20

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 98 - 73

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

КОНФОРМНЫЕ ПОЛЯ, ПРЕОБРАЗУЮЩИЕСЯ ПО ПРЕДСТАВЛЕНИЯМ ДИСКРЕТНЫХ СЕРИЙ

Новосибирск
1973

Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик

КОНФОРМНЫЕ ПОЛЯ, ПРЕОБРАЗУЮЩИЕСЯ ПО ПРЕДСТАВЛЕНИЯМ ДИСКРЕТНЫХ СЕРИЙ

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются конформные поля, преобразующиеся по много- и бесконечнозначным невырожденным представлениям конформной группы. Использование таких представлений диктуется требованием спектральности /1,2/. Рассмотрены ограничения на размерность, вытекающие из условия унитарности представлений.

Institute of Nuclear Physics

CONFORMAL FIELDS TRANSFORMING UNDER REPRESENTATIONS OF DISCRETE SERIES

B.G. Konopelchenko, M.Ya. Palchik

Abstract

Conformal fields transforming under many - and infinite - valued nondegenerate representations of conformal group are considered. The use of such fields is dictated by spectral condition [1,2]. Restrictions on the dimensions of fields which follow from the condition of unitarity of the representations are considered.

1.

Как показано в работах /1,2/, конформная инвариантность совместима с условием спектральности, если в качестве группы симметрии теории рассматривать бесконечнолистную универсальную накрывающую конформной группы. При этом только поля, преобразующиеся по представлениям дискретных серий универсальной накрывающей удовлетворяют условию спектральности.
Если же ограничиться одно- и двузначными представлениями конформной группы, то со спектральностью совместимы только целые или полуцелые размерности (в зависимости от спина) /3/.

В работе /2/ рассматривались поля с аномальной размерностью, преобразующиеся по вырожденным представлениям универсальной накрывающей. Размерность таких полей ограничена интервалом /2/

$$d > 1 + s$$

где s -спин. Это ограничение следует из требования унитарности представлений.

Цель данной работы-рассмотреть невырожденные представления дискретных серий универсальной накрывающей (раздел II) и поля, преобразующиеся по этим представлениям. Эти поля классифицируются по значениям трех чисел d, j_1, j_2 и преобразуются по представлениям (j_1, j_2) группы Лоренца. Показано, что унитарность представлений ограничивает размерность интервалом (раздел III)

$$d \geq 2 + j_1 + j_2 . \qquad (1.1)$$

В разделе IУ рассмотрены обобщенные свободные поля, преобразующиеся по невырожденным представлениям дискретных серий. Они имеют спектр спинов

$$|j_1 - j_2| \leq s \leq j_1 + j_2$$

и размерность в интервале (1.1).

II.

Неприводимые унитарные представления конформной группы рассмотрены в работах /4-10/. Работа /7/ посвящена общему исследованию унитарных представлений. Исследование вырожденных унитарных представлений проведено Яо /4-6/. Невырожденные унитарные представления подробно изучались в работах /8-10/.

Для построения конформных полей важным является вопрос о редукции представлений конформной группы по подгруппе Пуанкаре. Как показано в работах /6,10/ только для представлений дискретных серий выполняются условия $P^2 > 0$ и $\operatorname{sgn} p_0 = inv$

$\mathcal{D}^+$ серия: $\quad P^2 > 0 \;, \quad p_0 > 0,$

$\mathcal{D}^-$ серия: $\quad P^2 > 0 \;, \quad p_0 < 0$

Представления этих серий задаются тремя числами J_m, K_m, Λ_m, которые принимают дискретные значения[x]. Операторы Казимира в этих сериях равны /4/:

$$C_2 = \Lambda_m(\Lambda_m + 4) + 2J_m(J_m + 1) + 2K_m(K_m + 1),$$

$$C_3 = -(\Lambda_m + 2)(J_m - K_m)(J_m + K_m + 1), \tag{2.1}$$

x) Дискретные серии $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$ работы /4/ совпадают с дискретными сериями d_0^+ и d_0^- работы /10/. Соответствие между числами, определяющими значения операторов Казимира имеет вид:

$$|J_m - K_m| = \frac{m}{2}, \; J_m + K_m + 1 = \frac{1}{2}(L - K), \; \Lambda_m + 2 = \frac{1}{2}(L + K).$$

$$C_4 = \frac{1}{4}(\Lambda_m + 2)^4 - (\Lambda_m + 2)^2 - (\Lambda_m + 2)\left[J_m(J_m + 1) + K_m(K_m + 1)\right] + 4J_m(J_m + 1)K_m(K_m + 1).$$

Следуя работе /4/ введем базис в пространстве представления, состоящий из собственных векторов генераторов максимально компактной подгруппы $SO(4) \otimes SO(2)$:

$$J_i J_i |j, k, \lambda\rangle = j(j+1)|j, k, \lambda\rangle,$$

$$K_i K_i |j, k, \lambda\rangle = k(k+1)|j, k, \lambda\rangle, \tag{2.2}$$

$$\Lambda |j, k, \lambda\rangle = \lambda |j, k, \lambda\rangle,$$

где операторы J_i и K_i $(i = 1, 2, 3)$ образуют две коммутирующие алгебры $SO(3)$, а оператор Λ является генератором группы $SO(2)$. Остальные генераторы конформной группы можно разбить на две группы. Генераторы первой группы действуют на базис (2.2) по формуле /4/

$$Q_+|j, k, \lambda\rangle \cong a_1(j,k,\lambda)|j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, \lambda+1\rangle + a_2(j,k,\lambda)|j+\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, \lambda+1\rangle$$

$$+ a_3(j,k,\lambda)|j-\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, \lambda+1\rangle + a_4(j,k,\lambda)|j-\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, \lambda+1\rangle.$$

Для второй группы

$$Q_-|j,\kappa,\lambda\rangle \simeq b_1(j,\kappa,\lambda)|j+\tfrac{1}{2},\kappa+\tfrac{1}{2},\lambda-1\rangle + b_2(j,\kappa,\lambda)|j+\tfrac{1}{2},\kappa-\tfrac{1}{2},\lambda-1\rangle$$

$$+\,b_3(j,\kappa,\lambda)|j-\tfrac{1}{2},\kappa+\tfrac{1}{2},\lambda-1\rangle + b_4(j,\kappa,\lambda)|j-\tfrac{1}{2},\kappa-\tfrac{1}{2},\lambda-1\rangle .$$

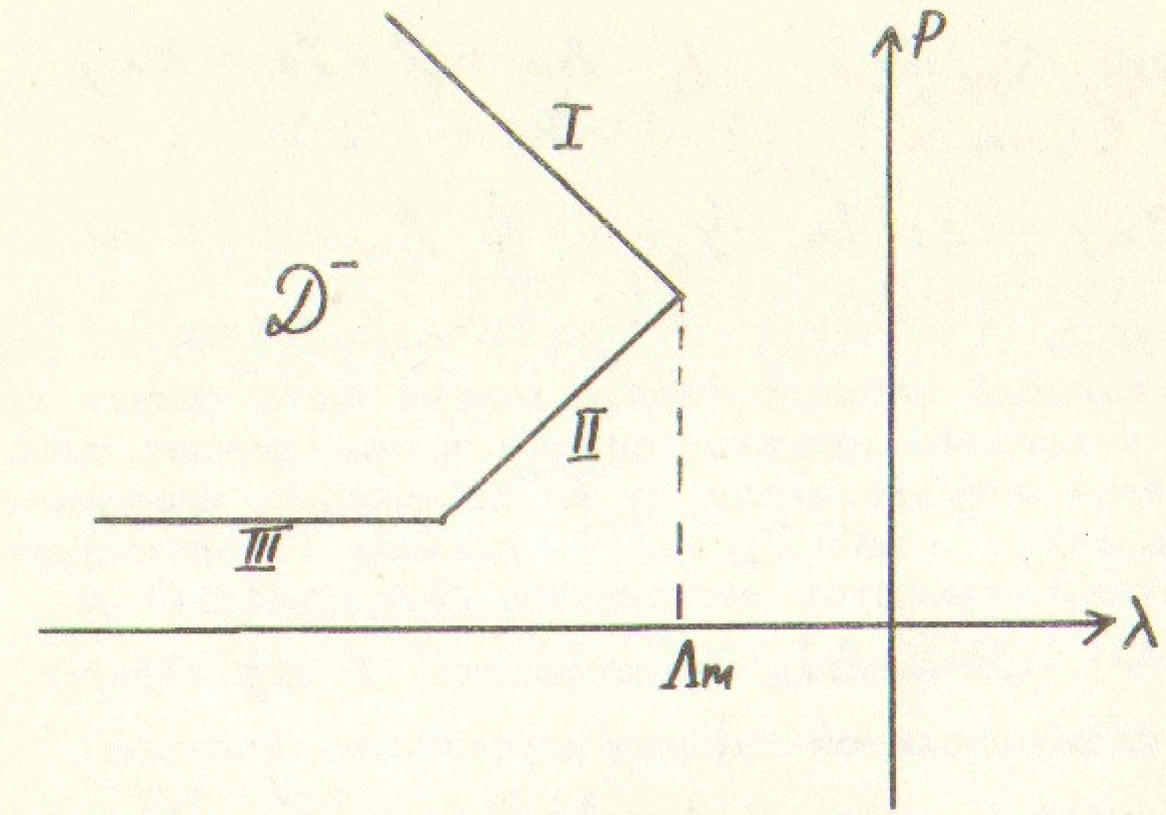
Условие унитарности представлений имеет вид /4/:

$$a_1^2(j,\kappa,\lambda),\ a_4^2(j,\kappa,\lambda),\ b_1^2(j,\kappa,\lambda),\ b_4^2(j,\kappa,\lambda) \le 0, \qquad (2.3)$$

$$a_2^2(j,\kappa,\lambda),\ a_3^2(j,\kappa,\lambda),\ b_2^2(j,\kappa,\lambda),\ b_3^2(j,\kappa,\lambda) \ge 0 .$$

В работах /4–10/ рассматривались только одно- и двузначные унитарные представления группы $SO(4,2)$ (что соответствует в дискретных сериях целому или полуцелому Λ_m и λ). В представлениях универсальной накрывающей Λ_m и λ могут быть любыми действительными числами, /1,2/. В этом случае мы имеем много - и бесконечнозначные представления .

Определим допустимые значения Λ_m в унитарных представлениях. Рассмотрим серию $\mathcal{D}^-$ (серия $\mathcal{D}^+$ получается из $\mathcal{D}^-$ заменой $j \leftrightarrow \kappa$; $\lambda \to -\lambda$). На плоскости p, λ ($p = j + \kappa$) область допустимых значений p и λ имеет вид /4/ (невырожденные представления)



с границами

I: $p + \lambda = j_m + \kappa_m + \Lambda_m$

II: $p - \lambda = j_m + \kappa_m - \Lambda_m$ $\qquad (j_m, \kappa_m = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots)$

III: $p = |j_m - \kappa_m|$

Наиболее сильное из неравенств (2.3) имеет вид /4/ (условие унитарности на границе II)

$$a_1^2\left(j_m - \frac{t}{2}, \kappa_m - \frac{t}{2}, \Lambda_m - t\right) = -\frac{t(t+s+1)}{(2j_m - t + 2)(2\kappa_m - t + 2)} \le 0 \qquad (2.4)$$

где $t = 0, 1, \dots, t_m = 2\cdot\min(j_m, \kappa_m)$, $s_m = -j_m - \kappa_m - \Lambda_m - 4$.

Отсюда

$$s_m \ge -2 ,$$

т.е. $$-\Lambda_m \geqslant \mathcal{J}_m + K_m + 2 . \qquad (2.5)$$

Отметим, что при $S_m = -2 \qquad (-\Lambda_m = 2 + \mathcal{J}_m + K_m)$

$$a_1(\mathcal{J}_m, K_m, \Lambda_m) = a_1(\mathcal{J}_m - \tfrac{1}{2}, K_m - \tfrac{1}{2}, \Lambda_m - 1) = 0 .$$

Тем не менее каждый элемент базиса может быть связан с любым другим некоторым преобразованием и тем самым представление является неприводимым. В вырожденных представлениях (либо $\mathcal{J}_m = 0$, либо $K_m = 0$) граница II отсутствует и наиболее сильными являются неравенства $a_2^2(j,k,\lambda) \leq 0$ и $a_3^2(j,k,\lambda) \leq 0$. Учитывая, что на границе I $a_2 = a_3 = 0$, а внутри области выполняются строгие неравенства, получаем

$$-\Lambda_m > 1 + P_0 \qquad (P_0 = \mathcal{J}_m + K_m) . \qquad (2.6)$$

В случае целых и полуцелых Λ_m

$$-\Lambda_m = 2 + \mathcal{J}_m + K_m + n , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

имеем одно - и двузначные представления.

Отметим, в заключение, что условия $P^2 > 0$, и $\operatorname{sgn} P_0 = \mathrm{inv}$ сохраняются и в многозначных представлениях дискретных серий.

III.

Рассмотрим поля, преобразующиеся по унитарным представлениям дискретных серий. Для поля с размерностью d, преобразующемуся по представлению (j_1, j_2) группы Лоренца имеем/11/:

$$C_2 = (d-2)^2 - 4 + \frac{1}{2} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} ,$$

$$C_3 = \frac{i}{8}(d-2)\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma_{\rho\tau} \qquad (3.1)$$

$$C_4 = \frac{1}{4}(d-2)^4 - (d-2)^2 + \frac{1}{16}\left(\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{64}\left(\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\rho\tau}\right)^2 - \frac{1}{4}(d-2)^2 \Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} .$$

Для спиновой матрицы $\Sigma_{\mu\nu}$

$$\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} = 4j_1(j_1+1) + 4j_2(j_2+1) ,$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\rho\tau} = 8i\left[j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)\right] .$$

Следовательно,

$$C_2 = (d-2)^2 - 4 + 2j_1(j_1+1) + 2j_2(j_2+1) , \qquad (3.2)$$

$$C_3 = -(d-2)\left[j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)\right] ,$$

$$C_4 = \frac{1}{4}(d-2)^4 - (d-2)^2 -$$

$$-(d-2)^2\left[j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1)\right] + 4j_1(j_1+1)\cdot j_2(j_2+1) .$$

Сравнивая (2.1) и (3.2), находим

$$j_1 = \mathcal{J}_m , \quad j_2 = K_m , \quad d = -\Lambda_m .$$

Таким образом, в унитарных представлениях имеем:

1) невырожденные представления

$$j_1, j_2 = \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots \qquad \underline{d = 2 + j_1 + j_2 + \rho, \quad \rho \geq 0,}$$

2) вырожденные представления

$$j_1 = 0,\ j_2 = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots = j,$$

либо $\qquad \underline{d = 1 + j + \rho', \quad \rho' > 0}$

$$j_2 = 0,\ j_1 = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots = j,$$

Следовательно, поля с аномальной размерностью преобразуются по много - и бесконечнозначным представлениям дискретных серий.

Сохраняющиеся тензоры, преобразующиеся по представлениям ($n/2$, $n/2$) группы Лоренца типа тока J_μ и тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ с размерностью $d = 2 + n$, преобразуются по невырожденным представлениям дискретных серий. Отметим, что бесконечнокомпонентные представления, предложенные в /12/ не содержатся в сериях представлений, перечисленных в работах /4-10/.

1У.

Конформные поля, преобразующиеся по вырожденным представлениям (т.е. по представлениям $(j, 0)$ и $(0, j)$ группы Лоренца) были рассмотрены в /11/. Рассмотрим свободные конформные поля с аномальной размерностью, преобразующиеся по много и бесконечнозначным невырожденным представлениям дискретных серий.

В невырожденных представлениях базис пространства представление задается шестью числами /4/. Выберем базис из собственных векторов импульса

$$|d, j_1, j_2;\ p_0, p_1, p_2, p_3;\ s, \sigma\rangle \qquad (4.1)$$

где s - спин ($|j_1 - j_2| \leq s \leq j_1 + j_2$) и σ - проекция спина. Для векторов (4.1) $p^2 > 0$ и $\mathrm{sgn}\, p_0 = inv$.

Нормируем вектора (4.1) на единицу

$$\langle p', s', \sigma' | p, s, \sigma \rangle = \delta_{ss'}\, \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta^{(4)}(p - p').$$

Введем операторы рождения $\overset{+}{a}{}^{(s)}_{\sigma}(p)$ и уничтожения $a^{(s)}_{\sigma}(p)$

$$|p, s, \sigma\rangle = \overset{+}{a}{}^{(s)}_{\sigma}(p)|0\rangle, \qquad a^{(s)}_{\sigma}(p)|0\rangle = 0,$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\left\{ a^{(s)}_{\sigma}(p),\ \overset{+}{a}{}^{(s')}_{\sigma'}(p') \right\}_{\pm} = \delta_{ss'} \cdot \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta^{(4)}(p - p').$$

Далее, действуя аналогично /11/ для поля, преобразующегося по представлению (j_1 , j_2) группы Лоренца, находим:

$$\psi^{(j_1,j_2)d}_{\sigma\tau}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p\, \theta(p^2)\, \theta(p_0)\, (p^2)^{\frac{d-2}{2}} \times$$

$$\times \sum_s \left\{ \overset{+}{F}{}^{(j_1,j_2)s}_{\sigma\tau,\rho}(p)\, a^{(s)}_{\rho}(p)\, e^{-ipx} + \overset{+}{F}{}^{(j_1,j_2)s}_{\sigma\tau,\rho}\, (C^{-1})_{\rho\tau}\, \overset{+}{b}{}^{(s)}_{\tau}(p)\, e^{ipx} \right\}, \qquad (4.2)$$

где

$$\overset{+}{F}{}^{(j_1,j_2)s}_{\sigma\tau,\rho}(p) = \mathcal{D}^{(j_1,j_2)}_{\sigma\tau,\sigma'\tau'}[L(p)]\, \langle j_1 j_2 \sigma' \tau' | s, \rho \rangle.$$

Величина $\mathcal{D}^{(j_1,j_2)}_{\sigma\Sigma,\sigma'\Sigma'}[L(p)]$ – $(2j_1+1)(2j_2+1)$

-рядное представление буста $L(p)$, $\langle j_1 j_2 \sigma' \Sigma' | s, \varsigma\rangle$ –

коэффициент Клебша – Гордана.

Поле $\psi^{(j_1,j_2)}_{d}(x)$ является обобщенным свободным полем, и может быть представлено в виде

$$\psi^{(j_1,j_2)d}(x) = \sum_{s=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \int_0^\infty dm^2 (m^2)^{\frac{d-2}{2}} \psi^{(j_1,j_2)}_{m,s}(x),$$

где $\psi^{(j_1,j_2)}_{m,s}(x)$ – свободное релятивистское поле с массой m и спином s /13/.

Коммутатор (антикоммутатор) полей (4.2) имеет вид:

$$\left\{ \psi^{(j_1,j_2)d}_{\sigma\Sigma}(x), \quad \overset{+}{\psi}{}^{(j_1,j_2)d}_{\lambda\nu}(y) \right\}_{\pm} = \frac{1}{i} \Delta^{(j_1,j_2)d}_{\sigma\Sigma,\lambda\nu}(x-y), \tag{4.3}$$

где

$$\Delta^{(j_1,j_2)d}_{\sigma\Sigma,\lambda\nu}(z) = \frac{2}{\pi} 2^{2(d-2-j_1-j_2)} \frac{\Gamma(d-j_1-j_2)}{\Gamma(-d+2+j_1+j_2)} \times$$

$$\times \Pi^{(j_1)}_{\sigma\lambda}(i\partial)\, \overline{\Pi}^{(j_2)}_{\Sigma\nu}(i\partial) \quad \varepsilon(z_0) \frac{\theta(z^2)}{(z^2)^{d-j_1-j_2}}.$$

Матрица $\Pi^{(j)}_{\sigma\Sigma}(i\partial) = t^{\mu_1\ldots\mu_{2j}}_{\sigma\Sigma} \cdot i\partial_{\mu_1} \ldots i\partial_{\mu_{2j}}$,

где $t^{\mu_1\ldots\mu_{2j}}_{\sigma\Sigma}$ –бесследный симметричный тензор /14/,

$\overline{\Pi}(i\partial) = \Pi(i\partial_0, -i\vec{\partial})$.

При вычислении (4.3) предполагалось

$$\mp(-1)^{j_1+j_2} = -$$

Поля $\psi^{(j_1,j_2)d}(x)$ и $\psi^{(j_2,j_1)(4-d)}(x)$ преобразуются по эквивалентным представлениям и связаны соотношениями

$$\psi^{(j_1,j_2)d}_{\sigma\Sigma}(x) = \int d^4y \frac{1}{i} \Delta^{(j_1,j_2)d}_{\sigma\Sigma,\lambda\nu}(x-y)\, \psi^{(j_2,j_1)(4-d)}_{\lambda\nu}(y), \tag{4.4}$$

$$\left\{ \psi^{(j_1,j_2)d}_{\sigma\Sigma}(x), \quad \overset{+}{\psi}{}^{(j_2,j_1)(4-d)}_{\lambda\nu}(y) \right\}_{\pm} = \delta_{\sigma\lambda}\delta_{\Sigma\nu}\varepsilon(x_0-y_0)\delta'((x-y)^2).$$

Для одно- и двузначных представлений ($d = 2+j_1+j_2+n$, $n=0,1,2,\ldots$) имеем

$$\Delta^{(j_1,j_2)d}_{\sigma\Sigma,\lambda\nu}(z) = \frac{2}{\pi}(-\Box)^{d-2-j_1-j_2} \times$$

$$\times \Pi^{(j_1)}_{\sigma\lambda}(i\partial)\, \overline{\Pi}^{(j_2)}_{\Sigma\nu}(i\partial)\; \varepsilon(z_0)\, \delta'(z^2).$$

Из (4.4) следует

$$\psi^{(j_1,j_2)d}_{\sigma\tau}(x) = (-\Box)^{d-2-j_1-j_2}\, \Pi^{(j_1)}_{\sigma\sigma'}(i\partial)\times$$

$$\times\, \bar{\Pi}^{(j_2)}_{\tau\tau'}(i\partial)\, \psi^{(j_2,j_1)(4-d)}_{\sigma'\tau'}(x).$$

В заключение выпишем закон преобразования при R – инверсии

$$U(R)\, \psi^{(j_1,j_2)d}_{\sigma\tau}(x)\, U^{-1}(R) =$$

$$= \eta_R \frac{\Pi^{(j_1)}_{\sigma\sigma'}(x)\, \bar{\Pi}^{(j_2)}_{\tau\tau'}(x)}{(x^2)^{d+j_1+j_2}}\, \psi^{(j_2,j_1)d}_{\sigma'\tau'}\left(\frac{x_\mu}{x^2}\right).$$

В случае $j_1=0$ либо $j_2=0$ (вырожденные представления) получаем результаты работы /11/.

Литература

1. Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик. ЯФ (в печати) 1973.
2. М.Я.Пальчик. Препринт № 11 ИАЭ СО АН СССР (1973).
3. Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик. ДАН СССР (в печати) 1973.
4. Tsu Yao, J. Math. Phys., 8, 1931 (1967).
5. Tsu Yao, J. Math. Phys., 9, 1615 (1968).
6. Tsu Yao, J. Math. Phys., 12, 315 (1971).
7. А.Н.Лезнов, И.А.Федосеев. ТМФ, 5, 181 (1970).
8. N.W. Macfadyen, J. Math. Phys., 12, 1436 (1971).
9. N.W. Macfadyen, Nuovo Cim., A10, 268 (1972).
10. N.W. Macfadyen, J. Math. Phys., 14, 57, 638 (1973).
11. Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 19-73, (1973).
12. S. Ferrara, A.F. Grillo, R. Gatto, Ann. Phys. (N.Y.), 76, 161 (1973).
13. Wu K.T., Phys. Rev., 156, 1385 (1967).
14. S. Weinberg, Phys. Rev., 133B, 1318 (1964).

Ответственный за выпуск С.Н.РОДИОНОВ
Подписано к печати 19.XI-73г. МН 17035
Усл. 0,7 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ №98.
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг.