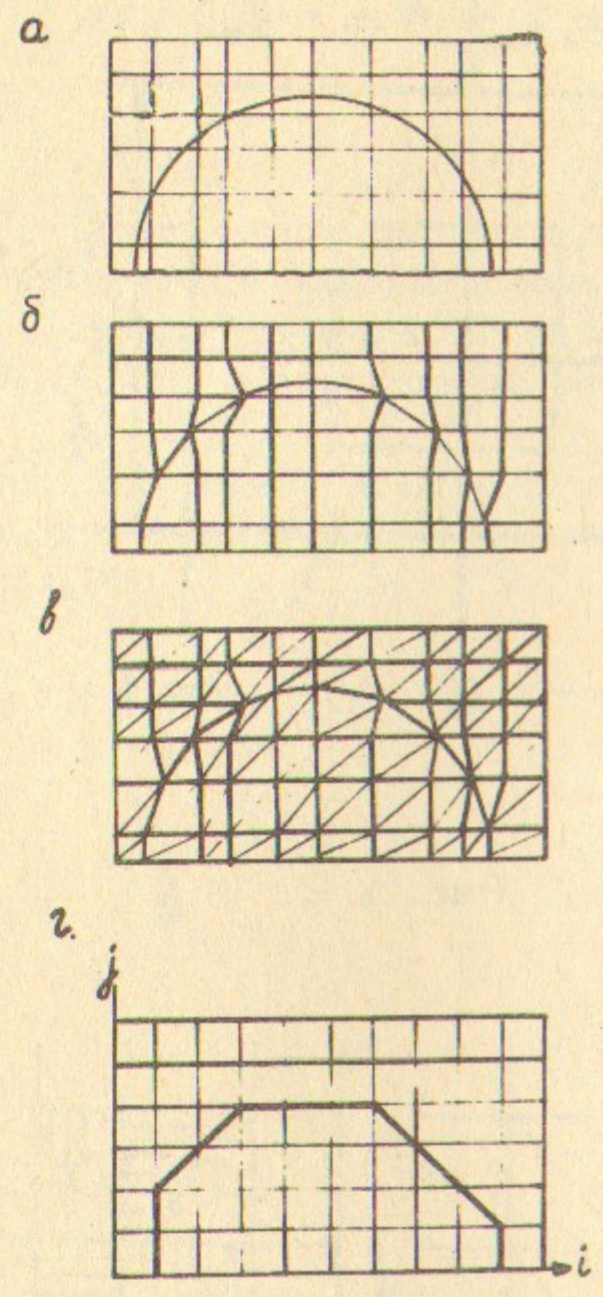


Рис. 3.

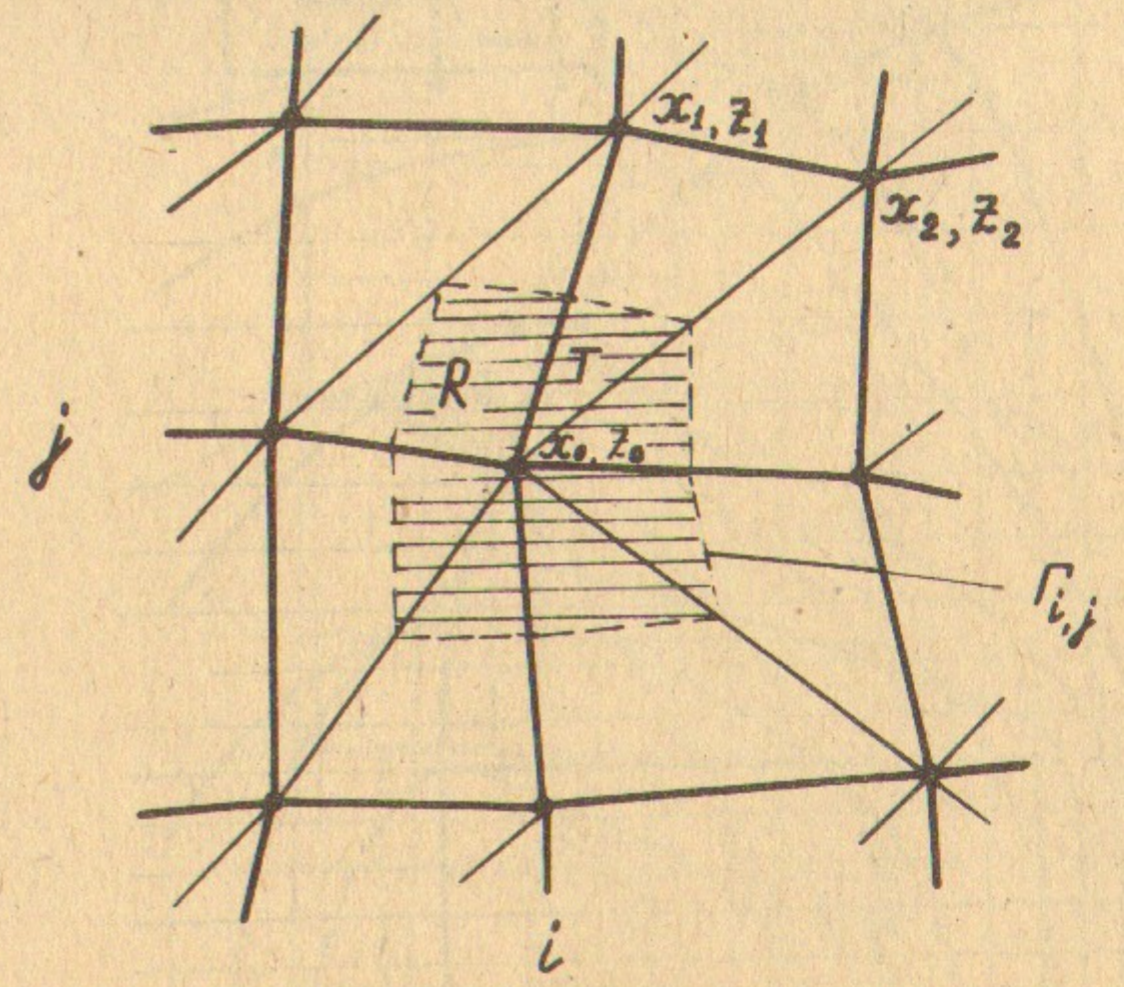


Рис. 4.



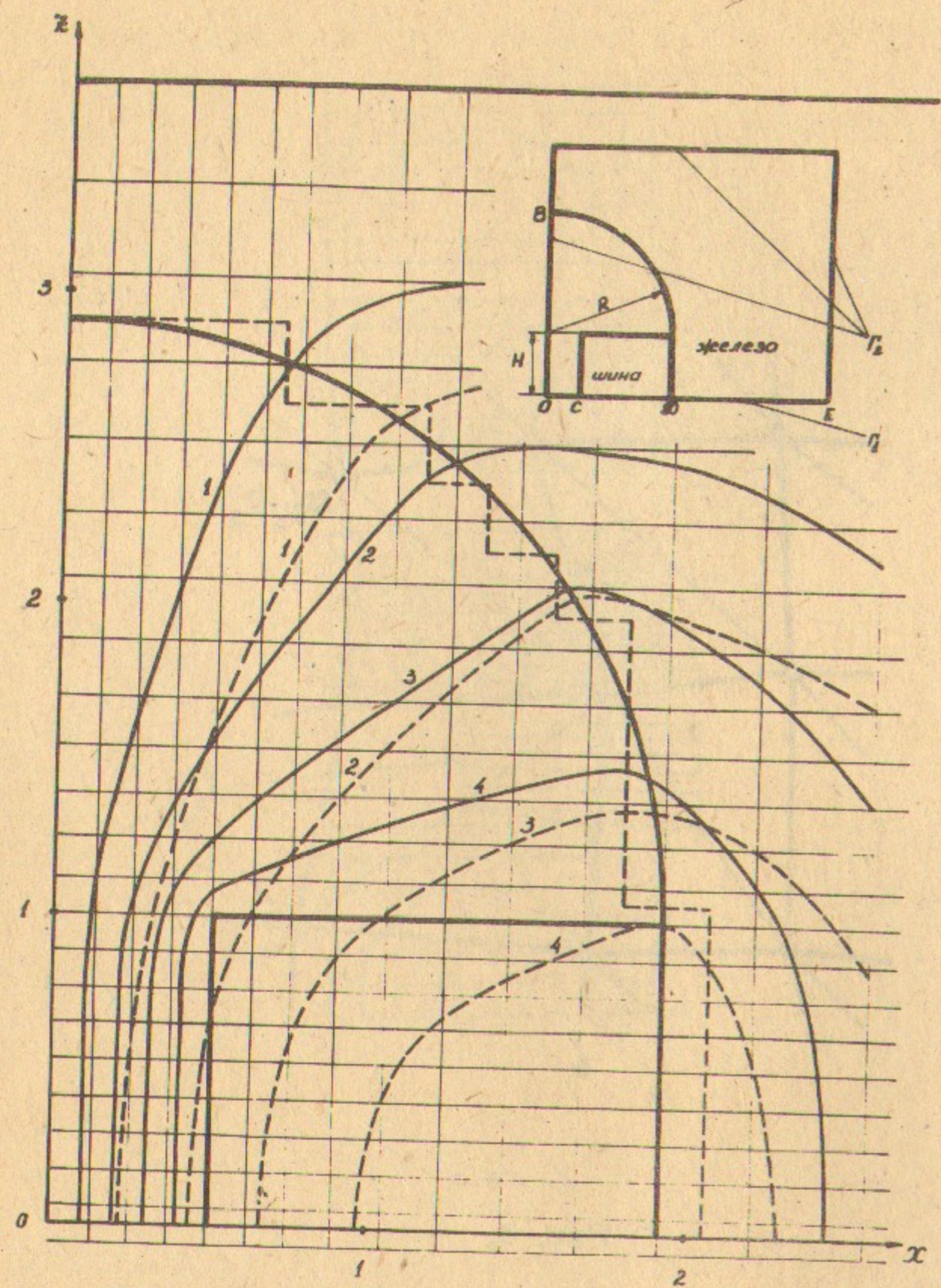


Рис.5.  $H=1$ ,  $R=1,91$ .  $\delta$ -образный импульс напряжения.  
 — силовые линии при  $t=0$   
 --- силовые линии при  $t=5000$  мксек.  
 1 -  $A=0,1$ ; 2 -  $A=0,2$ ; 3 -  $A=0,3$ ; 4 -  $A=0,4$ .

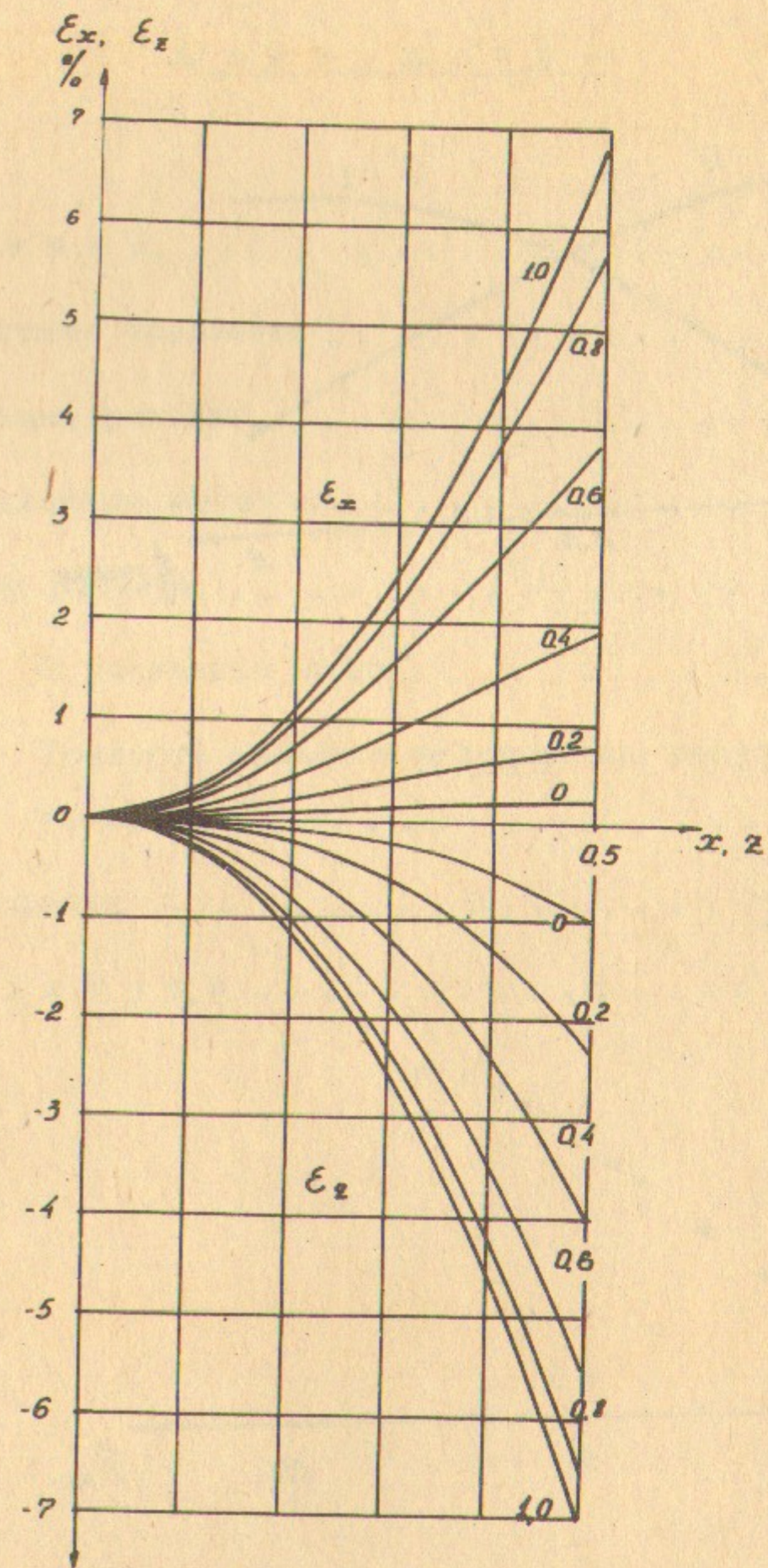


Рис.6. Неоднородность поля по горизонтали и вертикали для  $\delta$ -образного импульса при различных  $\theta$ .



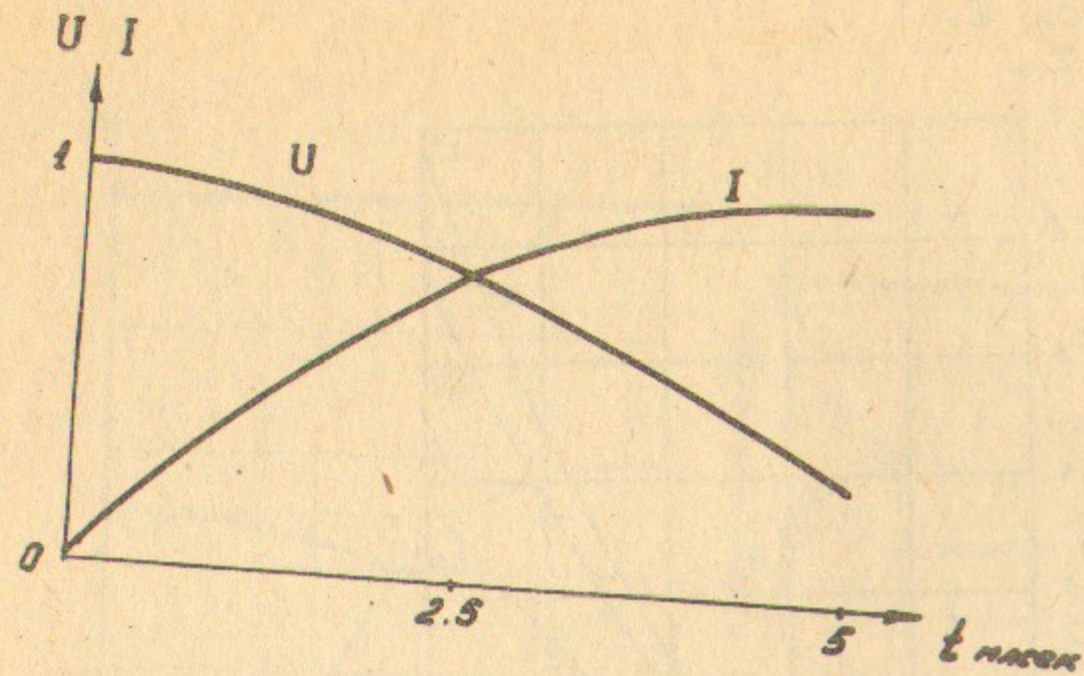


Рис. 7.

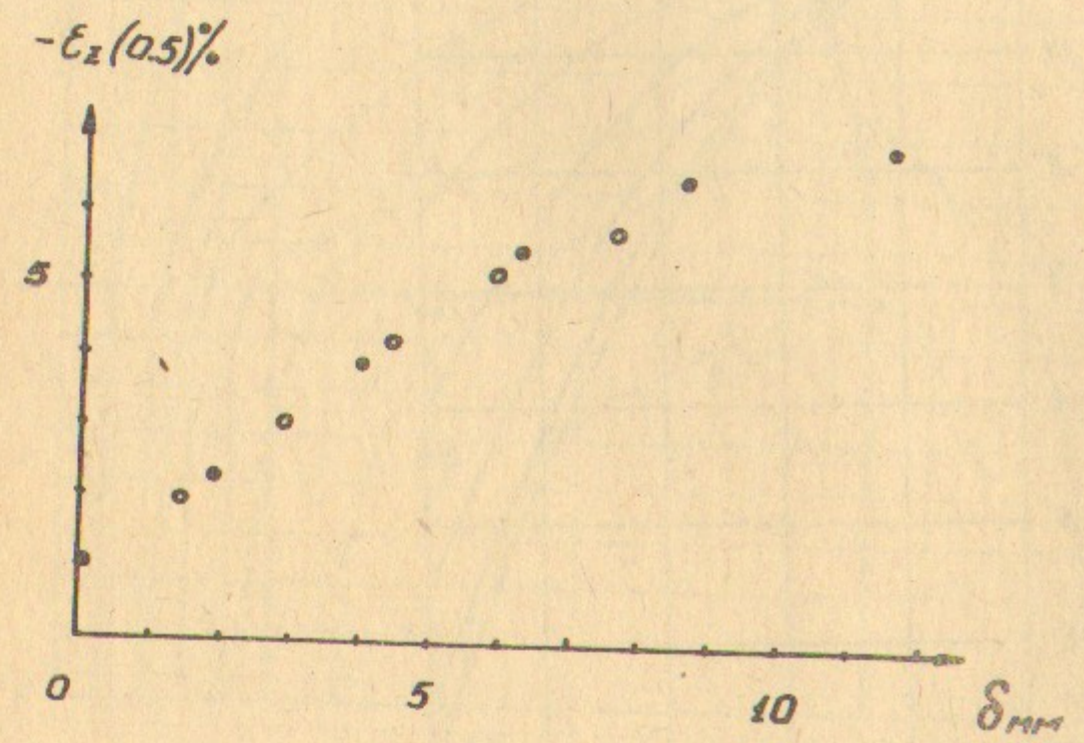


Рис.8. Зависимость  $\epsilon_z(0,5)$  от величины скин-слоя для различных  $u(t)$ :  
 •  $\delta$ -образный импульс.  
 ○ разряд конденсатора ( $t = t_\phi$ ).

Содержание

	Стр.
Введение.....	3
1. Разностные уравнения.....	4
2. Граничные условия.....	12
3. Итерационные методы.....	13
4. Пример расчёта.....	16
О численном счёте.....	16
Точность расчётов и некоторые результаты.....	20
5. Обсуждение.....	27
Литература.....	28



---

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов  
Подписано к печати 1.11.1973г. МН 17002.  
Усл. 1,3 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 94. ПРЕПРИНТ.

---

Отпечатано на ротационте в ИЯФ СО АН СССР, вг.