19

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ ИЯФ 96 - 73

А.М.Рубенчик

БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ КИНЕТИКА ВОЛН

Новосибирск

1973

А.М.Рубенчик

БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ КИНЕТИКА ВОЛН

А Н Н О Т А Ц И Я

Выводятся уравнения, описывающие пространственно-неоднородные колебания слаботурбулентных спектров. Исследуется их устойчивость. Изучается возможность самофокусировки турбулентных пакетов.

А.М.Рубенчик

БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ КИНЕТИКА ВОЛН

Введение

При изучении нелинейного взаимодействия волн в рамках теории слабой турбулентности распределение колебаний обычно считается однородным. Взаимодействие волн при этом описывается столкновительным членом в кинетическом уравнении. Если же распределение волн неоднородно, то возникает принципиально новый механизм коллективного нелинейного взаимодействия. Он связан с изменением траекторий волновых пакетов из-за неоднородности плотности энергии колебаний. Характерная длина такого взаимодействия обратно пропорциональна плотности энергии волн и в ряде случаев, в средах в которых по виду закона дисперсии запрещены распадные взаимодействия, может быть меньше их длины "свободного пробега". При этом в кинетическом уравнении для волн можно пренебречь столкновительным членом и говорить о бессталкновительной кинетике волн. Уравнение бесстолкновительной кинетики волн аналогично линейному кинетическому уравнению для волн в неоднородной среде /1,2/с той разницей, что неоднородность сама определяется распределением энергии волн. Впервые аналогичное уравнение было предложено А.А.Веденовым и Л.И.Рудаковым /1/ для описания взаимодействия ленгмюровских волн. В этой работе считалось, что колебания распространяются в среде с неоднородностями плотности, возникающими под действием высокочастотного давления электрического поля ленгмюровских колебаний. Позже /3/ Б.А.Трубников рассмотрел близкую задачу о взаимодействии электромагнитных и звуковых волн. В.Е.Захаров /4/ впервые обратил внимание на то, что любой механизм нелинейного сдвига частоты приводит к эффектам, аналогичным влиянию вариаций плотности. Однако оставался открытым вопрос о последовательном выводе общих уравнений бесстолкновительной кинетики волн и выяснению области их применимости. Этому выводу и посвящен первый параграф настоящей работы.

Во втором параграфе полученное уравнение используется для исследования устойчивости спектров слабой турбулентности относительно пространственно-неоднородных возмущений. Особое внимание здесь уделяется задаче об устойчивости "комбинированного" спектра, состоящего из монохроматической волны и турбулентного фона, интересной в связи с проблемой коллапса ленгмюровских волн /5/. Кроме того, в этом параграфе разбирается вопрос об устойчивости резко анизотропных спектров-струй в k -пространстве.

Такой вид могут иметь, например, спектры ленгмюровских колебаний в изотермической плазме /6/ или излучение многомодового лазера.

§ 3 посвящен изучению самофокусировки волн со случайной фазой. Исследуются стационарные распределения волн и обсуждается их устойчивость.

§ 1. Основные уравнения

Распространение волн в нелинейной однородной среде с нераспадным законом дисперсии ω_k мы будем описывать уравнениями для комплексных амплитуд волн a_k /7/.

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i\int T_{kk_1k_2k_3} a^*_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}\,\delta(\vec{k}+\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3)\,d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \quad (1)$$

Если амплитуда волн не слишком велика и они слабо взаимодействуют друг с другом, можно упростить (1), перейдя к статистическому описанию. Для этого достаточно выполнения неравенства

$$\omega_k \gg T N \quad (2)$$

где T - характерная величина матричного элемента, а N - плотность волн.

Для распределения волн в виде узкого пакета условие (2) заменяется на существенно более жесткое

$$\omega'' \Delta k_m^2 \gg T N \quad (3)$$

Здесь Δk_m - максимальный размер пакета.

Напишем уравнение сопряженное (1) для k' близкого к k

$$\frac{\partial a^*_{k'}}{\partial t} - i\omega_{k'} a^*_{k'} = i\int T_{k'k_1k_2k_3} a_{k_1} a^*_{k_2} a^*_{k_3}\,\delta(\vec{k}'+\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3)\,d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \quad (4)$$

Если фазы волн совершенно случайны, корреляционная функция $n_{kk'} = \langle a_k a^*_{k'}\rangle = n_k\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$

Нелинейное взаимодействие может привести к размытию корреляционных функций. Введем обозначения

$$n_{kk'} = n_{\tilde{k}\,\Delta k}\,; \quad \tilde{\vec{k}} = \frac{\vec{k}+\vec{k}'}{2}\,; \quad \Delta\vec{k} = \vec{k}-\vec{k}'$$

Из (1) и (4) имеем, считая $\Delta k \ll \tilde{k}$:

$$\frac{\partial n_{\tilde{k}\Delta k}}{\partial t} + i(\vec{V}_{gr}\Delta\vec{k})\,n_{\tilde{k}\Delta k} = -2i\int T_{\tilde{k}k_1} n_{k_1,-\Delta k'} \times \quad (5)$$
$$\times\left(n_{\tilde{\vec{k}}+\frac{\Delta\vec{k}'}{2},\,\Delta\vec{k}+\Delta\vec{k}'} - n_{\tilde{\vec{k}}-\frac{\Delta\vec{k}'}{2},\,\Delta\vec{k}+\Delta\vec{k}'}\right) d\vec{k}_1\, d\Delta\vec{k}'$$

Введем медленно меняющуюся в пространстве плотность волн $n_k(r)$:

$$n_k(r) = \int n_{k\Delta k}\, e^{i\Delta\vec{k}\vec{r}}\, d\Delta\vec{k}$$

Из (5), учитывая лишь низшие по Δk члены, получим

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial\omega_k}{\partial\vec{k}}\frac{\partial n_k}{\partial\vec{r}} - 2\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\int T_{kk'} n_{k'}\,dk'\,\frac{\partial n_k}{\partial\vec{k}} = 0 \quad (6)$$

$$T_{kk'} = T_{kk'kk'}$$

При получении (6) мы расщепляли четверные корреляторы через двойные^x). Учет членов следующего порядка по нелинейности, в которых можно пренебречь эффектами неоднородности, приводит к появлению в правой части (6) обычного столкновительного члена

$$St\{n_k\} = 2\pi\int |T_{kk_1k_2k_3}|^2 n_k n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3}\left(\frac{1}{n_k}+\frac{1}{n_{k_1}}-\frac{1}{n_{k_2}}-\frac{1}{n_{k_3}}\right)\times \qquad (7)$$

$$\times\,\delta(\omega_k+\omega_{k_1}-\omega_{k_2}-\omega_{k_3})\,\delta(\vec{k}+\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3)\,d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \sim \frac{(TN)^2}{\omega_k}\, n_k$$

Для узкого пакета роль столкновений возрастает

$$St\{n_k\}\sim \frac{(TN)^2}{\omega_k}\,\frac{k^2}{\Delta k_m^2}\, n_k$$

В дальнейшем мы будем рассматривать ситуации, когда $St\{n_k\}$ можно пренебречь.

Кроме того, размер неоднородности L должен быть достаточно велик для того, чтобы можно было пренебречь эффектами дифракции. Условие пренебрежения членами с высшими производными в (6) имеет вид

$$\frac{\omega''}{L^2} < TN$$

Особый интерес представляет задача об эволюции узкого пакета волн. В этом случае можно положить

$$\omega_k = \omega_{k_0} + \vec{V}_{гр}\Delta\vec{k} + \frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\Delta k_\alpha \Delta k_\beta$$

---

x) В работе /1/, при выводе кинетического уравнения для волн плотность среды считалась фиксированной. Это означает, что коррелятор $\langle\delta\rho\, a a^*\rangle$ расщеплялся как $\delta\rho\langle a a^*\rangle$. Если распадные процессы разрешены, то такое расщепление неверно, в противном случае $\delta\rho \backsim a a^*$ и $\langle\delta\rho\, a a^*\rangle = 2\delta\rho\langle a a^*\rangle$. Естественно, что это изменение коэффициента никак не меняет качественные результаты /1/.

Подставляя это выражение в (6) и переходя в систему отчета, двигающуюся с групповой скоростью, получим для изотропной среды

$$\frac{\partial n_\varkappa}{\partial t} + \lambda_\parallel \varkappa_\parallel \frac{\partial n_\varkappa}{\partial z} + \lambda_\perp\left(\vec{\varkappa}_\perp \frac{\partial n_\varkappa}{\partial \vec{r}_\perp}\right) - 2T\frac{\partial N}{\partial \vec{r}}\frac{\partial n_\varkappa}{\partial \vec{\varkappa}} = 0 \qquad (8а)$$

Здесь $T = T_{k_0k_0}$, $\lambda_\parallel = \frac{d^2\omega}{dk^2}$, $\lambda_\perp = \frac{V_{гр}}{k_0}$, z – направления распространения пакета, $N = \int n_k d\vec{k}$. Ограничиваясь, для простоты, случаем положительной дисперсии $\omega''>0$ и вводя безразмерные переменные, перепишем (8а) в виде

$$\frac{\partial n_\varkappa}{\partial t} + \varkappa\frac{\partial n_\varkappa}{\partial z} - 2T\frac{\partial N}{\partial z}\frac{\partial n_\varkappa}{\partial \varkappa} = 0 \qquad (8б)$$

Отметим, что полученное уравнение применимо не только к узким пакетам. Оно описывает, например, ленгмюровскую турбулентность $\omega_k = \omega_p\left(1+\frac{3}{2}k^2 r_d^2\right)$ в нераспадной части спектра. Подчеркнем еще, что уравнение (8б) близко к обычному кинетическому уравнению для частиц, двигающихся в самосогласованном потенциале $2TN$.

Рассмотрим теперь взаимодействие узкого когерентного пакета волн сосредоточенного вблизи $k = k_0$ и широкого турбулентного фона.

Представим в уравнении (1) a_k в виде суммы когерентной и стохастической частей

$$a_k = A_k + \tilde{a}_k$$

Выписывая уравнение для когерентной части (1) и переходя в r-представление, получим измененное за счет турбулентного фона, параболическое уравнение для комплексной огибающей когерентного пакета $A(r)$

$$i\frac{\partial A}{\partial t} + V_{гр}\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\lambda_\parallel}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\lambda_\perp \Delta_\perp A = \left(T|A|^2 + 2\int T_{k_0k}\, n_k\, dk\right)A$$

Для стохастической части, повторяя изложенный выше вывод, получим

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial \omega_k}{\partial \vec{k}}\frac{\partial n_k}{\partial \vec{r}} - 2\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left[\int T_{kk'}\, n_{k'}\, dk' + T_{kk_0}|A|^2\right]\frac{\partial n_k}{\partial \vec{k}} = 0$$

Если турбулентный фон также представляет узкий пакет, сосредоточенный вблизи k_0, то можно упростить систему уравнений и, перейдя к безразмерным переменным, получить в системе, двигающейся с групповой скоростью

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\Delta A = T(|A|^2 + 2N)A \\[2ex] \dfrac{\partial n_{\vec{\varkappa}}}{\partial t} + \vec{\varkappa}\dfrac{\partial n_{\vec{\varkappa}}}{\partial \vec{z}} - 2T\dfrac{\partial}{\partial \vec{z}}(N + |A|^2)\dfrac{\partial n_{\vec{\varkappa}}}{\partial \vec{\varkappa}} = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Эта система аналогична уравнениям, описывающим взаимодействие конденсата и фононов в слабо-неидеальном бозе-газе.

§ 2. Устойчивость пакетов волн со случайной фазой

Любое однородное распределение удовлетворяет уравнению (8). Естественно возникает вопрос об устойчивости таких распределений относительно пространственно-неоднородных возмущений. Для возмущений $\sim \exp(-i\omega t + i\vec{p}\vec{z})$ имеем обычное дисперсионное уравнение

$$1 + 2T\int \frac{\left(\vec{p}\,\frac{\partial n_0}{\partial \vec{\varkappa}}\right)}{\omega - \vec{p}\vec{\varkappa}}\, d\vec{\varkappa} = 0 \qquad (10)$$

При интегрировании по $\varkappa$, полюс, как обычно, обходит снизу. Отметим, что в (9) входит лишь усредненная по $\varkappa \perp p$ величина функции распределения. Если в направлении $\vec{p}$ ширина пакета Δ достаточно мала $\Delta^2 \ll TN_0$, вкладом полюса можно пренебречь и уравнение (10) дает

$$\omega = |p|(2TN_0)^{1/2}$$

При $T < 0$ имеет место модуляционная неустойчивость x). Максимальный инкремент ее достигается на пределе применимости уравнения (8), максимальное p ограничивается неучтенными в (8) эффектами дисперсии и дифракции и дает [8] $p_{max} \sim (TN_0)^{1/2}$.

Рассмотрим влияние на неустойчивость конечной ширины пакета. В уравнении (10) проинтегрируем по $\varkappa$ перпендикулярным $\vec{p}$. Положим, для определенности, что после интегрирования пакет имеет лоренцовскую форму

$$n_0(\varkappa_{\parallel}) = \frac{1}{\pi}\,\frac{N_0\Delta}{\varkappa_{\parallel}^2 + \Delta^2}$$

Тогда после интегрирования уравнение (10) дает

$$\omega = |p|\left(\sqrt{2TN_0} - i\Delta\right) \qquad (11)$$

Видно, что конечная ширина пакета стабилизирует неустойчивость и достаточно широкие спектры $\omega''\Delta^2 > TN_0$ устойчивы относительно пространственно неоднородных возмущений. Для узкого во всех направлениях пакета это условие совпадает с условием стохастизации фаз волн и поэтому бесстолкновительная кинетика описывает лишь устойчивые пакеты. Неустойчивость очень узких пакетов $\omega''\Delta^2 \ll TN_0$ необходимо рассматривать с помощью точных динамических уравнений. Для $p \gg \Delta$ такой пакет можно считать монохроматической волной, при этом инкремент модуляционной неустойчивости /8/ в пренебрежении дифракционными поправками

$$\gamma = p\sqrt{TA_0^2} \qquad (12)$$

Разница в $\sqrt{2}$ в формулах (12,11) еще раз говорит о неприменимости кинетического уравнения для описания модуляционной неустойчивости.

Для резко анизотропных спектров случайность фаз обеспечивается за счет большой ширины пакета в направлении перпендикулярном p. Поэтому мы можем рассматривать сингулярные спектры в виде поверхностей или струй в k-пространстве. Неустойчивость приводит к размытию сингулярностей и уширению спектра на $\Delta k \sim (TN/\omega'')^{1/2}$. Для ленгмюровских струй /6/ $\Delta k \sim r_d\sqrt{W/nT}$. Представляет интерес сравнение этой неустойчивости с пространственно-неоднородными неустойчивостями параметрически возбужденных волн /10/,

---

x) При $\lambda_{\parallel} < 0$ критерий неустойчивости имеет вид $(\lambda_{\parallel}\cos^2\alpha + \lambda_{\perp}\sin^2\alpha)T < 0$; $\cos\alpha = \dfrac{(\vec{p}\vec{\varkappa})}{|p||\varkappa|}$

приводящих к уширению сингулярных спектров на такую же величину.

Исходя из аналогии с кинетическим уравнением для заряженных частиц следует ожидать неустойчивости аналогичные пучковой. Для функции распределения, состоящей из двух монохроматических пиков - это неустойчивость бигармонического поля, найденная в /11/. Конечная ширина пакетов $\omega''\Delta^2 \sim TN_0$ стабилизирует эту неустойчивость так же, как тепловой разброс стабилизирует пучковую неустойчивость.

В заключение этого параграфа рассмотрим как влияет на неустойчивость монохроматической волны с амплитудой A_0 присутствие турбулентного фона шириной Δ $(\Delta^2 \gg TN_0)$.

Естественно, что турбулентный пакет наиболее сильно взаимодействует с монохроматической волной, если их групповые скорости совпадают. Предположим, что турбулентный пакет имеет лоренцовскую форму с центром в $k = k_0$. Решение в виде монохроматической волны на однородном турбулентном фоне удовлетворяет (9). Линеаризуя (9) и пренебрегая дифракционными эффектами в параболическом уравнении, получим

$$\omega^2 = p^2 T A_0^2 \left(1 - \frac{4TN_0}{\Delta^2}\right)$$

Видно, что турбулентный фон слабо влияет на неустойчивость монохроматической волны (12). Полученный результат важен для понимания механизма диссипации длинноволновых плазменных колебаний - коллапса ленгмюровских волн. Начальная стадия коллапса - это неустойчивость однородного ленгмюровского колебания, рассмотренная в /6/. Однако, в плазме всегда существует мелкомасштабная турбулентность, образующаяся, например, в результате предыдущих коллапсов и не исключена была возможность влияния этого турбулентного фона на начальную стадию процесса.

§ 3. Самофокусировка волновых пакетов со случайной фазой

Известно /12/, что волна распространяясь в нелинейной среде, меняет ее коэффициент преломления и в результате этого может фокусироваться. Теоретически изучалась лишь самофокусировка когерентных волн, при которой характерные поперечные размеры волновода $\sim \lambda \left(\frac{TN}{\omega_k}\right)^{1/2}$. Однако,

в нелинейной среде существуют и другие стационарные распределения волн, ограниченные в поперечном направлении.

Как уже отмечалось выше, уравнение (8б) описывает движение частиц в потенциале $2TN(r)$. Если поперечные скорости частиц $< 2\sqrt{TN_{max}}$, то их движение в поперечном направлении ограничено и соответственно плотность волн ограничена в поперечном направлении. Случайность фаз волн и тем самым применимость (8б) обеспечивается большой шириной пакета в продольном направлении. Такая ситуация может быть легко реализована, например, в излучении многомодового лазера. Существует бесконечное множество таких решений, профиль и функция распределения волн в которых связаны уравнением

$$N(r) = \int_{-2\sqrt{TN_{max}}}^{2\sqrt{TN_{max}}} n\left(\varkappa^2 + 4TN(r)\right) d\varkappa$$

Рассмотрим простейший пример такого распределения, который можно получить, например, пропуская лазерное излучение через диафрагму. Функция распределения волн имеет вид

$$n(\varkappa, x) = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ n(\varkappa), & |x| < a \end{cases}, \quad n(\varkappa) = \begin{cases} n(\varkappa_\parallel), & |\varkappa_\perp| < \varkappa_m \\ 0, & |\varkappa_\perp| > \varkappa_m \end{cases} \text{ x)}$$

$$\varkappa_m^2 \le 4TN$$

$\varkappa_m$ находим из условия равновесия границы. Отрицательное внутреннее давление TN^2 компенсируется "тепловым давлением" волн $p_T = 2\int_0^{\varkappa_m} n\varkappa^2 d\varkappa = N\frac{\varkappa^2}{3}$, то есть $\varkappa_m^2 = 3TN$. Рассмотрим устойчивость такого распределения волн вдали от границы. Уравнение (9) имеет вид

$$1 - \frac{2TN_0}{\omega^2 - p^2\varkappa_m} = 0 \tag{13}$$

или

$$\omega^2 = p^2\left(\varkappa_m^2 + 2TN_0\right) = \frac{1}{2}p^2\varkappa_m^2$$

---

x) Из условий применимость (8) размер неоднородности границы не может быть меньше $a_0 \sim \lambda\,(\omega/TN_0)^{1/2}$. Поэтому модель резкой границы справедлива лишь при $a \gg a_0$, то есть поперечный размер волновода много больше чем при самофокусировке когерентного излучения с той же плотностью энергии.

Если пакет слегка искривлен, то (13) принимает вид

$$\omega = \frac{p\varkappa_m}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi i|T|}{2}\frac{\partial n_0}{\partial \varkappa}\right)_{\varkappa = \frac{\varkappa_m}{\sqrt{2}}}$$

то есть слегка выпуклый вверх турбулентный пакет устойчив. Вопрос об устойчивости пучка относительно возмущений границ остается открытым. Однако, исходя из аналогии с пучком частиц с большой продольной и маленькой поперечной температурой следует ожидать неустойчивость относительно изгибных возмущений.

В заключение автор благодарит В.Е.Захарова за обсуждение работы.

Литература

1. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков ДАН СССР 159767. 1964.
2. Б.Б.Кадомцев. Вопросы теории плазмы 4 1972.
3. Б.А.Трубников ЖЭТФ 62 971 1972.
4. В.Е.Захаров. Диссертация ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1966 г.
5. В.Е.Захаров ЖЭТФ 62 1745. 1972.
6. Б.Н.Брейзман, В.Е.Захаров, С.Л.Мушер ЖЭТФ 64. 1297, 1973.
7. В.Е.Захаров ЖЭТФ 60 1714 1971.
8. В.И.Таланов. Изв.Вузов (Радиофизика) 7.564.1964.
9. В.Е.Захаров ЖЭТФ 51.1107.1966.
10. В.С.Львов "Устойчивость основного состояния и коллективные колебания системы параметрически возбужденных спиновых волн". Препринт ИЯФ СО АН СССР 8-73, Новосибирск,1973.
11. В.Е.Захаров ЖЭТФ 53.1735.1967.
12. Г.А.Аскарьян ЖЭТФ 42. 1507, 1962.

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати 14.11.1973г МН 17029
Усл. 0,6 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 96. ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг.