

# **И Н С Т И Т У Т ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 105

**М.М.Карлинер**

## **КОГЕРЕНТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА В ЭЛЕКТРОННЫХ НАКОПИТЕЛЯХ ВСЛЕДСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СТРУКТУРОЙ**

**1. Когерентные движения пучка в накопителе**

**Новосибирск**

**1974**

КОГЕРЕНТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА В ЭЛЕКТРОННЫХ НАКОПИТЕЛЯХ ВСЛЕДСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СТРУКТУРОЙ

1. Когерентные движения пучка в накопителе

А Н Н О Т А Ц И Я

Данная работа представляет собой первую часть исследования по когерентным неустойчивостям пучка в электронных накопителях. В работе рассмотрены когерентные движения пучка под действием внешнего электромагнитного поля, а также вычислены электромагнитные поля, возникающие вследствие когерентных движений пучка.

- $P_0$  - продольные колебания равновесной системы.
- $P_{\pm 1}$  - быстрое колебание продольного амплитуда.
- $Q$  - кратность частоты ускоряющего напряжения.
- $R$  - средняя радиус равновесной орбиты.
- $R_{\text{пр}}$  - радиусе спиральной ускорительного резонатора.
- $R_{\text{вн}}, X_{\text{вн}}$  - индукция и реактивная составляющие внешнего магнитного поля.
- $U_0$  - амплитуда поля частоты, действующая в электронном пучке.
- $V$  - орбитальная скорость частиц в накопителе.
- $x, y, z$  - соответственно горизонтальная (вертикальная), радиальная и продольная координаты в системе координат равновесной частицы.

# СОДЕРЖАНИЕ

|  | стр. |
|--|------|
| <b>В в е д е н и е</b> .....   | 5    |
| <b>1. Когерентные движения пучка в накопителе</b> .....  | 8    |
| 1.1. Уравнения движения заряженной частицы в накопителе под действием возмущений .....                       | 8    |
| 1.2. Модели когерентного движения .....  | 18   |
| 1.3. Электромагнитные поля, возбуждаемые когерентными движениями пучка, .....                                | 23   |
| 1.3.1. Резонансные системы .....   | 28   |
| 1.3.2. Волновые системы .....  | 31   |
| 1.3.3. Квазистатические системы .....  | 36   |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Вывод уравнений движения частиц в накопителе под действием возмущающих сил</b> .....        | 38   |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Возбуждение поперечной (ТЕМ) волны в двухпроводной линии пучком заряженных частиц</b> ..... | 42   |
| <b>Л и т е р а т у р а</b> .....   | 46   |

## СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $A_{mn}(\psi)$  - амплитуда  $n$ -й гармоники разложения функции  $e^{i\frac{m\psi}{R}}$  в ряд Фурье по  $\psi$ .
- $B_x, B_y, B_z$  - компоненты вектора индукции переменного магнитного поля.
- $E_x, E_y, E_z$  - компоненты вектора напряженности переменного электрического поля.
- $E_s$  - энергия частицы на равновесной орбите.
- $f(x, p, t)$  или  $f(\psi, J, t)$  - функция распределения.
- $F(x, p, s)$  или  $F(\psi, J, s)$  - Лаплас-изображение функции распределения (по времени).
- $\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z$  - гамильтонианы движения по соответствующим степеням свободы.
- $I_0$  - средний ток пучка.
- $J_x, J_y, J_z$  - канонические переменные действия.
- $\vec{j}$  - вектор плотности тока.
- $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$  - обозначение прямого и обратного преобразования Лапласа.
- $L$  - длина отрезка двухпроводной линии, взаимодействующей с пучком.
- $l$  - продольная координата в лабораторной системе.
- $m_s$  - масса равновесной частицы.
- $M$  - эквивалентная масса продольных колебаний.
- $N$  - число частиц в накопителе.
- $P_x, P_y, P_z$  - канонические импульсы по соответствующим степеням свободы.
- $P_0$  - продольный импульс равновесной частицы.
- $P_{z\delta}$  - быстрое изменение продольного импульса.
- $q$  - кратность частоты ускоряющего напряжения.
- $R$  - средний радиус равновесной орбиты.
- $R_0$  - шунтовое сопротивление ускоряющего резонатора.
- $R_{mn}^{\pm}, X_{mn}^{\pm}$  - активная и реактивная составляющие импеданса на частотах  $m\omega_0 \pm n\Omega$ .
- $U_0$  - энергия покоя частицы, выраженная в электронвольтах.
- $v$  - орбитальная скорость частицы в накопителе.
- $x, y, z$  - соответственно аксиальная (вертикальная), радиальная и продольная координаты в системе покоя равновесной частицы.

$Z(s)$  - импеданс.

$Z_0$  - волновое сопротивление двухпроводной линии передачи.

$\alpha$  - коэффициент расширения орбит.

$\gamma$  - постоянная распространения в двухпроводной линии.

$\gamma_s$  - отношение массы равновесной частицы к её массе покоя.

$\Gamma_1, \Gamma_2$  - коэффициенты отражения нагрузок двухпроводной линии.

$\varepsilon(\alpha)$  - единичная функция Хевисайда.

$\mu$  - магнитная проницаемость.

$\nu_x, \nu_y, \nu_z$  - относительные частоты поперечных, продольных колебаний.

$\psi_x, \psi_y, \psi_z$  - канонические угловые переменные.

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  - собственные угловые частоты колебаний.

$\omega_0$  - угловая частота обращения частицы на равновесной орбите.

## ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 60-х годов довольно широкое развитие приобретают физические эксперименты с использованием накопителей заряженных частиц, в частности, электронов и позитронов. В этих накопителях частицы могут длительное время обращаться по замкнутым орбитам, что позволяет выполнять весьма тонкие эксперименты по физике высоких энергий, такие как эксперименты на встречных пучках /1-4/, эксперименты на тонких мишенях /5/ и др. Циркулирующие в накопителе пучки электронов могут также использоваться в качестве источников интенсивного коротковолнового электромагнитного излучения, которые необходимы для различного рода исследований (см., например, /6/).

Одной из важных задач дальнейшего усовершенствования накопителей является увеличение интенсивности длительно удерживаемых в них пучков. Существует ряд факторов, ограничивающих интенсивность пучка в накопителе.

Одним из существенных факторов является когерентное электромагнитное взаимодействие потока заряженных частиц в накопителе с окружающей их материальной структурой: со стенками вакуумной камеры, с ионно-отсасывающими и инфлекторными пластинами, с ускоряющей системой и различными полостями и т.д. Интенсивность пучка при этом может ограничиваться либо вследствие невозможности накопления или удержания в накопителе частиц, количество которых превышает некоторый порог, либо вследствие ухудшения качества пучка: увеличения поперечных или продольных размеров, уменьшения времени жизни и др.

Когерентное электромагнитное взаимодействие частиц с окружающей структурой имеет место при условии, что частицы группируются в некоторые образования, определенным образом фазированные относительно наведенных пучком электромагнитных полей. Так, например, под действием в.ч. поля, необходимого для компенсации потерь энергии на синхротронное излучение, электроны или позитроны группируются в сгустки сравнительно малой азимутальной протяженности. Благодаря такой группировке сгустки могут наводить в окружающей структуре значительные электромагнитные поля, теряя на это часть своей энергии. Потери энергии, приходящиеся на одну частицу, пропорциональны общему количеству удерживаемых частиц, что накладывает ограничение на интенсивность пучка. Кроме того, наведенные поля могут существенно изменить режим автофазировки частиц /7/, приводя тем самым к потерям части пучка и, таким образом, ограничивая его интенсивность.

Другим видом когерентного электромагнитного взаимодействия пучка с окружающей структурой является самовозбуждение продольных (синхротронных) или поперечных (бетатронных) колебаний. В этом случае под действием наведенного пучком электромагнитного поля происходит группировка "частиц" в фазовом пространстве соответствующих колебаний, в результате чего наведенные поля и колебания нарастают. Это приводит к явлениям неустойчивости когерентных колебаний пучка.

Простейшим примером такой неустойчивости может служить неустойчивость синхротронных колебаний /8/, которая впервые была обнаружена в ходе запуска установок встречных пучков в Новосибирске. Линеаризованное уравнение синхротронных колебаний, как известно, имеет вид /8/

$$\ddot{\psi} + \frac{\omega_s}{2\pi} \frac{dW}{dE} \dot{\psi} + \Omega_0^2 \psi = 0,$$

где  $\omega_s$  - угловая частота обращения частиц,  
 $W$  - потери энергии (в электрон-вольтах) за один оборот,  
 $E$  - энергия частицы (в электрон-вольтах). Потери энергии складываются из когерентных и некогерентных (коротковолновых) потерь на излучение

$$W = W^{\text{неког}} + W^{\text{ког}}$$

Магнитная система накопителя обеспечивает выполнение условия  $\frac{dW^{\text{неког}}}{dE} > 0$ ;

поэтому когерентные колебания затухают. Что касается когерентных потерь, то они пропорциональны току пучка

$$W^{\text{ког}} = I_0 \cdot R_a(\omega, y),$$

где  $R_a(\omega, y)$  - сопротивление потерь, являющееся функцией мгновенной частоты обращения сгустка  $\omega$  и радиального отклонения мгновенной орбиты от равновесного положения  $y$ .

Поэтому

$$\frac{dW^{\text{ког}}}{dE} = I_0 \cdot \left( \frac{\partial R_a}{\partial \omega} \cdot \frac{d\omega}{dE} + \frac{\partial R_a}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dE} \right).$$

Так как

$$y + R = \frac{c}{\omega}, \quad R - \text{радиус равновесной орбиты,}$$

то

$$\frac{dy}{dE} = -\frac{c}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dE}$$

и

$$\frac{dW^{\text{ког}}}{dE} = I_0 \left( \frac{\partial R_a}{\partial \omega} - \frac{c}{\omega^2} \frac{\partial R_a}{\partial y} \right) \cdot \frac{d\omega}{dE}.$$

Учитывая, что

$$\frac{d\omega}{dE} = -\alpha \frac{\omega_0}{E_s},$$

получаем окончательно

$$\frac{dW^{\text{ког}}}{dE} = -\frac{\alpha \omega_0 I_0}{E_s} \left( \frac{\partial R_a}{\partial \omega} - \frac{c}{\omega_0^2} \frac{\partial R_a}{\partial y} \right).$$

Синхротронные колебания устойчивы, если  $\frac{dW}{dE} > 0$ .

Отсюда следует условие устойчивости когерентных колебаний

$$\frac{\alpha I_0 \omega_0^2 \tau_c}{4\pi E_s} \left( \frac{\partial R_a}{\partial \omega} - \frac{c}{\omega_0^2} \frac{\partial R_a}{\partial y} \right) < 1,$$

ограничивающее величину накопленного тока. В этом неравенстве  $\tau_c =$

$$= 2 \cdot \left( \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{dW^{\text{неког}}}{dE} \right)^{-1}$$

- постоянная времени радиационного затухания. Если обеспечить при проектировании установки выполнение условия

$$\frac{\partial R_a}{\partial \omega} - \frac{c}{\omega^2} \frac{\partial R_a}{\partial y} < 0,$$

то условие устойчивости выполняется при любом токе, и указанное ограничение исчезает.

Отсюда видно, насколько важен учет условий устойчивости пучка при проектировании, а также при запуске и наладке установки.

В Институте ядерной физики Сибирского отделения АН СССР (г.Новосибирск) в ходе строительства и запуска электрон-позитронных накопителей ВЭП-1, ВЭПП-2, ВЭПП-3, ВЭПП-2М проводились теоретические и экспериментальные исследования явлений когерентного электромагнитного взаимодействия пучков с окружающей структурой, позволившие в какой-то степени понять основные детали этих явлений.

Предлагаемая работа является результатом участия автора в этих исследованиях /10/. В работе речь идет об электрон-позитронных накопителях, в которых вследствие наличия ускоряющего в.ч. напряжения и радиационного затухания частицы обычно сгруппированы в сравнительно короткие сгустки в отличие, например, от протонных накопителей, где частицы могут распределяться более или менее равномерно вдоль равновесной орбиты. С другой стороны, многие полученные здесь результаты пригодны также для циклических ускорителей как легких, так и тяжелых релятивистских частиц, где ускоряемые частицы сгруппированы в сгустки.

Когерентное взаимодействие сплошных (несгруппированных) пучков с окружающей структурой в этой работе не рассматривается, так как на эту тему имеется большое количество работ. Отметим, что методы, изложенные в данной работе, могут быть применены также к анализу устойчивости не сгруппированных в сгустки пучков.

Материал работы разделен на три части.

В 1-й части рассмотрены когерентные движения пучка в накопителе. Этот вопрос имеет два аспекта. А именно, с одной стороны когерентные движения возбуждаются в результате действия на пучок электромагнитных полей. С другой стороны при когерентном движении пучка наводятся электромагнитные поля в окружающей пучок материальной структуре. Обе эти стороны процесса когерентного движения рассмотрены в первой части.

Во 2-й части исследуется устойчивость продольных (радиально-фазовых) колебаний на основе принятых моделей когерентных движений: модели макрочастиц и модели непрерывной среды. Исследование основано на применении приближенных методов: метода усреднения, линеаризации уравнения Власова и т.д.

В 3-й части аналогичное исследование проводится для поперечных колебаний.



## 1. КОГЕРЕНТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

Частица в накопителе представляет собой осциллятор с тремя степенями свободы, совершающий орбитальное движение.

Колебания осциллятора происходят в трех взаимно-перпендикулярных направлениях: поперечном - аксиальные (вертикальные) и радиальные - и продольном. Продольные колебания частицы сопровождаются изменениями импульса, в связи с чем периодически изменяется также её радиальное положение.

Когерентными движениями мы будем в дальнейшем называть упорядоченные колебания множества таких осцилляторов. При когерентном движении распределение фаз колебаний осцилляторов подчиняется некоторому закону, в результате чего имеет место группировка частиц в фазовом пространстве колебаний.

Когерентное движение может возникать как при свободных колебаниях частиц, если задано определенное распределение начальных фаз и амплитуд, так и при вынужденных колебаниях под действием электромагнитного поля, в котором находятся все или большая часть осцилляторов. При свободных колебаниях вследствие разброса частот отдельных осцилляторов может происходить раскогерентивание (потеря когерентности), которое формально можно рассматривать как затухание когерентного движения, хотя колебания отдельных частиц могут быть незатухающими или затухать значительно медленнее. Отметим еще, что вынужденные колебания оказываются когерентными, если они совершаются под действием электромагнитных полей, длина волны которых много больше среднего расстояния между частицами. Коротковолновое синхротронное излучение электронов и позитронов вызывает некогерентные колебания отдельных частиц.

Когерентные движения частиц могут происходить под действием электромагнитного поля, возникающего вследствие этого же когерентного движения. В этом случае в зависимости от свойств окружающей структуры когерентные колебания могут усиливаться или, наоборот, ускоренно затухать. В первом случае имеет место неустойчивость соответствующего когерентного движения.

Анализ устойчивости когерентных движений производится по следующей схеме. Вначале находятся когерентные движения под действием заданного электромагнитного поля. Затем определяется электромагнитное поле, создаваемое пучком в результате когерентного движения, с учетом граничных условий на стенках окружающей пучок структуры. Приравнявая заданное электромагнитное поле наведенному полю, можно получить уравнения когерентного движения, на основе которых проводится анализ устойчивости.

В данной работе рассмотрены способы описания когерентных движений и определения наведенных электромагнитных полей для различных типов окружающих структур.

### § 1.1. Уравнения движения заряженной частицы в накопителе под действием возмущений

Описание когерентного движения, очевидно, может быть сделано на основе уравнений движения отдельной частицы. При этом уравнения должны включать в себя возмущающие воздействия, вызываемые переменными высокочастотными электромагнитными полями. В приложении П.1 приведен вывод уравнений движения частиц под действием возмущений. В данном разделе эти уравнения преобразуются к виду, удобному для применений. Полученные в П.1 уравнения движения, записанные в системе покоя равновесной частицы, имеют следующий

ВИД:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{p_0^2 K^2 n}{m_s} x + e(E_x - v B_y), \\ \dot{x} &= \frac{p_x}{m_s}, \\ \dot{p}_y &= -\frac{p_0^2 K^2 (1-n)}{m_s} y + \frac{p_0 K}{m_s} p_z + e(E_y + v B_x), \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{m_s}, \\ \dot{p}_z &= e E_z, \\ \dot{z} &= \frac{p_0}{m_s} \left( \frac{1}{\gamma_s^2} \frac{p_z}{p_0} - K y \right). \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Здесь  $x$ ,  $y$ ,  $z$  - соответственно аксиальная (вертикальная), радиальная и продольная координаты частицы в системе покоя;  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  - соответствующие импульсы, причем  $p_z = p - p_0$ ,  $p_0$  - импульс равновесной частицы, т.е. частицы, движущейся синхронно с высокочастотным ускоряющим полем,  $p$  - полный импульс,  $m_s$  - релятивистская масса равновесной частицы,  $n = n(\ell)$  - показатель спада магнитного поля;  $K = K(\ell)$  - кривизна равновесной орбиты для частицы с импульсом  $p_0$ . Составляющие электромагнитного поля в (1.1.1) должны быть вычислены в лабораторной системе координат, после чего производится формальная замена продольной координаты частицы вдоль равновесной орбиты  $\ell$  на переменную  $z$  с помощью соотношения  $\ell = z + vt$ .

Как видно из (1.1.1), радиальное и продольное движения связаны между собой\*. Возможно, однако, асимптотическое разделение этих движений, если учесть, что частота продольных колебаний, как правило, много меньше частоты поперечных колебаний.

Разделим продольное движение на медленное и быстрое

$$z = z_m + z_b, \quad p_z = p_{zm} + p_{zb}; \quad (1.1.2)$$

$m$  и  $b$  - индексы, обозначающие соответственно медленные и быстрые колебания. Ввиду различия частот очевидно, что

$$z_m \gg z_b, \quad p_{zm} \gg p_{zb}. \quad (1.1.3)$$

Как известно, при периодической фокусировке радиальное отклонение может быть представлено в виде [11/

$$\begin{aligned} y &= y_m \cdot \eta(\ell) + y_b, \\ p_y &= m_s \dot{y} = m_s \frac{d}{dt} (y_m \cdot \eta) + p_{yb}. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Функция  $\eta(\ell)$  определяется однозначно при нормировке  $\langle \eta(\ell) \rangle = 1$ . Знак  $\langle \rangle$  здесь и в дальнейшем обозначает усреднение по всей равновесной орбите.

Подставляя (1.1.2) и (1.1.4) в уравнение для  $\dot{p}_y$ , получим

\* За счет возможной зависимости переменных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  от поперечных координат уравнения поперечных движений также могут быть связаны.

$$m_s \frac{d^2}{dt^2} (y_M \eta) + \dot{p}_{y5} = - \frac{p_0^2 K^2 (1-n)}{m_s} (y_M \eta + y_5) + \frac{p_0 K}{m_s} (p_{xM} + p_{x5}) + e(E_y + \sqrt{B_x}). \quad (1.1.5)$$

Умножим это уравнение на  $\eta(l)$  и усредним за несколько оборотов, т.е. за время значительно большее периода быстрых колебаний, но малое по сравнению с периодом медленных колебаний. Тогда, учитывая, что

$$\frac{dn}{dt} = v \frac{dn}{dl} \quad \text{и} \quad \left\langle \frac{dn}{dl} \cdot \eta \right\rangle = 0,$$

а также пренебрегая малой величиной  $\ddot{y}_M$ , получим

$$\frac{p_0^2}{m_s} \cdot y_M \cdot \left\langle \frac{d^2 \eta}{dl^2} \eta \right\rangle = - \frac{p_0^2}{m_s} \cdot \left\langle K^2 (1-n) \eta^2 \right\rangle y_M + \quad (1.1.6)$$

$$+ \frac{p_0}{m_s} \langle K \cdot \eta \rangle p_{xM} + e(E_y + \sqrt{B_x}) \eta.$$

Черта сверху обозначает усреднение по времени. Усредненные по быстрому времени величины зависят лишь от координат медленного движения  $x_M$  и  $y_M$ , от амплитуд быстрых колебаний и медленного времени.

Из уравнения (1.1.6) получаем связь между величинами  $y_M$  и  $p_{xM}$ :

$$\frac{y_M}{R} = \alpha R \cdot \langle K \cdot \eta \rangle \frac{p_{xM}}{p_0} + \frac{e \alpha R m_s (E_y + \sqrt{B_x}) \eta}{p_0^2}, \quad (1.1.7)$$

где  $\alpha = R^{-2} \cdot \left\{ \left\langle \frac{d^2 \eta}{dl^2} \eta \right\rangle + \left\langle K^2 (1-n) \eta^2 \right\rangle \right\}^{-1}$ ,  $R$  - средний радиус равно-

весной орбиты. Величина  $\alpha$  есть не что иное, как известный коэффициент расширения орбит /11/. Заметим, что функция  $\eta(l)$  связана с обычно употребляемой функцией  $\psi(l)$  /11/ соотношением

$$\psi(l) = \alpha \cdot \eta(l).$$

Как показано в /11/:

$$\langle K \psi \rangle = \frac{\alpha}{R},$$

откуда следует, что

$$\langle K \eta \rangle = \frac{1}{R}.$$

Усреднение уравнений для  $\dot{p}_x$  и  $\ddot{x}$  дает

$$\dot{p}_{xM} = e \bar{E}_x, \quad (1.1.8)$$

$$\dot{z}_M = \frac{p_0}{m_s} \left( \frac{1}{\gamma_s^2} \frac{p_{xM}}{p_0} - \langle K\eta \rangle y_M \right).$$

Подставляя во второе уравнение  $y_M$  из (1.1.7) и учитывая, что  $\langle K\eta \rangle = \frac{1}{R}$ , получим

$$\dot{z}_M = \frac{p_{xM}}{M} - \frac{e\alpha R}{p_0} \overline{(E_y + vB_x)\eta}, \quad (1.1.9)$$

где  $M = m_s \left( \frac{1}{\gamma_s^2} - \alpha \right)^{-1}$  — эквивалентная масса продольного движения.

Вычитая первое уравнение (1.1.8) из предпоследнего уравнения (1.1.1) найдем уравнение для  $p_{x\delta}$ :

$$p_{x\delta} = e E_{x\delta}, \quad (1.1.10)$$

где  $E_{x\delta}$  — быстро изменяющаяся продольная составляющая электрического поля.

Итак, система уравнений для поперечных колебаний теперь приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{p_0^2 K^2 n}{m_s} x + e(E_x - vB_y), \\ \dot{x} &= \frac{p_x}{m_s}, \\ \dot{p}_y &= -\frac{p_0^2 K^2 (1-n)}{m_s} y + \frac{p_0 K}{m_s} p_{xM} + \frac{p_0 K}{m_s} p_{x\delta} + e(E_y + vB_x), \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{m_s}, \\ \dot{p}_{x\delta} &= e E_{x\delta}, \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

а уравнение продольных колебаний

$$\begin{aligned} \dot{p}_{xM} &= e \bar{E}_x, \\ \dot{z}_M &= \frac{p_{xM}}{M} - \frac{e\alpha R}{p_0} \overline{(E_y + vB_x)\eta}. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

В уравнения для поперечных колебаний переменная  $p_{xM}$  входит как медленно (адиабатически) изменяющийся параметр. Кроме явно входящей в уравнение для  $\dot{p}_y$  величины  $p_{xM}$ , от этого параметра, вообще говоря, зависят также масса поперечных колебаний и показатель магнитного поля (через  $y_M$ ), в результате чего при наличии продольных колебаний частота поперечных колебаний может периодически изменяться.

При исследовании устойчивости удобно иметь дело с медленно изменяющимися (по сравнению с периодом колебаний) переменными, в связи с чем целесообразно в полученных уравнениях перейти к каноническим переменным "действие-угол".

Рассмотрим вначале уравнения поперечных колебаний. Пары уравнений в (1.1.11) являются каноническими парами с гамильтонианами соответственно

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x &= \frac{p_x^2}{2m_s} + \frac{p_0^2 K^2 n}{m_s} \cdot \frac{x^2}{2} - \int (eE_x - e v B_y) dx = \\ &= \mathcal{H}_{x0}(x, p_x, l, p_{zm}) - \int (eE_x - e v B_y) dx, \\ \mathcal{H}_y &= \frac{p_y^2}{2m_s} + \frac{p_0^2 K^2 (1-n)}{m_s} \cdot \frac{y^2}{2} - v K p_{zm} y - \\ &\quad - \int (eE_y + e \frac{p_0}{m_s} B_x + v K p_{z\delta}) dy = \\ &= \mathcal{H}_{y0}(y, p_y, l, p_{zm}) - \int (eE_y + e \frac{p_0}{m_s} B_x + v K p_{z\delta}) dy, \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

где  $\mathcal{H}_{x0}(x, p_x, l, p_{zm})$  и  $\mathcal{H}_{y0}(y, p_y, l, p_{zm})$  - невозмущенные гамильтонианы, зависящие от медленно изменяющегося параметра  $p_{zm}$  и являющиеся периодическими функциями  $l$ . Как показано в [12], при этих условиях существуют канонические преобразования принятых ранее переменных к переменным "действие-угол"

$$x = x(\psi_x, J_x, l, p_{zm}), \quad p_x = p_x(\psi_x, J_x, l, p_{zm}), \quad (1.1.14)$$

$$y = \alpha \eta(l) R \cdot \frac{p_{zm}}{p_0} + y_0(\psi_y, J_y, l, p_{zm}), \quad p_y = p_y(\psi_y, J_y, l, p_{zm}) \quad (1.1.15)$$

так, что в новых переменных невозмущенные гамильтонианы не зависят от угловых переменных  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  и от переменной  $l$ .

Выясним теперь, как преобразуется каждая пара уравнений из (1.1.11) к новым переменным. Так как формулы преобразования (1.1.14) аксиальных переменных к переменным "действие-угол" содержат явно время (через  $l$  и  $p_{zm}$ ), то гамильтониан в новых переменных, например  $\bar{\mathcal{H}}_x$ , будет равен

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_x &= \mathcal{H}_{x0} + \frac{\partial W_x}{\partial t} - \int (eE_x - e v B_y) dx = \\ &= \bar{\mathcal{H}}_{x0} - \int (eE_x - e v B_y) dx, \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

где  $\bar{\mathcal{H}}_{x0}(J_x, p_x) = \mathcal{H}_{x0} + \frac{\partial W_x}{\partial t}$  - невозмущенный гамильтониан в новых переменных,  $W_x$  - производящая функция, вид которой в данном случае не иг-

рает релл.

С помощью нового гамильтониана можно получить уравнения в новых переменных

$$\dot{\psi}_x = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_x}{\partial J_x} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{x0}}{\partial J_x} - \frac{\partial}{\partial J_x} \int e(E_x - vB_y) dx, \quad (1.1.17)$$

$$\dot{J}_x = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_x}{\partial \psi_x} = \frac{\partial}{\partial \psi_x} \int e(E_x - vB_y) dx.$$

Так как интеграл в (1.1.17) не зависит от  $P_x$ , то

$$\frac{\partial}{\partial J_x} = \frac{\partial x}{\partial J_x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \psi_x} = \frac{\partial x}{\partial \psi_x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}.$$

Кроме того,  $\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{x0}}{\partial J_x} = \Omega_x(J_x, P_{zm})$  — угловая частота свободных аксиальных колебаний. С учетом сказанного получаем следующие уравнения аксиальных колебаний

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_x &= \Omega_x(J_x, P_{zm}) - e \frac{\partial x}{\partial J_x} \cdot (E_x - vB_y), \\ \dot{J}_x &= e \frac{\partial x}{\partial \psi_x} \cdot (E_x - vB_y). \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Аналогичным образом могут быть получены уравнения радиальных колебаний

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_y &= \Omega_y(J_y, P_{zm}) - e \frac{\partial y}{\partial J_y} \cdot (E_y + vB_x + \frac{vK}{e} P_{z\delta}), \\ \dot{J}_y &= e \frac{\partial y}{\partial \psi_y} \cdot (E_y + vB_x + \frac{vK}{e} P_{z\delta}). \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

$$\dot{P}_{z\delta} = eE_{z\delta},$$

отличающиеся от уравнений (1.1.18) наличием дополнительного члена с  $P_{z\delta}$ .

Перейдем теперь к уравнениям продольных колебаний (1.1.12). Электромагнитное поле, действующее на частицу, складывается из поля, синхронного с обращением равновесной частицы, и несинхронных полей. Синхронная часть поля в системе покоя равновесной частицы зависит лишь от координат  $y$  и  $z_m$ , в то время как несинхронная часть зависит также от времени. Синхронное поле создается ускоряющей системой или наводится пучком при отсутствии когерентных колебаний. Обозначим синхронные поля через  $\underline{E}$  и  $\underline{B}$ , а несинхронные — через  $\underline{E}$  и  $\underline{B}$ . Так как частота продольных колебаний обычно мала, то интерес представляют лишь те несинхронные поля, которые в системе покоя изменяются достаточно медленно.

При введенных обозначениях

$$\dot{P}_{zm} = e \left[ \underline{E}_z(y, z_m) + E_z(y, z_m, \tau) \right], \quad (1.1.20)$$

где  $\tau$  - время в сопровождающей системе координат (т.е. временная переменная, остающаяся после замены переменных  $\ell = z + vt$ ,  $t = \tau$ ). Вблизи равновесной орбиты можно, ограничиваясь линейными членами, записать разложение

$$\mathcal{E}_z(y, z_M) \cong \mathcal{E}_z(0, z_M) + \left. \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} \right|_{y=0} \cdot y, \quad (1.1.21)$$

$$E_z(y, z_M, \tau) \cong E_z(0, z_M, \tau) + \left. \frac{\partial E_z}{\partial y} \right|_{y=0} \cdot y.$$

Подставляя в (1.1.12), получим

$$\begin{aligned} \dot{P}_{z_M} &= e \left[ \mathcal{E}_{z_0}(z_M) + E_{z_0}(z_M, \tau) \right] + e \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{z_0}}{\partial y} + \frac{\partial E_{z_0}}{\partial y} \right) y, \\ \dot{z}_M &= \frac{P_{z_M}}{M} - \frac{e \alpha R}{p_0} \left( \mathcal{E}_y + \nu B_x + E_y + \nu B_x \right) \eta, \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

где  $v = \frac{p_0}{m\gamma}$  - орбитальная скорость частицы, а нулевые индексы у составляющих поля и производных означают, что в соответствующих выражениях после выполнения всех операций следует подставить  $y = 0$ .

Перейдем теперь в (1.1.22) к каноническим переменным "действие-угол" -  $\psi_z, J_z$ , считая все члены в правых частях (1.1.22), кроме первых, возмущениями. Невозмущенная система

$$\begin{aligned} \dot{P}_{z_M} &= e \mathcal{E}_{z_0}(z_M), \\ \dot{z}_M &= \frac{P_{z_M}}{M} \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

является канонической, поэтому существует каноническое преобразование к указанным переменным.

Переходя к новым переменным, уравнения (1.1.22), можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{z_M} &= \frac{\partial P_{z_M}}{\partial J_z} \cdot \dot{J}_z + \frac{\partial P_{z_M}}{\partial \psi_z} \cdot \dot{\psi}_z = - \frac{\partial \mathcal{H}_{z_0}}{\partial z_M} + e E_{z_0}(z_M, \tau) + e \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{z_0}}{\partial y} + \frac{\partial E_{z_0}}{\partial y} \right) y, \\ \dot{z}_M &= \frac{\partial z_M}{\partial J_z} \cdot \dot{J}_z + \frac{\partial z_M}{\partial \psi_z} \cdot \dot{\psi}_z = \frac{\partial \mathcal{H}_{z_0}}{\partial P_{z_M}} - \frac{e \alpha R}{p_0} \left( \mathcal{E}_y + \nu B_x + E_y + \nu B_x \right) \eta, \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

где  $\mathcal{H}_{z_0}$  - невозмущенный гамильтониан. Решая эту систему уравнений относительно  $\dot{J}_z$  и  $\dot{\psi}_z$  и учитывая, что определитель системы вследствие каноничности преобразования равен 1, а также, что

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{z_0}}{\partial P_{z_M}} \cdot \frac{\partial P_{z_M}}{\partial J_z} + \frac{\partial \mathcal{H}_{z_0}}{\partial z_M} \cdot \frac{\partial z_M}{\partial J_z} = \frac{\partial \mathcal{H}_{z_0}}{\partial J_z} = \Omega_z(J_z),$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{z_0}}{\partial P_{z_M}} \cdot \frac{\partial P_{z_M}}{\partial \psi_z} + \frac{\partial \mathcal{H}_{z_0}}{\partial z_M} \cdot \frac{\partial z_M}{\partial \psi_z} = \frac{\partial \mathcal{H}_{z_0}}{\partial \psi_z} = 0,$$

получим следующие уравнения продольного движения в переменных "действительный угол":

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_z &= \Omega_z(J_z) - e \frac{\partial x_M}{\partial J_z} E_{z0} - e \frac{\partial x_M}{\partial J_z} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{z0}}{\partial y} + \frac{\partial E_{z0}}{\partial y} \right) y - \frac{e \alpha R}{\rho_0} \frac{\partial p_{zM}}{\partial J_z} \cdot \\ &\quad \cdot (\mathcal{E}_y + v B_x + E_y + v B_x) \eta, \\ \dot{J}_z &= e \frac{\partial x_M}{\partial \psi_z} E_{z0} + \frac{\partial x_M}{\partial \psi_z} e \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{z0}}{\partial y} + \frac{\partial E_{z0}}{\partial y} \right) y + \frac{e \alpha R}{\rho_0} \frac{\partial p_{zM}}{\partial \psi_z} \cdot \\ &\quad \cdot (\mathcal{E}_y + v B_x + E_y + v B_x) \eta. \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Рассмотрим более подробно второе из этих уравнений. Так как  $y_M \approx \frac{\alpha R}{\rho_0} p_{zM}$  то

$$\frac{\alpha R}{\rho_0} \frac{\partial p_{zM}}{\partial \psi_z} = \frac{\partial y_M}{\partial \psi_z}.$$

Подставляя, получим второе уравнение в виде

$$\begin{aligned} \dot{J}_z &= e \frac{\partial x_M}{\partial \psi_z} E_{z0} + e \frac{\partial x_M}{\partial \psi_z} y_M \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{z0}}{\partial y} + \frac{\partial E_{z0}}{\partial y} \right) \eta + \\ &\quad + e \frac{\partial y_M}{\partial \psi_z} \cdot (\mathcal{E}_y + v B_x + E_y + v B_x) \eta. \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

Заметим, что составляющие электромагнитного поля в (1.1.26) зависят от  $\psi_z$  и медленного времени  $\tau$ . Можно, однако, в нулевом приближении положить  $\tau = \frac{\psi_z}{\Omega_z}$ , и тогда составляющие поля в (1.1.26) оказываются зависящими только от  $\psi_z$ . В последующем изложении предполагается, что такая замена произведена.

Последнее слагаемое в правой части (1.1.26) может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_M}{\partial \psi_z} \cdot (\mathcal{E}_y + v B_x + E_y + v B_x) \eta &= \frac{\partial}{\partial \psi_z} [y_M (\mathcal{E}_y + v B_x + E_y + v B_x) \eta] - \\ - y_M \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_z} (\mathcal{E}_y + v B_x + E_y + v B_x) \eta &= \frac{\partial}{\partial \psi_z} [y_M (\mathcal{E}_y + v B_x + E_y + v B_x) \eta] - \\ - y_M \cdot \frac{\partial x_M}{\partial \psi_z} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} + v \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + v \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) \eta, \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

если, в линейном по полю приближении, положить, что  $\mathcal{E}_y, E_y, B_x$  и  $B_x$



не зависят от поперечной координаты. Можно показать, что отбрасываемые при этом члены имеют порядок  $(\frac{\Omega_x}{\omega_0})^2$  и выше относительно сохраняемых членов.

Подставляя (1.1.27) в уравнение (1.1.26) и перегруппируя слагаемые, получим

$$j_z = e \frac{\partial z_m}{\partial \psi_z} E_{z0} + e y_m \cdot \frac{\partial z_m}{\partial \psi_z} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{z0}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} + v \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial z} \right) \eta + \quad (1.1.28)$$

$$+ e y_m \cdot \frac{\partial z_m}{\partial \psi_z} \cdot \left( \frac{\partial E_{z0}}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - v \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \eta + e \frac{\partial}{\partial \psi_z} \left[ y_m (\mathcal{E}_y + v \mathcal{B}_x + E_y + v B_x) \eta \right],$$

где можно считать, что все производные полей берутся при  $y = 0$ . Так как  $J_z$  изменяется медленно, то в правой части (1.1.28) можно отбросить все члены, которые при усреднении по периоду колебаний ( $0 < \psi_z < 2\pi$ ) дают нуль. В частности, последний член может быть опущен, так как он представляет собой полную производную по  $\psi_z$  от периодической по этой переменной функции.

Электромагнитные поля в лабораторной системе удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = - \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.1.29)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.1.30)$$

то, как легко видеть, из (1.1.29) следует, что

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} - v \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial \tau}, \quad (1.1.31)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - v \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial \tau}. \quad (1.1.32)$$

Так как  $B_x$  — составляющая синхронного поля, то в сопровождающей системе координат  $B_x$  может иметь только быструю зависимость от времени. Поэтому  $\frac{\partial B_x}{\partial \tau}$  при усреднении дает нуль. В результате (1.1.28) сводится к следующему уравнению

$$j_z = e \frac{\partial z_m}{\partial \psi_z} E_{z0} + e y_m \frac{\partial z_m}{\partial \psi_z} \frac{\partial B_x}{\partial \tau} \eta. \quad (1.1.33)$$

Второе слагаемое в правой части этого уравнения, как можно показать, мало по сравнению с первым. Действительно, так как для медленно изменяющихся величин  $\frac{\partial}{\partial \tau} = \Omega_x \frac{\partial}{\partial \psi_z}$ , то второе слагаемое может быть преобразовано

к виду

$$\frac{\Omega_z}{\omega_0} \cdot \frac{y_m}{R} e v \frac{\partial B_x}{\partial \psi_z} \cdot \frac{\partial z_m}{\partial \psi_z} \quad (1.1.34)$$

Если даже предположить, что  $E_{z0} \cong v \frac{\partial B_x}{\partial \psi_z}$ , то второе слагаемое содержит произведение двух малых величин

$$\frac{\Omega_z}{\omega_0} \cdot \frac{y_m}{R}$$

и поэтому также может быть опущено:

$$\dot{J}_z = e \frac{\partial z_m}{\partial \psi_z} \cdot E_{z0} \quad (1.1.35)$$

Таким образом, скорость роста (или затухания) амплитуды продольных колебаний определяется только продольным электрическим полем на равновесной орбите. Радиальная зависимость этого поля на рост или затухание не влияет.

Аналогичный результат для синхронных составляющих поля был ранее получен А.Н. Диденко и А.Н. Лебедевым [13,14]. Как показано выше, для несинхронных полей это свойство выполняется приближенно.

Что касается первого из уравнений (1.1.25), то действуя таким же методом, можно привести его к виду

$$\dot{\psi}_z = \Omega_z(J_z) - e \frac{\partial z_m}{\partial J_z} \cdot E_{z0} + \frac{e \alpha R}{\rho_0} \cdot \frac{\partial}{\partial J_z} \left[ \overline{P_{zm} (E_y + v B_x + E_y + v B_x) \eta} \right], \quad (1.1.36)$$

откуда следует, что поперечные составляющие поля влияют на частоту колебаний.

Такое упрощение уравнений значительно облегчает в дальнейшем анализ устойчивости продольных колебаний.

Приведем в окончательном виде систему уравнений в переменных "действие-угол". При этом для сокращения записи опустим индекс "м" у величин  $J$  и  $P_z$  и сохраним его лишь для величины  $y_m$ :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_x &= \Omega_x(J_x, P_z) - e \frac{\partial x}{\partial J_x} (E_x - v B_y), \\ \dot{J}_x &= e \frac{\partial x}{\partial \psi_x} (E_x - v B_y), \\ \dot{\psi}_y &= \Omega_y(J_y, P_z) - e \frac{\partial y}{\partial J_y} \cdot \left( E_y + v B_x + \frac{P_z \delta}{eR} \right), \\ \dot{J}_y &= e \frac{\partial y}{\partial \psi_y} \cdot \left( E_y + \frac{P_0}{m_s} B_x + \frac{P_z \delta}{eR} \right), \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

$$\dot{p}_{z\delta} = e E_{z\delta}.$$

$$\dot{\psi}_z = \Omega_z(J_z) - e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J_z} E_{z0} - \frac{e \alpha R}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial J_z} [P_z(\mathcal{E}_y + v B_x + E_y + v B_x) \rho],$$

$$\dot{J}_z = e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_z} E_{z0}.$$

Здесь в уравнениях для радикального движения мгновенная кривизна  $K$  заменена средней  $K_0 = \frac{1}{R}$ . Уравнения (1.1.37) не учитывают радиационное "трение", вызывающее затухание колебаний, которое может быть введено в канонические уравнения лишь искусственно с помощью формальных приемов [15]. В нашем случае удобнее учесть затухание путем введения комплексной частоты в дальнейшем, при анализе устойчивости.

Для применения уравнения (1.1.37) необходимо еще знать конкретные формулы преобразования к каноническим переменным, которые, естественно, зависят от характера нелинейности колебаний и от свойств фокусирующей системы. Для линейных колебаний с постоянной фокусировкой эти соотношения имеют простейший вид

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}} \sin \psi_x; & p_x &= \sqrt{2m_s \Omega_x J_x} \cos \psi_x, \\ y &= y_M + \sqrt{\frac{2J_y}{m_s \Omega_y}} \sin \psi_y; & p_y &= \sqrt{2m_s \Omega_y J_y} \cos \psi_y, \\ z &= \sqrt{\frac{2J_z}{M \Omega_z}} \sin \psi_z; & p_z &= M \sqrt{\frac{2\Omega_z J_z}{M}} \cos \psi_z, \\ y_M &= \frac{\alpha R}{\rho_0} p_z = \frac{\Omega_z}{M \omega_0} \sqrt{\frac{2M J_z}{\Omega_z}} \cos \psi_z. \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

В выражении для  $p_z$  и  $y_M$  масса  $M$  не внесена под радикал, поскольку масса  $M$  может быть отрицательна. Подкоренное выражение всегда положительно, т.к. при  $M < 0$  также  $J_z < 0$ .

Оказывается, что большинство когерентных эффектов может быть с достаточной для практики точностью изучено в предположении, что справедливы преобразования (1.1.38), т.е. в квазилинейном приближении. Необходимо лишь учитывать зависимость частоты колебаний от действия и продольного импульса:

$$\Omega_x = \Omega_x(J_x, p_z); \quad \Omega_y = \Omega_y(J_y, p_z); \quad \Omega_z = \Omega_z(J_z).$$

При этом нелинейность учитывается в "усредненном" виде.

## § 1.2. Модели когерентного движения

Колебания частиц-осцилляторов в накопительном кольце могут быть описаны, в принципе, системой уравнений, включающей в себя по шесть уравнений (1.1.37) для каждой частицы и состоящей, следовательно, из  $6N$  уравнений, где  $N$  - число частиц в пучке.

Пучок в накопителе имеет, таким образом,  $6N$  степеней свободы.

Для исследования когерентных, т.е. упорядоченных, движений, необходимо, очевидно, выделить сравнительно небольшое число коллективных степеней свободы пучка. Поэтому при анализе устойчивости приходится иметь дело с теми или иными моделями пучка, которые отражают его существенные свойства. Весьма плодотворными, в частности, оказались две модели, получаемые в результате предельного перехода в противоположных направлениях — модель пучка как непрерывной среды и модель макрочастиц.

Для описания свойств пучка может быть введена одночастичная функция плотности  $f(X_k, P_k, t)$  <sup>\*</sup> в 6-мерном фазовом пространстве переменных "координата-импульс" в системе покоя равновесной частицы. Так как каждая частица (в классическом приближении) имеет определенную координату и импульс, то функция плотности представляет собой сумму  $\delta$ -функций координат и импульсов, а моменты и средние величины вычисляются с помощью функции плотности путем суммирования. Переходя к пределу при неограниченном увеличении числа частиц, можно заменить суммирование интегрированием; пучок представляется при этом моделью в виде непрерывной среды, описываемой одночастичной функцией плотности  $f(X, P, t)$ , получающейся в результате перехода от суммирования к интегрированию. Здесь  $X, P$  — переменные  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$  в системе покоя равновесной частицы.

Количество частиц, заключенных в фазовом объеме  $dXdP$ , выражается через функцию плотности следующим образом

$$dN = N \cdot f(X, P, t) dXdP, \quad (1.2.1)$$

где  $N$  — полное число частиц в пучке. Функция плотности, таким образом, предполагается нормированной к единице:

$$\int f(X, P, t) dXdP = 1, \quad (1.2.2)$$

причем интегрирование производится по всей области шестимерного фазового пространства, занятой пучком. Через функцию плотности могут быть выражены объемная плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\vec{j}$  (в системе покоя равновесной частицы):

$$\rho(X, t) = eN \int f(X, P, t) dP, \quad \vec{j} = eN \int \vec{v} \cdot f(X, P, t) dP; \quad (1.2.3)$$

здесь  $\vec{v}$  — вектор скорости с составляющими  $\frac{p_x}{m_s}, \frac{p_y}{m_s}, \frac{p_z}{m_s}$ . Функция плотности  $f(X, P, t)$  удовлетворяет уравнению непрерывности в фазовом пространстве [16]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\vec{V}f) = 0, \quad (1.2.4)$$

где  $\vec{V}$  — вектор скорости в фазовом пространстве с составляющими  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z$ . Однако уравнение непрерывности более удобно иметь в переменных "действие-угол". Если в качестве декартовых координат в фазовом про-

<sup>\*</sup>  $X_k(x_k, y_k, z_k), P_k(p_{kx}, p_{ky}, p_{kz})$  — координаты и импульсы  $k$ -й час-

пространстве принять переменные  $\psi_x, \psi_y, \psi_z, J_x, J_y, J_z$ , то уравнение непрерывности может быть записано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \psi_k} (\dot{\psi}_k f) + \frac{\partial}{\partial J_k} (\dot{J}_k f) = 0, \quad (1.2.5)$$

где по индексу  $k$  должно быть выполнено суммирование:  $k = x, y, z$ . Уравнение (1.2.5) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\psi}_k \frac{\partial f}{\partial \psi_k} + \dot{J}_k \frac{\partial f}{\partial J_k} + f \left( \frac{\partial \dot{\psi}_k}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \dot{J}_k}{\partial J_k} \right) = 0. \quad (1.2.6)$$

Система уравнений движения частицы (1.1.37), как легко видеть, в целом не является канонической, но уравнения для каждой степени свободы в отдельности составляют каноническую систему. Этого достаточно, чтобы скобка в (1.2.6) обратилась в нуль, а уравнение приняло вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\psi}_k \frac{\partial f}{\partial \psi_k} + \dot{J}_k \frac{\partial f}{\partial J_k} = 0. \quad (1.2.7)$$

Отметим еще, что следствием каноничности преобразований от переменных  $X, P$  к переменным  $\psi, J$  по каждой степени свободы в отдельности является равенство единице якобиана преобразования. Поэтому в новых переменных сохраняется нормировка

$$\int f(\psi, J, t) \cdot d\psi dJ = 1.$$

В интегралах (1.2.3) интегрирование производится в подпространстве импульсов; поэтому переход к переменным "действие-угол" в этих интегралах не имеет смысла. Однако, при вычислении электромагнитных полей дополнительно производится интегрирование по пространственным координатам  $X$ , так что в выражениях для электромагнитного поля становится возможным переход к новым переменным.

В общем случае функция плотности явно зависит от времени; эта зависимость связана с наличием когерентных колебаний, которые, как уже упоминалось выше, вызываются внешними крупномасштабными возмущающими полями, либо возникают в результате специальных начальных условий, заданных в виде начальной функции плотности при  $t = 0$ .

Заметим, что в переменных  $X, P$  функция плотности в случае периодической фокусировки зависит также от переменной  $\ell = x + \omega_0 R t$  и, таким образом, явная зависимость функции плотности от времени имеет место и при отсутствии когерентных колебаний. При переходе к переменным "действие-угол" зависимость функции плотности от  $\ell$  исключается.

Примем следующие исходные предположения относительно когерентных колебаний пучка:

1. При отсутствии внешних возмущающих сил когерентные колебания затухают вследствие перемешивания.
2. Существует равновесная функция плотности  $f_0$ , не зависящая явно от времени.
3. При затухании когерентных колебаний функция плотности стремится к равновесной функции  $f_0$ .

Строгое обоснование этих предположений не входит в задачи данной работы; эти предположения, однако, вполне естественны с физической точки зрения.

Таким образом равновесная функция — это функция плотности, устанавливающаяся в пределе  $t \rightarrow \infty$  при отсутствии крупномасштабных возмущающих полей.

Подставляя равновесную функцию  $f_0$  в уравнение (1.2.7) и учитывая, что  $\frac{\partial f_0}{\partial t} \equiv 0$  и при отсутствии внешних сил  $\dot{J}_k \equiv 0$ , получаем уравнение, которому должна удовлетворять равновесная функция

$$\dot{\psi}_k \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \psi_k} = 0, \quad (1.2.8)$$

которое удовлетворяется лишь, если

$$\frac{\partial f_0}{\partial \psi_k} = 0,$$

т.е.  $f_0 = f_0(J_k)$  — не зависит от  $\psi_k$ . Равновесной функцией, следовательно, может быть произвольная функция переменных действия  $J_k$ . Вид этой функции определяют, исходя из каких-то дополнительных соображений. При сильном некогерентном (радиационном) затухании вид равновесной функции не зависит, как правило, от начальных условий, но при медленном затухании (по сравнению с временем раскогерентирования) он может зависеть от начальной функции плотности.

Задача исследования устойчивости когерентных колебаний формулируется как задача определения условий устойчивости равновесной функции плотности относительно малых возмущений. Реально, конечно, самовозбуждение может начаться и до того, как функция плотности станет равновесной; иными словами начальное отклонение от равновесия может быть и не малым. Для этого, однако, требуется значительное превышение порога устойчивости; такой случай не представляет большого интереса.

При указанной постановке задачи функция плотности  $f$  может быть представлена в виде

$$f = f_0(J_k) + \tilde{f}(\psi_k, J_k, t), \quad (1.2.9)$$

где  $f_0(J_k)$  — некоторая равновесная функция плотности,  $\tilde{f}(\psi_k, J_k, t)$  — малое отклонение от равновесия.

Подстановка (1.2.9) в (1.2.7) даёт

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \dot{\psi}_k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi_k} + \dot{J}_k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial J_k} + \dot{J}_k \frac{\partial f_0}{\partial J_k} = 0. \quad (1.2.10)$$

Для анализа устойчивости уравнение (1.2.10) линеаризуется с учетом малости возмущения  $\tilde{f}(\psi_k, J_k, t)$  и, соответственно, малости возмущающих сил. Линеаризация выражается в отбрасывании члена  $\dot{J}_k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial J_k}$  и приближенной замене  $\dot{\psi}_k = \Omega_k(J_k)$ :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \Omega_k \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi_k} + \dot{J}_k \frac{\partial f_0}{\partial J_k} = 0. \quad (1.2.11)$$

Здесь следует отметить, что электромагнитные поля, определяющие  $\dot{J}_k$ , сами возбуждаются в результате когерентных колебаний и, следовательно, зависят от  $f$ . Поэтому уравнение (1.2.11) является интегродифференциальным уравнением относительно функции  $\tilde{f}(\psi_k, J_k, t)$ . Оно может быть приведено к системе интегральных уравнений, если подвергнуть его преобразованию Лапласа по явно входящему времени и представить все входящие в него величины в виде рядов Фурье по угловым переменным. После выполнения преобразования Лапласа уравнение приобретает вид:

$$s \cdot F(\psi_k, J_k, s) - \tilde{f}(\psi_k, J_k, 0) + \Omega_k \cdot \frac{\partial F(\psi_k, J_k, s)}{\partial \psi_k} + \mathcal{L}[j_k] \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J_k} = 0, \quad (1.2.12)$$

где

$$F(\psi_k, J_k, s) = \mathcal{L}[\tilde{f}(\psi_k, J_k, t)] = \int_0^{\infty} \tilde{f}(\psi_k, J_k, t) e^{-st} dt. \quad (1.2.13)$$

Так как все функции в (1.2.12) периодичны по угловым переменным с периодом  $2\pi$ , то они могут быть разложены в ряды Фурье:

$$F(\psi_k, J_k, s) = \sum_{n_x, n_y, n_z} F_{n_x, n_y, n_z}(J_x, J_y, J_z, s) \cdot e^{i(n_x \psi_x + n_y \psi_y + n_z \psi_z)},$$

$$\tilde{f}(\psi_k, J_k, 0) = \sum_{n_x, n_y, n_z} f_{0n_x, n_y, n_z}(J_x, J_y, J_z) \cdot e^{i(n_x \psi_x + n_y \psi_y + n_z \psi_z)},$$

$$\mathcal{L}[j_k] = \sum_{n_x, n_y, n_z} a_{n_x, n_y, n_z}^k(J_x, J_y, J_z, s) e^{i(n_x \psi_x + n_y \psi_y + n_z \psi_z)}.$$

Подставляя эти разложения в (1.2.12) и приравнявая коэффициенты при экспонентах, получаем систему уравнений

$$(1.2.14)$$

$$s \cdot F_{n_x, n_y, n_z} + i(n_x \Omega_x + n_y \Omega_y + n_z \Omega_z) F_{n_x, n_y, n_z} + \\ + a_{n_x, n_y, n_z}^x \frac{\partial f_0}{\partial J_x} + a_{n_x, n_y, n_z}^y \frac{\partial f_0}{\partial J_y} + a_{n_x, n_y, n_z}^z \frac{\partial f_0}{\partial J_z} = f_{0n_x, n_y, n_z},$$

каждое из которых является интегральным уравнением, так как в величины  $a_{n_x, n_y, n_z}^k$  входят  $F_{n_x, n_y, n_z}$  под интегралом. Устойчивость колебаний определяется ядрами этих уравнений, зависящими от граничных условий, т.е. от геометрии и физических свойств материальной структуры, окружающей пучок.

Другая модель пучка - модель макрочастиц - получается, если пучок заменить небольшим числом макрочастиц, т.е. образований, колеблющихся как единое целое. Заряд и масса такой макрочастицы равны сумме зарядов и масс со-

ставляющих её частиц. Так как отношение заряда к массе при этом не зависит от числа частиц, составляющих макрочастицу, то уравнения движения её под действием заданных полей совпадают с уравнениями для одной частицы. В простейшем случае весь пучок может быть заменен одной макрочастицей с зарядом  $eN$ . Большое число макрочастиц требуется для моделирования более сложных видов колебаний. Макрочастицы в первом приближении можно рассматривать как точечные объекты, хотя при необходимости им можно приписывать конечные размеры и некоторую форму, определяющую разложение тока пучка на гармоники.

Несмотря на то, что модель макрочастиц кажется очень грубой и далекой от действительности, тем не менее она позволяет уяснить многие важные черты когерентных неустойчивостей и поэтому оказывается полезной.

Вследствие существенного упрощения задачи оказывается целесообразным вначале исследовать те или иные виды неустойчивостей на модели макрочастиц, а модель непрерывной среды использовать для уточнения количественных характеристик, а также для исследования тех свойств, которые не учитываются моделью макрочастиц в достаточно простой форме.

Отметим еще, что линеаризованное уравнение (1.2.11) непригодно для исследования развития неустойчивости, т.к. оно получено путём отбрасывания членов, которые по мере роста амплитуды колебаний становятся не малыми. Модель макрочастиц позволяет получить решения, описывающие нарастание колебаний с учётом нелинейности. Эти решения, несмотря на грубость модели макрочастиц, позволяют исследовать некоторые представляющие интерес особенности развития колебаний при больших амплитудах.

Наконец, модель макрочастиц даёт возможность, если ограничиться сравнительно небольшим числом макрочастиц, исследовать развитие неустойчивости с помощью вычислений на ЭВМ.

### § 1.3. Электромагнитные поля, возбуждаемые когерентным движением пучка

Для исследования устойчивости когерентных движений пучка необходимо уметь вычислять электромагнитные поля, возбуждаемые этими движениями. Здесь существенную роль играет, конечно, окружение пучка, определяющее граничные условия в задаче вычисления электромагнитных полей при заданном токе пучка. С другой стороны, область взаимодействия пучка с полем представляет собой сравнительно малую окрестность равновесной орбиты. Поэтому в данном случае для вычисления полей наиболее удобен математический аппарат функций Грина. Функция Грина, учитывающая граничные условия, может быть разложена в ряд по малым отклонениям в окрестности равновесной орбиты и выражена через импедансы системы, приведенные к области взаимодействия.

Электромагнитное поле, возбуждаемое пучком, определяется уравнениями Максвелла. Для упрощения расчетов имеет смысл подвергнуть эти уравнения преобразованию Лапласа по времени, предполагая в начальный момент поля равными нулю.

Тогда уравнения Максвелла будут иметь вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -s \vec{B}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= s \vec{D} + \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$



Для простоты будем предполагать, что связь между  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  выражается с помощью скалярных проницаемостей, не зависящих от координат и времени:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Такое предположение в малой степени ограничивает общность постановки задачи, так как те или иные особенности электродинамической системы могут быть отражены феноменологически в выражениях для импедансов или других характеристических параметров. Уравнения Максвелла приобретают теперь следующий вид

$$\text{rot } \vec{E} = -s\mu \vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = s\epsilon \vec{E} + \vec{j} \quad (1.3.2)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad \text{div } \vec{H} = 0.$$

Здесь  $\vec{j}$  и  $\rho$  - плотность тока и плотность заряда - определяются пучком. Из второго уравнения имеем

$$\vec{E} = \frac{1}{s\epsilon} (\text{rot } \vec{H} - \vec{j}). \quad (1.3.3)$$

Подставляя в первое уравнение и учитывая, что  $\text{div } \vec{H} = 0$ , получаем для  $\vec{H}$  неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta \vec{H} - s^2\mu\epsilon \vec{H} = -\text{rot } \vec{j}. \quad (1.3.4)$$

Это уравнение вместе с уравнением  $\text{div } \vec{H} = 0$  и заданными граничными условиями определяет магнитное поле //17/

$$\vec{H}(\vec{r}, s) = - \int_V G^h(\vec{r}, \vec{r}'; s) \cdot \text{rot } \vec{j}(\vec{r}', s) dV', \quad (1.3.5)$$

где  $G^h(\vec{r}, \vec{r}'; s)$  - тензорная функция точки наблюдения  $\vec{r}(x, y, z)$  и точки истока  $\vec{r}'(x', y', z')$ , удовлетворяющая уравнению

$$\Delta_r G^h - s^2\mu\epsilon G^h = I \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'); \quad (1.3.6)$$

$I$  - единичный тензор. Кроме того,  $G^h(\vec{r}, \vec{r}'; s)$  должна удовлетворять заданным граничным условиям и уравнению  $\text{div } G^h = 0$ . Интеграл в (1.3.5) берется по всей области, в которой плотность тока  $\vec{j}$  отлична от нуля. Выражение (1.3.5) можно преобразовать так, чтобы в него входила непосредственно плотность тока:

$$\vec{H}(\vec{r}, s) = \oint_S (G^h \times \vec{j})_n dS - \int_V \text{rot}_r G^h \cdot \vec{j} \cdot dV'. \quad (1.3.7)$$

Поверхностный интеграл обращается в нуль, так как поверхность всегда может быть выбрана так, чтобы плотность тока вблизи неё была равна нулю. Поэтому

$$\vec{H}(\vec{r}, s) = - \int_V \text{rot}_r G^h \cdot \vec{j} \cdot dV'. \quad (1.3.8)$$

Подставляя в (1.3.3), получим выражение для электрического поля

$$\vec{E} = - \frac{1}{\epsilon s} \int_V \text{rot}_r \text{rot}_r G^h \cdot \vec{j} \cdot dV' - \frac{1}{\epsilon s} \vec{j}. \quad (1.3.9)$$

Обозначая

$$-\frac{1}{\epsilon S} \operatorname{rot}_r \operatorname{rot}_r G(\vec{r}, \vec{r}'; s) = G^e(\vec{r}, \vec{r}'; s), \quad (1.3.10)$$

для  $\vec{E}$  получим выражение через электрическую вихревую функцию Грина

$$\vec{E} = \int_V G^e(\vec{r}, \vec{r}'; s) \cdot \vec{j}(\vec{r}', s) dV' - \frac{1}{\epsilon S} \vec{j}. \quad (1.3.11)$$

Член  $-\frac{1}{\epsilon S} \vec{j}$  обусловлен объемным зарядом пучка и не зависит от граничных условий. Поэтому при исследовании когерентного взаимодействия пучка с окружающей структурой этот член может быть опущен.

Рассмотрим более детально вопрос о плотности тока  $\vec{j}$ , являющейся источником электромагнитного поля. В общем случае азимутально неоднородной фокусировки

$$\vec{j} = \vec{j}(x, y, z, \ell, t), \quad (1.3.12)$$

где  $z = \ell - \omega_0 R t$ . Зависимость от  $z$  имеет место в связи с переносным движением пучка со скоростью  $v = \omega_0 R$ , зависимость от  $\ell$  связана с изменением поперечных размеров пучка вследствие неоднородности фокусировки, явная зависимость от времени появляется при наличии когерентных колебаний. Так как  $\vec{j}$  — периодическая функция переменной  $z$ , то

$$\vec{j} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{j}_m(x, y, \ell, t) e^{i \frac{mz}{R}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{j}_m(x, y, \ell, t) e^{i \frac{m\ell}{R}} e^{-im\omega_0 t}, \quad (1.3.13)$$

причем

$$\vec{j}_m(x, y, \ell, t) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} \vec{j}(x, y, z, \ell, t) e^{-i \frac{mz}{R}} dz. \quad (1.3.14)$$

Подвергая (1.3.13) и (1.3.14) преобразованию Лапласа по времени, найдём

$$\vec{j}(\vec{r}, s) = \sum_m \vec{j}_m(x, y, \ell, s + im\omega_0) e^{i \frac{m\ell}{R}} \quad (1.3.15)$$

$$\vec{j}_m(x, y, \ell, s) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} \vec{j}(x, y, z, \ell; s) e^{-i \frac{mz}{R}} dz. \quad (1.3.16)$$

Подставляя (1.3.15) и (1.3.16) в (1.3.11), получим для электрического поля соотношение:

$$\vec{E}(x, y, \ell, s) = \frac{1}{2\pi R} \sum_m \int G^e(x, y, \ell; x', y', \ell'; s) \cdot \vec{j}(x', y', z', \ell'; s + im\omega_0) e^{i \frac{m\ell'}{R}} e^{-i \frac{mz'}{R}} dx' dy' d\ell' dz'. \quad (1.3.17)$$

Прежде чем использовать это соотношение в уравнениях движения частиц, его нужно преобразовать в систему покоя равновесной частицы. Для этого вначале необходимо найти  $\vec{E}$  как функцию времени с помощью обратного преобразования Лапласа от (1.3.17):

$$\vec{E}(x, y, l, t) = \frac{1}{2\pi R} \sum_m e^{-im\omega_0 t} \mathcal{L}^{-1} \int G^e(x, y, l; x', y', l'; s - im\omega_0) \cdot \vec{j}(x', y', z', l', s) \cdot e^{i\frac{ml'}{R}} \cdot e^{-i\frac{mz'}{R}} dx' dy' dz' dl'. \quad (1.3.18)$$

Переход в систему покоя осуществляется преобразованием  $l = z + \omega_0 R t$ . Заметим, что функция Грина зависит от  $l$  не только непосредственно, но зависимость от  $l$  появляется дополнительно при переходе к переменным "действительный угол", т.к. формулы преобразования (1.1.14) и (1.1.15) поперечных координат при неоднородной фокусировке содержит переменную  $l$ . Поэтому вначале в (1.3.18) сделаем замену переменных  $x, y$  (без штрихов), переходя к переменным  $\psi_x, J_x, \psi_y, J_y$ :

$$\vec{E}(\psi_x, \psi_y, J_x, J_y, l, t) = \frac{1}{2\pi R} \sum_m e^{-im\omega_0 t} \mathcal{L}^{-1} \int G^e(\psi_x, \psi_y, J_x, J_y, \rho_z, l; x', y', l', s - im\omega_0) \cdot \vec{j}(x', y', z', l', s) \cdot e^{i\frac{ml'}{R}} \cdot e^{-i\frac{mz'}{R}} \cdot dx' dy' dl' dz'. \quad (1.3.19)$$

Функция Грина периодична по переменной  $l$ , поэтому

$$G^e = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k^e(\psi_x, \psi_y, J_x, J_y, \rho_z; x', y', l'; s - im\omega_0) e^{i\frac{kl'}{R}} \quad (1.3.20)$$

$$\text{и } \vec{E}(\psi_x, \psi_y, J_x, J_y, l, t) = \frac{1}{2\pi R} \sum_{m, k} e^{-im\omega_0 t} e^{i\frac{kl'}{R}} \mathcal{L}^{-1} \int G_k^e(\psi_x, \psi_y, J_x, J_y, \rho_z; x', y', l'; s - im\omega_0) \cdot \vec{j}(x', y', z', l', s) e^{i\frac{ml'}{R}} e^{-i\frac{mz'}{R}} dx' dy' dz' dl'. \quad (1.3.21)$$

Для перехода в систему покоя сделаем замену  $l = z + \omega_0 R t$ . Все слагаемые (1.3.21), в которых  $k \neq m$  и поэтому присутствуют множители  $e^{i(k-m)\omega_0 t}$ , имеют в системе покоя частоты, весьма далекие от собственных частот частиц-осцилляторов. Поэтому после перехода в систему покоя в первом приближении метода усреднения /18/ в (1.3.21) следует сохранить лишь слагаемые с  $k = m$ :

$$\vec{E}(\psi_x, \psi_y, J_x, J_y, z, \rho_z, t) = \frac{1}{2\pi R} \sum_m e^{i\frac{mz}{R}} \mathcal{L}^{-1} \int G_m^e(\psi_x, \psi_y, J_x, J_y, \rho_z; x', y', l', s - im\omega_0) \cdot \vec{j}(x', y', z', l', s) e^{i\frac{ml'}{R}} e^{-i\frac{mz'}{R}} dx' dy' dz' dl'. \quad (1.3.22)$$

Плотность тока может быть выражена через функцию плотности

$$\vec{j}(x, y, z, l, s) = eN \int \vec{v} \cdot F(x, y, z, p_x, p_y, p_z, l, s) dp_x dp_y dp_z. \quad (1.3.23)$$

Подставляя (1.3.23) в (1.3.22), найдём выражение электрического поля через функцию плотности

$$\vec{E}(\psi_x, \psi_y, J_x, J_y, z, p_z, t) = \frac{eN}{2\pi R} \sum_m e^{i\frac{mz}{R}} \mathcal{L}^{-1} \int G_m^e(\psi_x, \psi_y, J_x, J_y, p_z, x', y', z', p_x', p_y', p_z', \ell', s) \cdot e^{i\frac{m\ell'}{R}} \cdot e^{-i\frac{mz'}{R}} \cdot dx' dy' dz' dp_x' dp_y' dp_z' d\ell' \quad (1.3.24)$$

Под интегралом перейдём от переменных  $x', p', \ell'$  к переменным  $\psi', J', \ell'$ . Как легко показать, якобиан перехода равен единице. Функция плотности в новых переменных не зависит от  $\ell'$ . Совершая одновременно замену переменных  $z, p_z \rightarrow \psi_z, J_z$  и подвергая  $\vec{E}$  преобразованию Лапласа, получаем в системе покоя:

$$\vec{E}(\Psi, J, s) = \frac{eN}{2\pi R} \sum_m e^{i\frac{mz}{R}} \int G_m^e(\Psi, J, \Psi', J', \ell', s - im\omega_0) \cdot \vec{v}' \cdot F(\Psi', J', s) \cdot e^{i\frac{m\ell'}{R}} \cdot e^{-i\frac{mz'}{R}} d\Psi' dJ' d\ell' \quad (1.3.25)$$

Отметим, что вектор  $\vec{v}'(\frac{p_x}{m_s}, \frac{p_y}{m_s}, \frac{p_z}{m_s})$  также является функцией  $\Psi', J', \ell'$ , определяемой преобразованием к переменным "действие-угол".

В (1.3.25) интегрирование по  $\ell'$  даёт

$$(G_m^e \vec{v}')_{-m} = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} G_m^e(\Psi, J, \Psi', J', \ell'; s - im\omega_0) \vec{v}' e^{i\frac{m\ell'}{R}} d\ell' \quad (1.3.26)$$

Поэтому (1.3.25) можно записать в виде

$$E(\Psi, J, s) = eN \sum_m e^{i\frac{mz}{R}} \int (G_m^e \vec{v}')_{-m} \cdot F(\Psi', J', s) e^{-i\frac{mz'}{R}} d\Psi' dJ' \quad (1.3.27)$$

В дальнейшем для упрощения мы будем исследовать лишь системы с азимутально-однородной фокусировкой. При этом реальная система с неоднородной фокусировкой заменяется эквивалентной ей азимутально-однородной с одинаковыми параметрами, такими, как величины  $V_x, V_y$ , коэффициент расширения орбит  $\alpha$  и т.д. Такая замена, значительно упрощая выкладки, не приводит, по-видимому, в большинстве случаев к каким-либо качественным ошибкам, а вносит лишь не очень существенные количественные отличия.

В азимутально-однородной системе  $\vec{v}'$  не зависит от  $\ell'$ , поэтому вместо (1.3.27) имеет место равенство

$$\vec{E}(\Psi, J, s) = eN \sum_m e^{i\frac{mz}{R}} \int G_{m,-m}^e(\Psi, J; \Psi', J'; s - im\omega_0) \cdot \vec{v}' \cdot F(\Psi', J'; s) \cdot e^{-i\frac{mz'}{R}} d\Psi' dJ' \quad (1.3.28)$$

$$\cdot \vec{v}' \cdot F(\Psi', J'; s) \cdot e^{-i\frac{mz'}{R}} d\Psi' dJ'$$

где

$$G_{m,-m}^e = \frac{1}{(2\pi R)^2} \int_{-\pi R}^{\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} G^e(x, y, l; x', y', l'; s) \cdot e^{-\frac{iml}{R}} e^{i\frac{ml'}{R}} dl dl' \quad (1.3.29)$$

В правой части (1.3.29)  $x, y, x', y'$  должны быть выражены через переменные  $\Psi, J, \Psi', J'$ .

Отметим, что  $G_{m,-m}^e$  является периодической функцией угловых переменных  $\Psi, \Psi'$  и может быть разложена в ряд по этим переменным, а также в степенной ряд по переменным действия  $J, J'$ . При этом, однако, появляются настолько сложные и громоздкие выражения, что дальнейшие преобразования в общем виде становятся нецелесообразными, а имеет смысл рассматривать конкретные случаи.

Функция плотности, входящая в (1.3.28), состоит из равновесной части и возмущения. Равновесной части в системе покоя соответствуют поля, не зависящие от времени, которые не могут возбуждать колебания. Они способны лишь несколько изменить частоты поперечных и продольных колебаний. Сдвиг частот может быть учтен формально; поэтому равновесную часть функции плотности в (1.3.28) можно опустить и подразумевать под  $F(\Psi, J; s)$  только возмущенную часть, удовлетворяющую линейному уравнению (1.2.11). Магнитное поле может быть вычислено с помощью уравнений Максвелла в лабораторной системе, исходя из (1.3.17).

В дальнейшем мы будем рассматривать взаимодействие пучка со следующими основными типами электродинамических систем:

а) Резонансные системы, т.е. системы в которых рассеяние энергии за период колебаний мало по сравнению с запасенной в них электромагнитной энергией,

б) Волновые системы, в которых могут существовать бегущие волны. К таким системам можно отнести одно- и многосвязные волноводы на частотах выше критической. Вследствие малых поперечных размеров вакуумной камеры накопителей (по сравнению с длиной сгустка) в большинстве случаев пучок может возбуждать распространяющиеся волны лишь поперечного (ТЕМ) типа, если камера представляет собой двух- или многосвязный волновод благодаря присутствию в ней пластин или других длинных проводников.

в) Квазистатические системы, в которых поля близки к статическим. К таким системам можно отнести всевозможные электродные устройства, размеры которых малы по сравнению с длиной волны, возбуждаемой пучком, а также волноводы на частоте ниже критической. Рассмотрение квазистатических волноводов не входит в задачи данной работы.

Перечисленные системы не исчерпывают, конечно, всех возможных классов систем, но являются, по-видимому, наиболее распространенными.

Перейдем теперь к конкретным функциям Грина для названных выше систем.

### 1.3.1. Резонансные системы

При вычислении функции Грина для систем с малыми потерями в первом приближении потерями можно пренебречь. В этом случае векторные собственные функции системы  $\vec{E}_k(\vec{r})$  и  $\vec{H}_k(\vec{r})$  образуют полные ортогональные системы, по которым может быть разложена функция Грина.

Разложение тензорной функции Грина для магнитного поля по собственным функциям имеет вид /19/:

$$G^h(\vec{r}, \vec{r}'; s) = \sum_k \frac{\vec{H}_k(\vec{r}) \circ \vec{H}_k(\vec{r}')}{(s_k^2 - s^2) \mu \epsilon} \cdot \frac{1}{\int_V \vec{H}_k^2 dV} \quad (1.3.31)$$

Здесь  $\vec{H}_k(\vec{r}) \circ \vec{H}_k(\vec{r}')$  - дивидное произведение собственных векторных функций /20/,  $s_k^2 \mu \epsilon$  - собственные числа уравнения

$$\Delta \vec{H} - s^2 \mu \epsilon \vec{H} = 0$$

при заданных граничных условиях; функции  $\vec{E}_k$  и  $\vec{H}_k$  удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла при  $s^2 = s_k^2$ :

$$\text{rot } \vec{E}_k = -\mu s_k \vec{H}_k, \quad \text{rot } \vec{H}_k = \epsilon s_k \vec{E}_k. \quad (1.3.32)$$

Используя функцию Грина (1.3.31), можно записать решение (1.3.8) уравнения (1.3.4) для магнитного поля, возбужденного пучком, в виде

$$\vec{H} = - \sum_k \frac{\vec{H}_k(\vec{r})}{(s_k^2 - s^2) \mu \epsilon} \cdot \frac{1}{\int_V \vec{H}_k^2 dV} \cdot \int \text{rot } \vec{H}_k(\vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}', s) dV'. \quad (1.3.33)$$

Учитывая (1.3.32), а также равенство

$$\mu \int \vec{H}_k^2 dV = -\epsilon \int \vec{E}_k^2 dV$$

соотношение (1.3.33) может быть записано в виде

$$\vec{H} = \sum_k \frac{s_k \cdot \vec{H}_k(\vec{r})}{(s_k^2 - s^2) \epsilon \int \vec{E}_k^2 dV} \cdot \int \vec{E}_k(\vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}', s) \cdot dV'. \quad (1.3.34)$$

Электрическое поле определяется с помощью (1.3.3) с учетом (1.3.32)

$$\vec{E} = \sum_k \frac{s_k \cdot \vec{E}_k(\vec{r})}{s(s_k^2 - s^2) \epsilon \int \vec{E}_k^2 dV} \cdot \int \vec{E}_k(\vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}', s) dV' - \frac{1}{\epsilon s} \vec{j}. \quad (1.3.35)$$

Так как

$$\frac{s_k}{s(s_k^2 - s^2)} = \frac{s}{s_k^2 - s^2} + \frac{1}{s},$$

выражение (1.3.35) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \sum_k \frac{s \cdot \vec{E}_k(\vec{r})}{(s_k^2 - s^2) \epsilon \int \vec{E}_k^2 dV} \int \vec{E}_k^2 \cdot \vec{j} \cdot dV' + \\ & + \sum_k \frac{\vec{E}_k}{s \epsilon \int \vec{E}_k^2 dV} \cdot \int \vec{E}_k \cdot \vec{j} dV' - \frac{1}{\epsilon s} \vec{j}. \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

В этом выражении первый член представляет собой сумму резонансных мод,

Последние два члена представляют собой статические нерезонансные поля и при исследовании резонансных систем могут быть опущены.

Для функций  $\vec{E}_k$  удобно выбрать нормировку

$$\int \vec{E}_k^2 dV = L_k \quad (1.3.37)$$

причем  $L_k$  - некоторая характерная для  $k$ -й моды длина. Тогда  $\vec{E}_k$  имеет размерность обратной длины,  $\int_S \vec{E}_k \vec{j} dV$  - размерность тока, а величина

$$Z_k(s) = \frac{s \cdot \omega_k \cdot \rho_k}{(s^2 - s_k^2) \epsilon \int \vec{E}_k^2 dV} = \frac{s \cdot \omega_k \cdot \rho_k}{s^2 - s_k^2} \quad (1.3.38)$$

- размерность сопротивления. В (1.3.38) величина

$$\rho_k = \frac{1}{\omega_k \epsilon \int \vec{E}_k^2 dV} \quad (1.3.39)$$

- характеристическое сопротивление,  $\omega_k$  - резонансная частота. В этих обозначениях резонансный член (1.3.36) может быть записан в виде

$$\vec{E} = - \sum_k Z_k(s) \cdot \vec{E}_k(\vec{r}) \cdot \int \vec{E}_k(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', s) dV' \quad (1.3.40)$$

Магнитное поле (резонансная часть) получается из (1.3.40):

$$\vec{H} = \sum_k \frac{Z_k(s)}{ms} \text{rot} \vec{E}_k(\vec{r}) \cdot \int \vec{E}_k(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', s) dV' \quad (1.3.41)$$

Величины  $Z_k(s)$  представляют собой импедансы резонансных мод системы. Введенные с помощью (1.3.38) импедансы определены неоднозначно, так как зависят от нормировки собственных функций  $\vec{E}_k$ . Это, однако, не имеет существенного значения, так как в различных случаях нормировка может быть выбрана наиболее удобным образом.

Следует подчеркнуть, что понятие импеданса оказывается весьма плодотворным в приложении к вопросу об устойчивости когерентных колебаний пучка; условия устойчивости могут быть сформулированы с помощью частотной функции импеданса, как это будет показано в следующих главах.

Для систем без потерь, как известно [21], собственные значения вещественны и отрицательны  $s_k^2 = -\omega_k^2 < 0$ . Поэтому полюса  $Z_k(s)$  лежат на мнимой оси плоскости комплексной переменной  $s$ . Затухание может быть формально учтено сдвигом полюсов  $Z_k(s)$  в левую полуплоскость на малую (по сравнению с  $\omega_k$ ) величину:

$$Z_k(s) = \frac{(s + \sigma_k) \omega_k \rho_k}{(s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2} \approx \frac{s \omega_k \rho_k}{s^2 + \omega_k^2 + 2s\sigma_k} \quad (1.3.42)$$

Используя процедуру, примененную выше, можно получить для электрического поля в системе покоя равновесной частицы выражение (в предположении азимутально-однородной фокусировки)

$$\vec{E}(\Psi, J, s) = - \sum_{k,m} e^{i \frac{m\phi}{R}} \cdot \vec{E}_{k,m}(x, y) \cdot Z_k(s - im\omega_0) \cdot I_{km}(s), \quad (1.3.43)$$

где

$$I_{km}(s) = eN \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{k,-m}(x', y') \cdot F(\Psi', J', s) e^{-i \frac{m \xi'}{R}} d\Psi' dJ'. \quad (1.3.44)$$

В (1.3.43) и (1.3.44) предполагается, что  $x, y, z$  должны быть заменены на  $\Psi, J$  с помощью формул преобразования. Отметим, что эти формулы в случае азимутально-однородной фокусировки не зависят от  $l$ . Индексы  $m$  в (1.3.43) и (1.3.44) обозначают  $m$ -ю азимутальную гармонику, т.е.

$$\vec{E}_{k,m}(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} \vec{E}_k(x, y, l) \cdot e^{-i \frac{ml}{R}} dl. \quad (1.3.45)$$

Величины  $I_{km}(s)$  имеют размерность тока и представляют собой гармоники наведенных пучком токов. Для магнитного поля можно получить аналогичное соотношение

$$\vec{B}(\Psi, J, s) = \mu \vec{H} = \sum_{k,m} e^{i \frac{m \xi}{R}} (\text{rot } \vec{E}_k)_m \frac{Z_k(s - im\omega_0)}{s - im\omega_0} \cdot I_{km}(s), \quad (1.3.46)$$

где

$$(\text{rot } \vec{E}_k)_m = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} \text{rot } \vec{E}_k(x, y, l) \cdot e^{-i \frac{ml}{R}} dl. \quad (1.3.47)$$

Если пучок совершает колебания как единое целое (модель макрочастиц), то выражение для  $I_{km}(s)$  может быть упрощено путем предельного перехода. Для этого (1.3.44) следует преобразовать к переменным  $X, P$  и перейти во временную область

$$I_{km}(t) = eN \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{k,-m}(x', y') \cdot \tilde{f}(x', y', z', p_x', p_y', p_z', t) \cdot e^{-i \frac{m \xi'}{R}} dx' dy' dz' dp_x' dp_y' dp_z'. \quad (1.3.48)$$

Если представить сгусток в виде точечного заряда, то

$$\tilde{f} = \delta(x' - x_0) \cdot \delta(p' - p_0),$$

где  $X_0(x_0, y_0, z_0), P_0(p_{x0}, p_{y0}, p_{z0})$  - координаты сгустка в фазовом пространстве  $X, P$ , являющиеся функциями времени. Тогда интегрирование в (1.3.48) дает

$$I_{km}(t) = eN \vec{v} \cdot \vec{E}_{k,-m}(x_0, y_0) \cdot e^{-i \frac{m \xi_0}{R}}, \quad (1.3.49)$$

причем скорость  $\vec{v} \left( \frac{p_{x0}}{m_s}, \frac{p_{y0}}{m_s}, \frac{p_{z0}}{m_s} \right)$  - функция импульсов, зависящих от времени.  $I_{km}(s)$  получается, если подвергнуть (1.3.49) преобразованию Лапласа

$$I_{km}(s) = eN \cdot \mathcal{L} \left[ \vec{v} \cdot \vec{E}_{k,-m}(x_0, y_0) \cdot e^{-i \frac{m \xi_0}{R}} \right]. \quad (1.3.50)$$

### § 1.3.2. Волновые системы

К этому классу относятся системы, в которых пучок может возбуждать бегущие волны. Наиболее эффективно пучком возбуждаются поперечные (ТЕМ)



волны, имеющие нулевую критическую частоту. Условием возможности существования таких волн является наличие в вакуумной камере однородных в продольном направлении металлических проводников, образующих с камерой двух- или многопроводную линию передачи. Чаще всего это бывают пластины для отсоса ионов, разведения электронного и позитронного пучков, инфлекторные пластины, электрические квадрупольные и т.д. На концах линии включают нагрузки с целью согласования, но качество согласования не всегда может быть хорошим, поэтому необходимо учитывать возможные отражения.

Бегущие волны волноводных типов (TE и TM) возбуждаются пучком существенно менее эффективно вследствие того, что их критические длины волн обычно много меньше длины сгустков пучка. Поля нераспространяющихся типов волн, далеких от критических, близки к статическим полям.

TEM волны непосредственно в линии возбуждаются поперечным когерентным движением пучка, так как электрическое поле в линии поперечно. Но на концах линии поле искажается, благодаря чему появляется продольное электрическое поле, взаимодействующее с орбитальным движением пучка. Поэтому волны в TEM линии могут возбуждаться поперечным и продольным движением частиц в пучке.

Электрическое и магнитное поля в TEM линии могут быть представлены следующим образом:

$$\vec{E} = V(\ell, t) \cdot \vec{e}(x, y), \quad \vec{H} = I(\ell, t) \cdot \vec{h}(x, y), \quad (1.3.51)$$

где  $V(\ell, t)$  - напряжение,  $I(\ell, t)$  - ток. Напряжение и ток в TEM линии могут быть определены обычным образом. Векторные функции  $\vec{e}(x, y)$  и  $\vec{h}(x, y)$  имеют только поперечные составляющие и нормируются так, чтобы

$$\int_S (e_x h_y - e_y h_x) dS = 1, \quad (1.3.52)$$

где интеграл взят по поперечному сечению линии.

На концах линии электрическое поле может быть представлено в виде

$$\vec{E}_1 = V(\ell_1, t) \cdot \vec{e}_1(x, y, \ell), \quad \vec{E}_2 = V(\ell_2, t) \cdot \vec{e}_2(x, y, \ell). \quad (1.3.53)$$

Здесь  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  - электрические поля на концах,  $\ell_1, \ell_2$  - координаты этих концов. Векторные функции  $\vec{e}_1(x, y, \ell)$  и  $\vec{e}_2(x, y, \ell)$  имеют, вообще говоря, как поперечные, так и продольные составляющие. Так как электрическое поле в самой линии имеет только поперечные составляющие, то поперечные составляющие полей  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  должны на концах непрерывно переходить в соответствующее поле в линии. Продольные же составляющие имеют лишь концевые поля  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  и, при удалении от концов в обе стороны эти составляющие быстро убывают.

Наибольший интерес на концах представляют именно продольные составляющие электрического поля, взаимодействующие с орбитальным движением пучка.

Поля на концах линии являются чаще всего квазистатическими (вследствие малых поперечных размеров линии); поэтому изменение энергии частицы в них равно пройденной разности потенциалов. В продольном направлении частицы проходят полную разность потенциалов, независимо от малой длины концевых участков. Во многих случаях зависимость продольной компоненты электрического поля от продольной координаты может быть представлена дельта-функцией.

Передаваемый частице поперечный импульс мал вследствие малой длины ионизационных участков (по сравнению с длиной линии), поэтому им почти всегда можно пренебречь.

Электрическое поле в двухпроводной ТЕМ линии, возбуждаемое заданными токами, может быть вычислено с помощью тензорной функции Грина:

$$\vec{E}(x, y, l, s) = \int G^e(x, y, l, x', y', l'; s) \cdot \vec{j}(x', y', l', s) dx' dy' dl'. \quad (1.3.54)$$

Функция Грина имеет следующий вид:

$$G^e(x, y, l; x', y', l'; s) = \quad (1.3.55)$$

$$= \left[ \vec{e}_1(x, y, l) \cdot G(-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}; s) + \vec{e}_2(x, y, l) \cdot G(\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}; s) + \vec{e}(x, y) \cdot G(l, -\frac{l}{2}; s) \right] \circ \vec{e}_1(x', y', l') +$$

$$+ \left[ \vec{e}_1(x, y, l) \cdot G(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}; s) + \vec{e}_2(x, y, l) \cdot G(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}; s) + \vec{e}(x, y) \cdot G(l, \frac{l}{2}; s) \right] \circ \vec{e}_2(x', y', l') +$$

$$+ \left[ \vec{e}_1(x, y, l) \cdot G(-\frac{l}{2}, l'; s) + \vec{e}_2(x, y, l) \cdot G(\frac{l}{2}, l'; s) + \vec{e}(x, y) \cdot G(l, l'; s) \right] \circ \vec{e}(x', y').$$

Здесь знак "o", как и выше, обозначает диадное произведение векторных функций,  $\pm \frac{l}{2}$  - координаты концов линии,  $l$  - длина линии. Функция  $G(l, l'; s)$  представляет собой так называемую продольную функцию Грина:

$$G(l, l'; s) = -\frac{Z_0}{2(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l} \Gamma_1 \Gamma_2)} \cdot \left\{ \varepsilon(l-l') \left[ e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma(l-l')} + e^{-\gamma l} \cdot e^{\gamma(l-l')} \cdot \Gamma_1 \Gamma_2 \right] + \varepsilon(l'-l) \left[ e^{\gamma l'} \cdot e^{-\gamma(l'-l)} + e^{-\gamma l'} \cdot e^{\gamma(l'-l)} \cdot \Gamma_1 \Gamma_2 \right] + \Gamma_1 \cdot e^{-\gamma(l+l')} + \Gamma_2 \cdot e^{\gamma(l+l')} \right\}. \quad (1.3.56)$$

Здесь  $\varepsilon$  - единичная функция Хевисайда:

$$\varepsilon(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } a < 0, \\ 1 & \text{при } a > 0, \end{cases} \quad (1.3.57)$$

$Z_0$  - волновое сопротивление линии,  $\gamma = \frac{s}{v_{\varphi}}$  - постоянная распространения,  $v_{\varphi}$  - скорость волны в линии,  $\Gamma_1(s)$  и  $\Gamma_2(s)$  - коэффициенты отражения на грузок, включенных на концах линии.

Вывод соотношений (1.3.55), (1.3.56) приведен в приложении 2.

Магнитное поле может быть вычислено с помощью уравнений Максвелла по найденному электрическому полю. А именно, функция Грина для магнитного поля равна

$$\mu G^h = -\frac{1}{s} \text{rot } G^e =$$

$$= -\frac{1}{s} \left\{ \left[ \text{rot } \vec{e}_1 \cdot G(-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}; s) + \text{rot } \vec{e}_2 \cdot G(\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}; s) + \vec{e}_0 \times \vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial l} G(l, -\frac{l}{2}; s) \right] \circ \vec{e}_1(x', y', l') + \right.$$

$$+ \left[ \text{rot } \vec{e}_1 \cdot G(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}; s) + \text{rot } \vec{e}_2 \cdot G(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}; s) + \vec{e}_0 \times \vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial l} G(l, \frac{l}{2}; s) \right] \circ \vec{e}_2(x', y', l') +$$

$$\left. + \left[ \text{rot } \vec{e}_1 \cdot G(-\frac{l}{2}, l'; s) + \text{rot } \vec{e}_2 \cdot G(\frac{l}{2}, l'; s) + \vec{e}_0 \times \vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial l} G(l, l'; s) \right] \circ \vec{e}(x', y') \right\}, \quad (1.3.58)$$

где  $\vec{e}_0$  - единичный вектор в направлении оси  $l$ . Тензорная функция Грина  $G_{m,-m}^e$  (Фурье-образ функции  $G^e$ ), входящая в формулу (1.3.28) для вычисления электрического поля в системе покоя, может быть представлена в виде

$$G_{m,-m}^e(x,y,x',y';s) = - \sum_{j,k=1}^3 Z_{m,kj}(s) \cdot \vec{E}_{j,m}(x,y) \cdot \vec{E}_{k,-m}(x',y'), \quad (1.3.58)$$

где

$$\vec{E}_{1,m}(x,y) = \vec{e}_{1,m}(x,y); \vec{E}_{2,m}(x,y) = \vec{e}_{2,m}(x,y); \vec{E}_{3,m}(x,y) = \vec{e}(x,y), \quad (1.3.60)$$

$$Z_{m,12} = Z_{m,21} = -G(\pm \frac{L}{2}, \mp \frac{L}{2}; s) = \frac{Z_0(1+\Gamma_1)(1+\Gamma_2)}{2(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)}; \quad (1.3.61)$$

$$Z_{m,11} = -G(-\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}; s) = \frac{Z_0(1+\Gamma_1)(e^{\gamma L} + \Gamma_2 e^{\gamma L})}{2(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)}; Z_{m,22} = -G(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}; s) = \frac{Z_0(1+\Gamma_2)(e^{\gamma L} + \Gamma_1 e^{\gamma L})}{2(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)}; \quad (1.3.62)$$

$$Z_{m,13} = -[G(l, -\frac{L}{2}; s)]_{m,2\pi R(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)} = \frac{Z_0 e^{\gamma \frac{L}{2}} (1+\Gamma_2)}{2\pi R(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)} \left\{ \frac{\text{sh}(\gamma + \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{\gamma + \frac{im}{R}} + \Gamma_2 e^{-\gamma L} \frac{\text{sh}(\gamma - \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{\gamma - \frac{im}{R}} \right\}, \quad (1.3.63)$$

$$Z_{m,23} = -[G(l, \frac{L}{2}; s)]_{m,2\pi R(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)} = \frac{Z_0 e^{\gamma \frac{L}{2}} (1+\Gamma_1)}{2\pi R(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)} \left\{ \frac{\text{sh}(\gamma - \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{\gamma - \frac{im}{R}} + \Gamma_1 e^{-\gamma L} \frac{\text{sh}(\gamma + \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{\gamma + \frac{im}{R}} \right\}, \quad (1.3.64)$$

$$Z_{m,31} = -[G(-\frac{L}{2}, l'; s)]_{-m,2\pi R(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)} = \frac{Z_0 e^{\gamma \frac{L}{2}} (1+\Gamma_1)}{2\pi R(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)} \left\{ \frac{\text{sh}(\gamma - \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{\gamma - \frac{im}{R}} + \Gamma_2 e^{-\gamma L} \frac{\text{sh}(\gamma + \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{\gamma + \frac{im}{R}} \right\}$$

$$Z_{m,32} = -[G(\frac{L}{2}, l'; s)]_{-m,2\pi R(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)} = \frac{Z_0 e^{\gamma \frac{L}{2}} (1+\Gamma_2)}{2\pi R(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2)} \left\{ \frac{\text{sh}(\gamma + \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{\gamma + \frac{im}{R}} + \Gamma_1 e^{-\gamma L} \frac{\text{sh}(\gamma - \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{\gamma - \frac{im}{R}} \right\} \quad (1.3.65)$$

$$Z_{m,33} = -[G(l, l'; s)]_{m,-m,2\pi R} = \frac{1}{(2\pi R)^2} \frac{Z_0 \gamma L}{\gamma^2 + \frac{m^2}{R^2}} + \frac{1}{(2\pi R)^2} \frac{Z_0}{e^{\gamma L} - e^{-\gamma L} \Gamma_1 \Gamma_2} \cdot$$

$$\left\{ \frac{2(\Gamma_1 + \Gamma_2) \cdot \text{sh}(\gamma + \frac{im}{R}) \frac{L}{2} \cdot \text{sh}(\gamma - \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{\gamma^2 + \frac{m^2}{R^2}} - [e^{(\gamma + \frac{im}{R}) \frac{L}{2}} - e^{-(\gamma + \frac{im}{R}) \frac{L}{2}} \Gamma_1 \Gamma_2] \cdot \frac{\text{sh}(\gamma - \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{(\gamma - \frac{im}{R})^2} - \right.$$

$$\left. - [e^{(\gamma - \frac{im}{R}) \frac{L}{2}} - e^{-(\gamma - \frac{im}{R}) \frac{L}{2}} \Gamma_1 \Gamma_2] \cdot \frac{\text{sh}(\gamma + \frac{im}{R}) \frac{L}{2}}{(\gamma + \frac{im}{R})^2} \right\}. \quad (1.3.66)$$

Так как  $Z_{m,31} = Z_{-m,13}$  и  $Z_{m,32} = Z_{-m,33}$ , то как нетрудно видеть, матрица  $Z_{m,kj}(s)$  - эрмитова, если постоянную распространения рассматривать как вещественную. Используя (1.3.28) для вычисления электрического поля в системе покоя, получим

$$\vec{E}(\Psi, J, s) = - \sum_{m,j,k} e^{i \frac{mz}{R}} \cdot Z_{m,kj}(s - im\omega_0) \cdot \vec{E}_{j,m}(x,y) \cdot I_{km}(s), \quad (1.3.67)$$

(1.3.44)

где

$$I_{km}(s) = eN \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{k,-m}(x', y') \cdot F(\Psi', J', s) e^{-\frac{imz'}{R}} d\Psi' dJ' \quad (1.3.65)$$

В (1.3.67) и (1.3.68) вместо  $x, y, z, x', y', z'$  должны быть подставлены их выражения через  $\psi_x, \psi_y, \psi_z, J_x, J_y, J_z$ .

Аналогично тому, как это было сделано выше для резонансных систем, можно получить выражение для  $I_{km}(s)$  при точечном сгустке

$$I_{km}(s) = eN \cdot \mathcal{L} \left[ \vec{v} \cdot \vec{E}_{k,-m}(x_0, y_0) \cdot e^{-\frac{imz_0}{R}} \right], \quad (1.3.69)$$

причем  $x_0, y_0, z_0$  - координаты сгустка (функции времени).

Фурье-образ функции Грина  $G^h$  (1.3.58), к сожалению, не удается записать в таком сжатом виде, как это сделано в (1.3.59):

$$\begin{aligned} m \cdot G_{m,-m}^h(x, y, x', y'; s) = & \quad (1.3.70) \\ = -\frac{1}{s} \left\{ \left[ \text{rot} \vec{e}_1 \cdot G(-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}; s) + \text{rot} \vec{e}_2 \cdot G(\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}; s) + \vec{e}_0 \times \vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial l} G(l, -\frac{l}{2}; s) \right]_m \vec{e}_{1,-m}(x', y') + \right. \\ & + \left[ \text{rot} \vec{e}_1 \cdot G(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}; s) + \text{rot} \vec{e}_2 \cdot G(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}; s) + \vec{e}_0 \times \vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial l} G(l, \frac{l}{2}; s) \right]_m \vec{e}_{2,-m}(x', y') + \\ & \left. + \left[ \text{rot} \vec{e}_1 \cdot G(-\frac{l}{2}, l'; s) + \text{rot} \vec{e}_2 \cdot G(\frac{l}{2}, l'; s) + \vec{e}_0 \times \vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial l} G(l, l'; s) \right]_m \vec{e}(x', y') \right\} \end{aligned}$$

Отсюда для магнитного поля в системе покоя равновесной частицы получим

$$\vec{B}(\Psi, J; s) = - \sum_m \frac{e^{i m z}}{s - i m \omega_0} \quad (1.3.71)$$

$$\begin{aligned} \cdot \left\{ \left[ \text{rot} \vec{e}_1 \cdot G(-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}; s - i m \omega_0) + \text{rot} \vec{e}_2 \cdot G(\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}; s - i m \omega_0) + \vec{e}_0 \times \vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial l} G(l, -\frac{l}{2}; s - i m \omega_0) \right]_m I_{1m}(s) + \right. \\ + \left[ \text{rot} \vec{e}_1 \cdot G(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}; s - i m \omega_0) + \text{rot} \vec{e}_2 \cdot G(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}; s - i m \omega_0) + \vec{e}_0 \times \vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial l} G(l, \frac{l}{2}; s - i m \omega_0) \right]_m I_{2m}(s) + \\ \left. + \left[ \text{rot} \vec{e}_1 \cdot G(-\frac{l}{2}, l'; s - i m \omega_0) + \text{rot} \vec{e}_2 \cdot G(\frac{l}{2}, l'; s - i m \omega_0) + \vec{e}_0 \times \vec{e} \cdot \frac{\partial}{\partial l} G(l, l'; s - i m \omega_0) \right]_m I_{3m}(s) \right\} \end{aligned}$$

Здесь мы ограничились вычислением полей только для двухпроводной ТЕМ линии. В случае многопроводной линии все соотношения становятся существенно более громоздкими. Только в некоторых случаях задача может быть упрощена применением искусственных приемов. Например, в случае двух симметрично расположенных проводников в металлической камере (что эквивалентно трехпроводной линии) поле может быть представлено в виде суперпозиции синфазной и противофазной ТЕМ волн, которые при симметрии нагрузки не связаны между собой.

### 1.3.3. Квaзистатические системы

Неустойчивость поперечных колебаний пучка при электромагнитном взаимодействии его со стенками вакуумной камеры была одним из первых эффектов такого типа, обнаруженным в накопителях заряженных частиц и изученным в ряде работ /22-24/. Металлическая вакуумная камера в большинстве случаев может рассматриваться как волновод, в котором пучок частиц возбуждает нераспространяющиеся типы волн на частотах, ниже критической. Поля нераспространяющихся волн являются квазистатическими.

Как указывалось выше, рассмотрение квазистатических волноводов выходит за рамки данной работы.

Другим типом квазистатических систем являются различные электроды и пробники, имеющие малую длину. Благодаря малым размерам электроды возбуждают статические поля. Обычно в цепи электродов бывают включены те или иные сопротивления нагрузки. Наведенные пучком токи создают на этих сопротивлениях потенциалы, вследствие чего электроды становятся источниками поля. Указанные токи проще всего найти с помощью теоремы Шокли-Рамо /25-27/. Допустим, что к  $k$ -му электроду приложен потенциал 1 вольт, а все остальные имеют нулевой потенциал. Обозначим напряженность электрического поля, создаваемого  $k$ -м электродом при этих условиях, через  $\vec{E}_k(x, y, l)$ . Тогда ток, наведенный в цепи  $k$ -ого электрода, равен,

$$I_k(s) = \int \vec{E}_k(x', y', l') \cdot \vec{j}(x', y', l', s) dx' dy' dl'. \quad (1.3.72)$$

Заметим, что такой ток протекает в цепи  $k$ -ого электрода при условии, что сопротивление нагрузки этого электрода равно нулю. Если сопротивление не нулевое, то потенциал электрода становится отличным от нуля и часть наведенного тока ответвляется через емкость электрода на стенки камеры. Если считать эту емкость входящей в сопротивление нагрузки, то ток в любом случае остается равным (1.3.72).

Наведенный ток создает на сопротивлении нагрузки падение напряжения

$$U_k(s) = Z_k(s) \cdot I(s). \quad (1.3.73)$$

Электрическое поле, создаваемое всеми электродами благодаря наведенным токам будет равно

$$\vec{E}(x, y, l, s) = - \sum_k \vec{E}_k(x, y, l) \cdot Z_k(s) \cdot I_k(s), \quad (1.3.74)$$

а электрическое поле в системе покоя равновесной частицы равно

$$\vec{E}(\Psi, J, s) = - \sum_{k, m} e^{i \frac{m \lambda}{R}} \cdot Z_k(s - i m \omega_0) \cdot \vec{E}_{km}(x, y) \cdot I_{km}(s), \quad (1.3.75)$$

где

$$I_{km}(s) = e N \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{k, -m}(x', y') \cdot F(\Psi, J, s) d\Psi dJ. \quad (1.3.76)$$



## П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

### ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В НАКОПИТЕЛЕ

#### ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ

Уравнения движения частицы в накопителе могут быть получены с помощью релятивистского лагранжиана

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e \vec{A} \vec{v} - e\varphi, \quad (\text{П.1.1})$$

где  $\vec{A}$  - векторный потенциал электромагнитного поля, включающий как постоянное во времени фокусирующее магнитное поле, так и переменные высокочастотные поля,  $\varphi$  - скалярный потенциал.

В дальнейшем для упрощения предполагается, что равновесная орбита является плоской круговой. Это предположение не ограничивает общности основных результатов работы, хотя и может приводить к некоторому отличию количественных показателей при невыполнении сделанного предположения. Равновесной орбитой мы называем орбиту, движение по которой при заданном магнитном поле происходит синхронно с ускоряющим высокочастотным полем.

В связи с тем, что равновесная орбита является круговой, лагранжиан целесообразно записать в цилиндрических координатах  $\rho, \vartheta, \xi$ ; здесь  $\rho$  - радиус,  $\vartheta$  - азимут,  $\xi$  - вертикальная координата.

Но для описания движения частицы вблизи равновесной орбиты удобно использовать другие координаты:

$$x = \xi, \quad y = \rho - R, \quad l = \vartheta R. \quad (\text{П.1.2})$$

Здесь  $R$  - радиус равновесной орбиты,  $x$  - вертикальное отклонение частицы от равновесной орбиты,  $y$  - радиальное отклонение,  $l$  - продольная координата частицы вдоль равновесной орбиты. Соответствующие компоненты скорости движения выражаются следующим образом

$$v_\rho = \dot{y}, \quad v_\vartheta = (y+R) \cdot \frac{\dot{l}}{R}, \quad v_\xi = \dot{x}. \quad (\text{П.1.3})$$

Подставляя в (П.1.1) получим лагранжиан в новых переменных:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (y+R)^2 \frac{\dot{l}^2}{R^2}]} + e [A_\rho \dot{y} + A_\vartheta (y+R)^2 \frac{\dot{l}}{R} + A_\xi \dot{x}] - e\varphi. \quad (\text{П.1.4})$$

Уравнения движения могут быть получены как уравнения Лагранжа с лагранжианом (П.1.4):

$$\dot{p}_x = \frac{\partial L}{\partial x}; \quad \dot{p}_y = \frac{\partial L}{\partial y}; \quad \dot{p}_l = \frac{\partial L}{\partial l}, \quad (\text{П.1.5})$$

где  $P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ ,  $P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ ,  $P_\ell = \frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}}$  — сопряженные канонические импульсы.

Дифференцируя лагранжиан по  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\ell}$ , найдем выражения для канонических импульсов

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e A_\xi = p_x + e A_\xi, \quad (\text{П.1.6})$$

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{m \dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e A_\rho = p_y + e A_\rho,$$

$$P_\ell = \frac{m_0 (y+R)^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\dot{\ell}}{R^2} + e A_\vartheta \frac{y+R}{R} = (m v_\vartheta + e A_\vartheta) \left(1 + \frac{y}{R}\right) = (p_\vartheta + e A_\vartheta) \left(1 + \frac{y}{R}\right).$$

Здесь

$$p_x = m v_\xi = m \dot{x}; \quad p_y = m v_\rho = m \dot{y}, \quad p_\vartheta = m v_\vartheta = m (y+R) \cdot \frac{\dot{\ell}}{R}, \quad (\text{П.1.7})$$

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  — масса релятивистской частицы. Заметим, что согласно (П.1.2)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial}{\partial \ell} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Дифференцируя  $P_x, P_y, P_\ell$  по времени (полная производная) и лагранжиан по  $x, y, \ell$  и приравнявая с учетом (П.1.2) и отмеченных равенств, найдем уравнение:

$$\dot{p}_x = -e \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial A_\xi}{\partial t} \right) + e \dot{y} \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial \xi} - \frac{\partial A_\xi}{\partial \rho} \right) + e \frac{y+R}{R} \dot{\ell} \left( \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\xi}{\partial \vartheta} \right), \quad (\text{П.1.8})$$

$$\dot{p}_y = -e \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\rho}{\partial t} \right) + m (y+R) \frac{\dot{\ell}^2}{R^2} + e \frac{\dot{\ell}}{R} \left[ \frac{\partial (p A_\vartheta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \vartheta} \right] + e \dot{x} \left( \frac{\partial A_\xi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \xi} \right),$$

$$\dot{p}_\vartheta = -e \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial A_\vartheta}{\partial t} \right) + e \dot{y} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p A_\vartheta)}{\partial \rho} \right] + e \dot{x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\xi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \xi} \right) - \frac{\dot{y} \cdot p_\vartheta}{R+y}.$$

Выражения в скобках (П.1.8) представляют собой соответствующие компоненты электрического и магнитного полей, выраженные через скалярный и векторный потенциалы в цилиндрической системе координат. Учитывая это, а также заменяя

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{\ell}$  с помощью (П.1.7), находим систему уравнений движения частицы, записанную для импульсов и координат

$$\dot{p}_x = e E_x + \frac{e p_y}{m} B_\ell - \frac{e p_\vartheta}{m} B_y,$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m},$$

$$\dot{p}_y = e E_y + \frac{p_\vartheta^2}{m(y+R)} + \frac{e p_\vartheta}{m} B_x - \frac{e p_x}{m} B_\ell,$$

(П.1.9)



$$\dot{y} = \frac{P_y}{m},$$

$$\dot{p}_\vartheta = e E \ell - \frac{e P_y}{m} B_x + \frac{e P_x}{m} B_y - \frac{P_y P_\vartheta}{m(R+y)},$$

$$\dot{\ell} = \frac{P_\vartheta}{m(1 + \frac{y}{R})}.$$

При анализе колебаний частицы более удобно иметь уравнения, записанные в системе покоя равновесной частицы, т.е. в так называемой "сопровождающей" системе координат, переход в которую осуществляется с помощью преобразования

$\ell = z + \omega_0 R t$ , где  $\omega_0$  - угловая частота обращения равновесной частицы. Согласно общепринятой терминологии, равновесной частицей мы называем частицу, которая движется по равновесной орбите с постоянной угловой скоростью, т.е. синхронно с ускоряющим высокочастотным полем. Вместо импульса  $P_\vartheta$  удобно ввести отклонение от равновесного импульса  $P_0$ :  $P_\vartheta = P_0 + P_z$ , где  $P_0$  - продольный импульс равновесной частицы. И, наконец, в дальнейшем предполагается, что  $B_\ell \equiv 0$ , т.е. на орбите отсутствуют продольные магнитные поля, которые могут связывать радиальные и аксиальные поперечные колебания.

Заметим, что указанное преобразование к системе покоя равновесной частицы не является релятивистским. Поэтому электромагнитное поле должно быть вычислено в лабораторной системе, после чего производится формальная замена переменной.

Совершая преобразование, получим  $\dot{p}_\vartheta = \dot{p}_z$ . Кроме того

$$\frac{P_\vartheta}{m} = \frac{P_0 + P_z}{m_s + \Delta m} \approx \frac{P_0}{m_s} \left( 1 + \frac{1}{\gamma_s^2} \frac{P_z}{P_0} \right),$$

$$\frac{P_\vartheta^2}{m} \approx \frac{P_0^2}{m_s} \left( 1 + \frac{1 + \gamma_s^2}{\gamma_s^2} \frac{P_z}{P_0} \right), \quad \frac{1}{y+R} \approx \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{y}{R} \right), \quad (\text{П.1.10})$$

$$\frac{P_y P_\vartheta}{m(R+y)} \approx \frac{P_y P_0}{m_s R} \left( 1 + \frac{1}{\gamma_s^2} \frac{P_z}{P_0} - \frac{y}{R} \right),$$

$$\frac{P_\vartheta^2}{m(R+y)} \approx \frac{P_0^2}{m_s R} \left( 1 + \frac{1 + \gamma_s^2}{\gamma_s^2} \frac{P_z}{P_0} - \frac{y}{R} \right).$$

Здесь  $m_s$  - масса равновесной частицы,  $\gamma_s$  - релятивистский фактор. Подставляя (П.1.10) в (П.1.9), получим уравнения в системе покоя равновесной частицы (пренебрегая членами порядка  $\gamma_s^{-2}$  и малыми нелинейными членами):

$$\dot{p}_x = e E_x - \frac{e P_0}{m_s} B_y,$$

$$\dot{x} = \frac{P_x}{m_s},$$

$$\dot{p}_y = e E_y + \frac{e P_0}{m_s} B_x + \frac{P_0^2}{m_s R} \left( 1 + \frac{P_z}{P_0} - \frac{y}{R} \right),$$

$$\dot{y} = \frac{P_y}{m_s},$$

$$\dot{p}_z = e E_\ell,$$

$$\dot{z} = \dot{\ell} - \omega_0 R = \frac{P_0}{m_s} \left( \frac{1}{\gamma_s^2} \frac{P_z}{P_0} - \frac{y}{R} \right).$$

Составляющие магнитного поля  $V_x$  и  $V_y$  включают в себя постоянное фокусирующее поле и переменное высокочастотное поле. Как обычно, положим

$$V_x = V_0 \left(1 - n \frac{y}{R}\right) + \tilde{V}_x, \quad (П.1.12)$$

$$V_y = -V_0 n \frac{x}{R} + \tilde{V}_y,$$

где  $n = n(l)$  - показатель магнитного поля  $\tilde{V}_x$  и  $\tilde{V}_y$  - составляющие переменного магнитного поля. Условие движения по равновесной орбите имеет вид

$$eV_0 + \frac{P_0}{R} = 0. \quad (П.1.13)$$

Подставляя (П.1.12) в (П.1.11) и учитывая (П.1.13), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{P_0^2 n}{m_s R^2} x + e \left( E_x - \frac{P_0}{m_s} V_y \right), \\ \dot{x} &= \frac{p_x}{m_s}, \\ \dot{p}_y &= -\frac{P_0^2 (1-n)}{m_s R^2} y + \frac{P_0}{m_s R} p_x + e \left( E_y + \frac{P_0}{m_s} V_x \right), \end{aligned} \quad (П.1.14)$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m_s},$$

$$\dot{p}_z = e E_z, \quad \dot{z} = \frac{P_0}{m_s} \left( \frac{1}{\gamma_s^2} \frac{p_z}{P_0} - \frac{y}{R} \right).$$

Здесь  $V_x$  и  $V_y$  - обозначают составляющие переменного магнитного поля,  $E_x$  - продольная составляющая электрического поля в системе покоя равновесной частицы. Показатель магнитного поля в системе покоя периодически зависит от времени.

Система (П.1.14) получена для круговой равновесной орбиты. Нетрудно, однако, видеть, что она справедлива также в случае некруговой плоской орбиты, если радиус  $R$  круговой орбиты заменить мгновенным радиусом кривизны  $R = \frac{1}{K(l)}$ ,

где  $K(l)$  - кривизна равновесной орбиты в данной точке:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{P_0^2 K^2 n}{m_s} x + e \left( E_x - v V_y \right), \\ \dot{x} &= \frac{p_x}{m_s}, \\ \dot{p}_y &= -\frac{P_0^2 K^2 (1-n)}{m_s} y + \frac{P_0 K}{m_s} p_x + e \left( E_y + v V_x \right), \end{aligned} \quad (П.1.15)$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m_s},$$

$$\dot{p}_z = e E_z,$$

$$\dot{z} = \frac{P_0}{m_s} \left( \frac{1}{\gamma_s^2} \frac{p_z}{P_0} - K y \right),$$

где  $v = \frac{P_0}{m_s}$  - скорость орбитального движения частицы,  $K$  - кривизна равновесной орбиты для частицы с импульсом  $P_0$  (т.е.  $P_z = 0$ ).

## П Р И Л О Ж Е Н И Е 2

### ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ (ТЕМ) ВОЛНЫ В ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ ПУЧКОМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Распространение поперечных волн в двухпроводной линии, как известно, может быть описано телеграфными уравнениями [28].

В литературных источниках обычно имеют дело с однородными телеграфными уравнениями, так как там изучаются лишь распространение поперечных волн. Для расчета возбуждения поперечных волн нам придется поэтому вывести неоднородную систему телеграфных уравнений, описывающую возбуждение поперечных волн конвекционными токами.

Будем исходить из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (\text{П.2.1})$$

причем продольные компоненты поля полагаем равными нулю. Проще всего вывести телеграфные уравнения методом разделения переменных. Для этого положим

$$\vec{E} = V(l, t) \cdot \vec{e}(x, y), \quad \vec{H} = I(l, t) \cdot \vec{h}(x, y) \quad (\text{П.2.2})$$

Векторные функции  $\vec{e}(x, y)$  и  $\vec{h}(x, y)$  имеют только поперечные составляющие и нормированы так, чтобы

$$\int_S (\vec{e} \times \vec{h}) \cdot \vec{l}_0 \, dS = \int_S (e_x h_y - e_y h_x) \, dS = 1, \quad (\text{П.2.3})$$

причем интеграл берется по поперечному сечению линии,  $\vec{l}_0$  — единичный вектор в продольном направлении. Умножим первое уравнение (П.2.1) скалярно на  $\vec{h}$ , подставляя одновременно выражения для полей из (П.2.2):

$$\operatorname{rot} (V \cdot \vec{e}) \cdot \vec{h} = -\mu \frac{\partial I}{\partial t} \cdot h^2. \quad (\text{П.2.4})$$

Так как

$$\operatorname{rot} (V \vec{e}) = \operatorname{grad} V \times \vec{e} = \frac{\partial V}{\partial l} (\vec{l}_0 \times \vec{e}),$$

то полученное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\partial V}{\partial l} \cdot \vec{l}_0 (\vec{e} \times \vec{h}) = -\mu \frac{\partial I}{\partial t} \cdot h^2. \quad (\text{П.2.5})$$

Интегрируя уравнение (П.2.5) по поперечному сечению линии, получим, учитывая нормировку (П.2.3):

$$\frac{\partial V}{\partial \ell} = - \frac{\partial I}{\partial t} \int_S \mu h^2 dS . \quad (\text{П.2.6})$$

Аналогично, умножая второе уравнение (П.2.1) скалярно на  $\vec{e}$  и интегрируя, получим уравнение

$$\frac{\partial I}{\partial \ell} = - \frac{\partial V}{\partial t} \int_S \epsilon e^2 dS - \int_S \vec{j} \vec{e} dS . \quad (\text{П.2.7})$$

Интегралы в правых частях (П.2.6) и (П.2.7), как нетрудно видеть, имеют смысл погонных индуктивности и емкости:

$$L_0 = \int_S \mu h^2 dS , \quad C_0 = \int_S \epsilon e^2 dS . \quad (\text{П.2.8})$$

Уравнения (П.2.6) и (П.2.7) с использованием обозначений (П.2.8) могут быть переписаны в виде следующей системы телеграфных уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial \ell} + L_0 \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad (\text{П.2.9})$$

$$\frac{\partial I}{\partial \ell} + C_0 \frac{\partial V}{\partial t} = - \int_S \vec{j} \vec{e} dS .$$

Подвергнем эти уравнения преобразованию Лапласа по времени, полагая равными нулю величины  $V$  и  $I$  в начальный момент времени. Тогда система (П.2.9) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\ell} + s L_0 I &= 0 \\ \frac{\partial I}{\partial \ell} + s C_0 V &= - \int_S \vec{j} \vec{e} dS \end{aligned} \quad (\text{П.2.10})$$

Для получения решений этой системы необходимо еще найти граничные условия (на концах линии). Граничные условия задаются нагрузками, включенными на концах линии. Проще всего найти граничные условия, воспользовавшись теоремой Пойнтинга, которая для Лаплас-изображений векторов поля имеет вид

$$\oint_A (\vec{E} \times \vec{H}) \vec{n} dS = -s \int_V (\mu \vec{H}^2 + \epsilon \vec{E}^2) dV - \int_V \vec{j} \vec{E} dV , \quad (\text{П.2.11})$$

где  $\vec{n}$  - вектор внешней нормали по отношению к замкнутой поверхности  $A$ , охватывающей объем  $V$ . Применим это соотношение к нагрузке, включенной в начале линии. Поля в нагрузке пропорциональны величинам напряжения и тока на конце линии:

$$\vec{E} = V_1 \cdot \vec{e}_1 , \quad \vec{H} = I_1 \cdot \vec{h}_1 , \quad (\text{П.2.12})$$

где

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1(x, y, \ell) , \quad \vec{h}_1 = \vec{h}_1(x, y, \ell)$$

- некоторые векторные функции. Охватим нагрузку поверхностью  $A_1$ , пересекающей линию на таком удалении от нагрузки, чтобы поля высших (волноводных) типов волн были малы. В этом сечении

$$\vec{E} = V_1 \cdot \vec{e} , \quad \vec{H} = I_1 \cdot \vec{h} . \quad (\text{П.2.13})$$

Подставляя теперь (П.2.12) и (П.2.18) в (П.2.11); учитывая нормировку (П.2.3), а также то, что наружная нормаль  $\vec{n}$  к  $A$  на сечении линии  $S$  совпадает с  $\vec{e}_1$ , получим

$$V_1 I_1 = -2s \cdot W(s) - P(s) - V_1 \int_V \vec{j} \vec{e}_1 dV, \quad (\text{П.2.14})$$

где

$$W(s) = \int_V \left( \frac{\mu \vec{H}^2}{2} + \frac{\epsilon \vec{E}^2}{2} \right) dV, \quad P(s) = \int_V \sigma \vec{E}^2 dV,$$

причем интегрирование производится по всему объему нагрузки. Деля правую и левую части (П.2.14) на  $V_1$ , получим

$$I_1 = -V_1 \frac{2sW(s) + P(s)}{V_1^2} - \int_V \vec{j} \vec{e}_1 dV. \quad (\text{П.2.15})$$

Так как  $W(s)$  и  $P(s)$  пропорциональны  $V_1^2$ , то множитель около  $V_1$  в правой части (П.2.15) является характеристикой только нагрузки и не зависит от амплитуды полей. В теории цепей этот множитель является входной проводимостью нагрузки /28/:

$$Y_1(s) = \frac{2sW(s) + P(s)}{V_1^2(s)}. \quad (\text{П.2.16})$$

Аналогичные соотношения можно получить также для другого конца линии. В результате получаем граничные условия для системы (П.2.10):

$$I_1 = -V_1 \cdot Y_1 - \int_V \vec{j} \vec{e}_1 dV, \quad (\text{П.2.17})$$

$$I_2 = V_2 Y_2 + \int_V \vec{j} \vec{e}_2 dV.$$

Заметим, что граничные условия неоднородны, что является результатом возбуждения линии на концах. В частности, на концах линии могут присутствовать продольные компоненты электрического поля, взаимодействующие с орбитальным движением пучка и отсутствующие в самой линии.

Для упрощения можно исключить, например, ток  $I$  из уравнений и граничных условий. Первое из уравнений (П.2.10) дает

$$I = -\frac{1}{sL_0} \cdot \frac{\partial V}{\partial l} \quad (\text{П.2.18})$$

Подставляя это выражение во второе из уравнений (П.2.10) и в граничные условия (П.2.17), получим:

$$\frac{d^2 V}{dl^2} - s^2 L_0 C_0 V = sL_0 \int_S \vec{j} \vec{e} ds,$$

$$\left( \frac{V}{Z_1} - \frac{1}{sL_0} \frac{dV}{dl} \right)_1 = - \int_V \vec{j} \vec{e}_1 dV, \quad (\text{П.2.19})$$

$$\left( \frac{V}{Z_2} + \frac{1}{sL_0} \frac{dV}{dl} \right)_2 = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{e}_2 dV,$$

где

$$z_1 = \frac{1}{Y_1}, \quad z_2 = \frac{1}{Y_2} -$$

входные сопротивления нагрузок.

Пользуясь принципом суперпозиции, решение (П.2.19) можно найти в два приема: вначале получить решение неоднородного дифференциального уравнения с однородными граничными условиями, затем - решение однородного уравнения с неоднородными граничными условиями и сложить оба результата.

Решение неоднородного уравнения (П.2.19) при однородных граничных условиях

$$\left(\frac{V}{z_1} - \frac{1}{sL_0} \frac{dV}{dl}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{V}{z_2} + \frac{1}{sL_0} \frac{dV}{dl}\right)_2 = 0 \quad (\text{П.2.20})$$

может быть выражено через продольную функцию Грина (1.3.56):

$$V'(l,s) = \int_V \vec{j}(x',y',l',s) \cdot \vec{e}(x',y') \cdot G(l,l',s) dx'dy'dl', \quad (\text{П.2.21})$$

причем интеграл берется по всему объему линии, исключая концевые области.

Решение уравнения (П.2.19) без правой части, но с неоднородными граничными условиями, как можно показать, имеет вид

$$V''(l,s) = G(l,l_1,s) \cdot I_{1t} + G(l,l_2,s) \cdot I_{2t}, \quad (\text{П.2.22})$$

где

$$I_{1t} = \int_V \vec{j}(x',y',l',s) \cdot \vec{e}_1(x',y',l') dx'dy'dl',$$

$$I_{2t} = \int_V \vec{j}(x',y',l',s) \cdot \vec{e}_2(x',y',l') dx'dy'dl',$$

$l_1$  и  $l_2$  - координаты концов линии.

Используя выражения (П.2.21) и (П.2.22), можно записать теперь выражения для электрического поля, возбуждаемого пучком в линии:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,y,l,s) = & \left[ V'(l_1,s) + V''(l_1,s) \right] \cdot \vec{e}_1(x,y,l) + \\ & + \left[ V'(l_2,s) + V''(l_2,s) \right] \cdot \vec{e}_2(x,y,l) + \\ & + \left[ V'(l,s) + V''(l,s) \right] \cdot \vec{e}(x,y). \end{aligned} \quad (\text{П.2.23})$$

Подставляя сюда выражение для  $V'$  и  $V''$ , а также полагая  $l_1 = -\frac{L}{2}$ ,  $l_2 = \frac{L}{2}$ , где  $L$  - длина линии, нетрудно показать, что электрическое поле может быть выражено через тензорную функцию Грина (1.3.55).

## Л и т е р а т у р а

1. В.Л.Ауслендер, Г.И.Будкер и др. Исследование  $\phi$ -мезонного резонанса на встречных электрон-позитронных пучках. Ядерная физика, 9, 114, 1969.
2. Г.И.Будкер и др. Проверка квантовой электродинамики в рассеянии электронов на электронах. Ядерная физика, 6, 1221, 1967.
3. V.E.Balakin, G.I.Budker and all. Investigation of the  $\phi$ -meson resonance by electron-positron storage ring colliding beams. Phys. Lett., 1971, v.34B, No.4, p.328.
4. Г.И.Будкер. Работы на встречных пучках Сибирского Института ядерной физики. В кн. Материалы Международной конференции по физике высоких энергий (Киев, 1970), т.2, Дубна, 1970, стр. 1017-1023.
5. S.T.Belyaev, G.I.Budker, S.G.Popov. The possibility of using storage rings with internal targets. Proc. of the 3-d International Conference on High Energy Physics and Nuclear Structure. New-York, Sept., 8-12, 1969, p.606.
6. Синхротронное излучение в исследованиях твердого тела. Сборник статей. М. "Мир", 1970.
7. М.М.Карлинер, Г.Н.Острейко, И.А.Шехтман. Автофазировка интенсивного пучка в накопителе релятивистских пучков. ЖТФ, 39, 326, 1969.
8. В.Л.Ауслендер, М.М.Карлинер, А.А.Наумов, С.Г.Попов, А.Н.Скринский, И.А.Шехтман. Фазовая неустойчивость интенсивного электронного пучка в накопителе. АЭ, 20, 210, 1966.
9. Г.Брук. Циклические ускорители заряженных частиц. М., Атомиздат, 1970.
10. М.М.Карлинер. Ограничение интенсивности пучка в электрон-позитронных накопителях вследствие когерентного электромагнитного взаимодействия пучка с окружающей материальной структурой. Докторская диссертация. Новосибирск, 1973.
11. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.
12. П.Стэррак. Статическая и динамическая электронная оптика. М., "ИЛ", 1958.
13. А.А.Воробьев, А.Н.Диденко, Е.С.Коваленко, В.Н.Морозов. Некоторые аспекты теории циклических волноводных электронных ускорителей. Труды международной конференции по ускорителям высоких энергий, Женева, ЦЕРН, 680 (1959).
14. А.Н.Лебедев. Фазовая устойчивость в ускорителях с произвольной конфигурацией высокочастотного поля. ПТЭ, №6, 21(1961).
15. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Докторская диссертация. Новосибирск, 1969.
16. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика, М., Наука, 1964.
17. Ф.Морс, Г.Фешбах. Методы теоретической физики, т.2, М. "ИЛ", 1960.

18. Н.Н.Боголюбов, Ю.М.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1968.
19. В.В.Никольский. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М., Наука, 1965.
20. Н.Е.Коткин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, М., Наука, 1965.
21. Б.З.Кацнельсон. Высокочастотная электродинамика, М., Наука, 1966.
22. A.M.Sessler. Summer Study on Instabilities in Stored Particle Beams. Stanford, SLAC-49, 8(1965).
23. Н.С.Диканский, А.Н.Скрябинский. Когерентная неустойчивость сгустка заряженных частиц. АЭ, 21, 176, 1966.
24. W.C.Barber, B.Gittelman, G.K.O'Neil, B.Richter. Beam Instabilities in the Princeton-Stanford Storage Rings. Proc. of the 5-th International Conference on High Energy Accelerators ( Frascati, 1965 ), p.330.
25. W.Shocley. Currents to conductors induced by a moving point charge. Journ. Appl. Phys., 9, 655, 1938.
26. Я.Н.Фельд. Наведение токов движущимися зарядами. ДАН СССР, 83, №3, 447 (1953).
27. Г.М.Герштейн. Моделирование полей методом электростатической индукции. М., Наука, 1970.
28. Л.А.Вайнштейн. Электромагнитные волны, М., "Сов.радио", 1957.
29. С.Сешу. Н.Г.Балабанян. Анализ линейных цепей, М-Л, Госэнергоиздат, 1963.

ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ  
 ПОДРОБНОСТИ И КОПИЯ Т. А. С. П. И. Д. А. Т. М. И. О. Б. С. С. Т.  
 УЧЕБНО-НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
 ЗНАК № 102

ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ И ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ



