13

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 27

Т.А.Всеволожская, М.А.Любимова, Г.И.Сильвестров

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЛИНЗ

Новосибирск

1974

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЛИНЗ

Т.А.Всеволожская, М.А.Любимова, Г.И.Сильвестров

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрены оптические свойства линз, осуществляющих фокусировку частиц высокой энергии линейно растущим магнитным полем внутри цилиндрического проводника с близкой к однородной плотностью тока: аберрации, вызванные неоднородностью плотности тока при импульсном питании, краевые эффекты и сферическая аберрация. Применение лития в качестве проводящего материала линз при реально достижимых градиентах поля, больших 200 кэ/см, сводит к минимуму эффекты взаимодействия частиц с материалом линзы.

Использование линейно растущего магнитного поля внутри проводника с однородной плотностью тока для фокусировки частиц высоких энергий ограничено потерями из-за взаимодействия частиц с веществом и может быть осуществлено при условии малой плотности материала проводника. В работах /1,2/ описываются линзы, в которых роль проводящего цилиндра выполняет столб газового разряда с током от 4 кА /1/ до 500 кА /2/. Использование лития (Li) в качестве проводящего материала для цилиндрических линз было предложено Г.И.Будкером в 1960 году в применении к фокусировке позитронов с энергией $\sim$100 Мэв. Эксперименты по пропусканию больших токов через литий, проведенные в последнее время в ИЯФ СО АН /3/, показали, что при определенных конструктивных решениях могут быть получены магнитные поля на поверхности литиевого цилиндра в 200-250 кэрст, что позволяет создать сильнофокусирующие линзы для частиц высокой энергии ($p \gtrsim 0{,}5$ Гэв/с) при длинах линз, значительно меньших ядерной длины, так что потери частиц и приращение фазового объема пучков, обусловленные взаимодействием с веществом линзы оказываются достаточно малыми. Это открывает широкие возможности для применения цилиндрических линз в оптике пучков высоких энергий.

В настоящее время в ИЯФ разрабатывается несколько вариантов цилиндрических литиевых линз для следующих задач:

1. Линза для фокусировки электронов с энергией 500 Мэв в блоке электрон-позитронного конвертера.
2. Линза для собирания с протонной мишени пучка антипротонов и π -мезонов с энергией 2 Гэв и выше с углом собирания до 0,2 рад.
3. Линза для фокусировки в малый размер протонных пучков сверхвысоких энергий - 30 Гэв и более.

В таблице 1 приведены предполагаемые технические параметры этих линз, а также параметры, характеризующие взаимодействие частиц с веществом линзы - потери за счет ядерного поглощения (η), угловой разброс за счет многократного рассеяния ($\overline{\theta^2}$) и энергетический разброс, обусловленный энергетическим разбросом ионизационных потерь энергии ($\mathcal{E}$).

Таблица 1

Энергия E Гэв	Диаметр d см	Длина l см	Максимальное поле, кэрст	Ток ка	η%	$\sqrt{\overline{\theta^2}}$ мрад	ε%
0,5	0,8	2,5	100	200		3,5	0,15
2	3,8	10	180	1700	10	1,7	0,15
30	1,2	10	250	750	10	0,1	0,01

В реальных условиях искажения эмитанса пучков не ограничиваются многократным рассеянием частиц, но существенно зависят от аберраций линзы:

аберраций за счет неоднородного распределения плотности тока по сечению линзы при импульсном питании;

аберраций за счет краевых эффектов;

сферической аберрации при больших углах сходимости пучков.

Изучение названных аберраций и является предметом настоящей работы.

1. Аберрации, вызванные неоднородной плотностью тока

Специфика цилиндрических линз, состоящая в том, что фокусируемые частицы движутся в металле на всей длине фокусировки, требует уменьшения их длины и соответствующего увеличения магнитного поля до максимальных значений, определяемых механической прочностью и нагревом линзы. Естественный путь уменьшения нагрева линзы состоит в уменьшении длительности импульса питающего тока. Ограничением на этом пути является нелинейность распределения поля из-за неоднородности плотности тока, приводящая к аберрациям.

При питании синусоидальным импульсом тока с частотой ω распределение поля по сечению стержня радиуса r_0 описывается выражением

$$H(r,t) = H_0 \operatorname{Re}\left[i\,\frac{J_1(kr)}{J_1(kr_0)}\cdot e^{-i\omega t}\right] + \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\varphi_j} J_1(\mu_j r), \qquad (1)$$

где $k=\frac{\sqrt{2i}}{\delta}$, $\delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\omega}}$ – толщина скин-слоя,

J_n – функция Бесселя n-го порядка, $\mu_j r_0$ – корни уравнения $J_1(x)=0$, H_0 – амплитуда поля на поверхности стержня,

$$a_j = -4H_0\left(\frac{r_0}{\delta}\right)^2 \frac{\mu_j r_0}{(\mu_j r_0)^4 + 4\left(\frac{r_0}{\delta}\right)^4}\cdot\frac{1}{J_0(\mu_j r_0)}, \quad \varphi_j = -\frac{c^2\mu_j^2 t}{4\pi\sigma}$$

Первый член в правой части (1) описывает периодическую составляющую поля, меняющуюся с частотой вынуждающего тока, второй – сумму релаксационных составляющих, обеспечивающих непрерывность электрического и магнитного полей при $t=0$. Их постоянные времени зависят только от диаметра стержня и проводимости его материала.

Выражая время через фазу вынуждающего тока ωt, показатель экспоненты j-ой релаксационной составляющей получаем в виде $\varphi_j = \frac{\delta^2}{2r_0^2}(\mu_j r_0)^2\,\omega t$. В интересующем нас случае толщина скин-слоя сравнима с радиусом стержня, $\delta \sim r_0$, значения же $\mu_j r_0$ при $j=1,2,3,\ldots$ есть 3,83, 7.02, 10,2,..., так что в фазах, близких к максимуму тока $\omega t \approx \pi/2$, значения φ_j для всех j значительно превышают 1, и вкладом релаксационных составляющих можно пренебречь, считая процесс установившимся.

Для определения нелинейности распределения поля по радиусу стержня при заданном отношении $\delta/r_0 \sim 1$ найдем средний по сечению стержня квадрат отклонения распределения поля от линейного с градиентом, оптимальным для заданной фазы вынуждающего тока

$$\overline{(\Delta H)^2} = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\left[H(r,t) - r\,G(t)\right]^2 2\pi r\,dr$$

Оптимальное значение градиента $\frac{G(t)}{(\Delta H)^2}$ в заданной фазе ωt находится из условия минимума $\overline{(\Delta H)^2}$, т.е. $\frac{\partial\overline{(\Delta H)^2}}{\partial G}=0$, и равно

$$G_{опт}(t)=\frac{4H_0}{r_0}\,Re\left[ie^{-i\omega t}\,\frac{J_2(kr_0)}{J_1(kr_0)}\right] \qquad (2)$$

Минимальное для заданной фазы ωt значение среднего квадрата нелинейности поля есть

$$\overline{(\Delta H)^2}_{min,\omega t}=\frac{2H_0^2}{r_0^2}\int_0^{r_0}\left\{Re\left[ie^{-i\omega t}\left[\frac{J_1(kr)}{J_1(kr_0)}-4\frac{r}{r_0}\frac{J_2(kr_0)}{J_1(kr_0)}\right]\right]\right\}^2 r\,dr= \qquad (3)$$

$$=\frac{H_0^2}{r_0^2}\left[\int_0^{r_0}ff^*r\,dr-Re\left(e^{-2i\omega t}\int_0^{r_0}f^2r\,dr\right)\right],$$

где $f=\frac{J_1(kr)}{J_1(kr_0)}-4\frac{r}{r_0}\cdot\frac{J_2(kr_0)}{J_1(kr_0)}$, f^* – комплексно сопряженное значение f.

При оптимальном значении фазы, определяемом как

$$\omega t_{опт}=\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{Im\left(\int_0^{r_0}f^2r\,dr\right)}{Re\left(\int_0^{r_0}f^2r\,dr\right)},\quad Re\left(e^{-2i\omega t}\int_0^{r_0}f^2r\,dr\right)>0, \qquad (4)$$

Средний квадрат нелинейности поля достигает своего минимального для заданного отношения δ/r_0 значения

$$\overline{(\Delta H)^2}_{min}=\frac{H_0^2}{r_0^2}\left\{\int_0^{r_0}|f|^2r\,dr-\left|\int_0^{r_0}f^2r\,dr\right|\right\} \qquad (5)$$

Значения интегралов в (3), (4) и (5) есть

$$\int_0^{r_0}|f|^2r\,dr=-\left(\frac{\delta}{r_0}\right)^2\left\{4\left|\frac{J_2(kr_0)}{J_1(kr_0)}\right|^2+Im\left[\frac{kr_0J_0(kr_0)}{J_1(kr_0)}\right]\right. \qquad (6)$$

$$\int_0^{r_0}f^2r\,dr=1-\frac{J_0(kr_0)J_2(kr_0)}{[J_1(kr_0)]^2}-8\left[\frac{J_2(kr_0)}{kr_0J_1(kr_0)}\right]^2$$

Зависимость оптимальной фазы от отношения δ/r_0 (рис.1) в рассматриваемом диапазоне значений δ/r_0 хорошо описывается функцией $(\omega t)_{опт}=\frac{\pi}{2}+const\cdot\left(\frac{r_0}{\delta}\right)^2$, так что время Δt от максимума тока до момента достижения оптимальной фазы оказывается независящим от ω и равным $\Delta t=const\cdot\frac{2\pi\sigma r_0^2}{c^2}$. (7)

На рис.2 представлены графики зависимости от r отклонения поля от линейного с оптимальным градиентом $\Delta H(r)=H(r,\omega t_{опт})-rG_{опт}(\omega t_{опт})$ в оптимальных фазах при $\delta/r_0=0{,}5$ и $\delta/r_0=\sqrt{0.5}$. Пунктирными линиями показаны среднеквадратичные значения отклонений $\pm\sqrt{\overline{(\Delta H)^2}}$, составляющие $\pm1{,}28\cdot10^{-2}$ и $\pm0{,}37\cdot10^{-2}$ от поля на поверхности.

Если частицы равномерно распределены по сечению линзы, величина $\overline{(\Delta H)^2}$ определяет в приближении тонкой линзы средний квадрат аберрационного угла $\overline{(\Delta\alpha_{аб})^2}=\overline{(\Delta H)^2}\cdot\left(\frac{300\ell}{pc}\right)^2$ (ℓ – эффективная длина линзы), и средний квадрат увеличения размера пучка в главном фокусе линзы $\overline{(\Delta r_{аб})^2}=\overline{\alpha_{аб}^2}\cdot F_{эфф}^2$. Здесь $F_{эфф}$ – эффективное фокусное расстояние линзы, определяемое оптимальным значением градиента, а именно

$F_{эфф}=\frac{pc}{300}\cdot\frac{1}{\ell G_{опт}}$, p – импульс частицы в электронвольтах (ЭВ), $G_{опт}$ – в эрст/см.

При двух рассмотренных значениях отношения δ/r_0, равных 0,5 и $\sqrt{0{,}5}$, среднеквадратичные приращения координаты в фокусе линзы составляют $14{,}5\cdot10^{-3}\,r_0$ и $3{,}8\cdot10^{-3}\,r_0$, причем внутри среднеквадратичного приращения координаты $|\Delta r_{аб}|\leq\sqrt{\overline{(\Delta r_{аб})^2}}$ оказывается 52% и 53% частиц, соответственно (часть сечения линзы с $|\Delta H|\leq\sqrt{\overline{\Delta H^2}}$, рис.2).

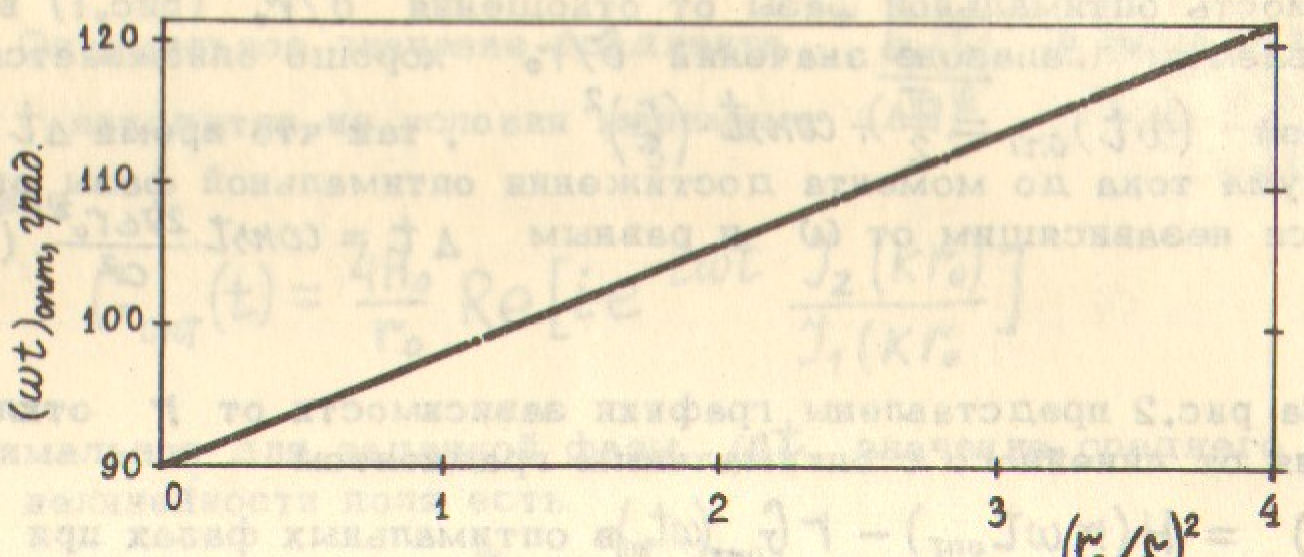


Рис.1. Зависимость оптимальной фазы вынуждающего тока от величины δ/r_0.

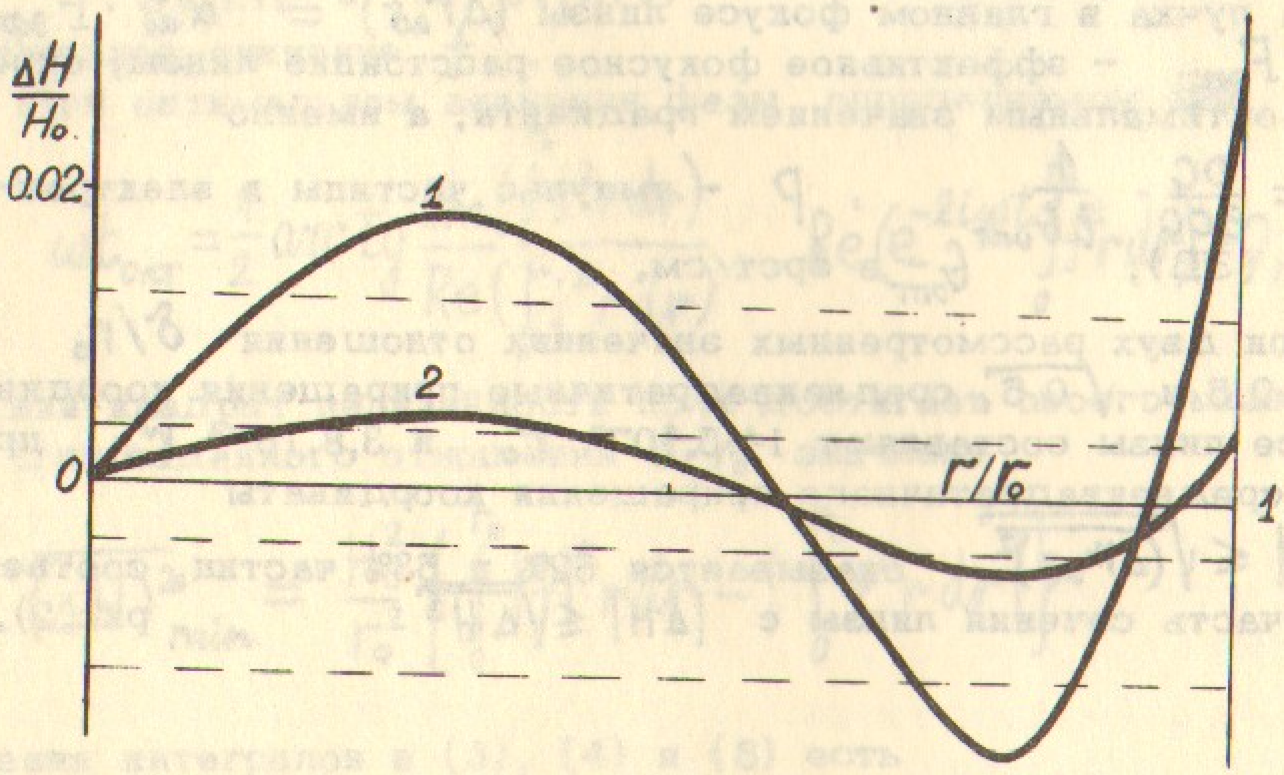


Рис.2. Отклонение r -зависимости поля от линейной в оптимальной фазе.
Кривая 1 соответствует δ/r_0 =0,5, кривая 2 – $\delta/r_0=\sqrt{0,5}$.
Пунктирными линиями показаны среднеквадратичные значения отклонений $\pm\sqrt{\overline{(\Delta H)^2}}$.

Если распределение частиц по сечению линзы существенно отличается от однородного, средний квадрат угла аберрации должен быть вычислен с учетом функции распределения частиц $\varphi(r)$, а именно

$$\overline{\alpha^2_{ab}} = \left(\frac{300e}{pc}\right)^2 \frac{\int_0^{r_0} \varphi(r)\left[H(r,t) - r\,G_{опт}(t)\right]^2 r\,dr}{\int_0^{r_0} \varphi(r)\,r\,dr} \qquad (8)$$

Сравнение значений $\overline{(\Delta r_{ab})^2}$ в оптимальных фазах и в фазе $\pi/2$ (рис.3) показывает, что оптимальный выбор фазы пролета частиц существенно уменьшает аберрацию и делает допустимыми достаточно малые значения отношения δ/r_0 вплоть до $\sim 0{,}5$.

Однако с уменьшением длительности импульса оптимальная фаза пролета частиц существенно сдвигается за максимум тока (при δ/r_0 =0,5, $\omega t_{опт}$ =120°), что при заданном фокусном расстоянии требует увеличения амплитуды поля как $H_0 \sim \frac{1}{\cos\omega\Delta t}$, где Δt – независящее от частоты время от максимума поля до момента установления его оптимального распределения. Нагрев же за импульс, пропорциональный H_0^2/ω, меняется как $W \sim \frac{1}{\omega\cos^2\omega\Delta t}$ и достигает минимального значения при ω, приближенно определяемом из условия $\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{\omega\cos^2\omega\Delta t}\right)=0$, т.е. $2\omega\Delta t\cdot tg\,\omega\Delta t = 1$, что соответствует $\delta/r_0 \simeq 0{,}5$.

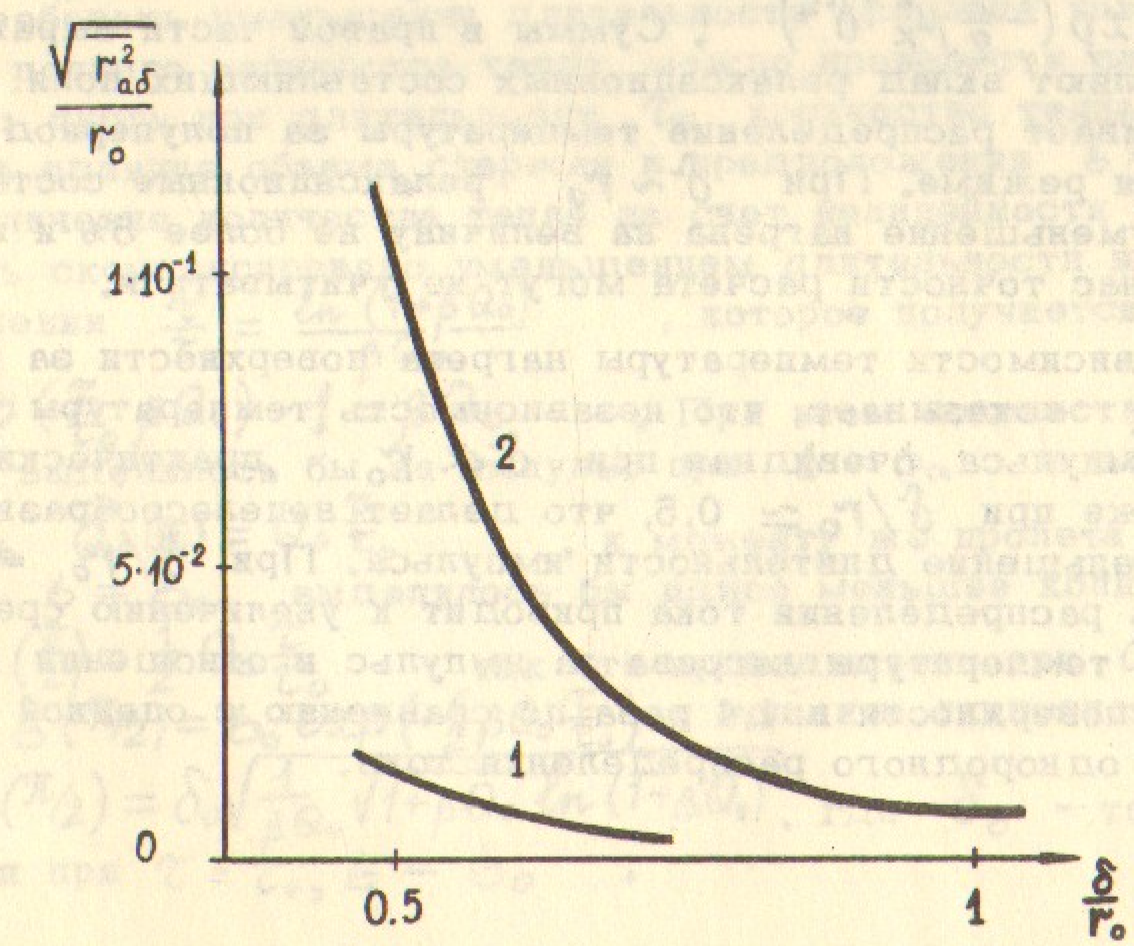


Рис.3. Среднеквадратичное аберрационное приращение размера пучка в главном фокусе линзы в зависимости от δ/r_0 в оптимальной фазе (1) и в фазе $\pi/2$ (2).

II. Нагрев

Оценка нагрева линзы за импульс в предположении однородной плотности тока и малой зависимости проводимости и теплоемкости от температуры для литиевой линзы при поле на поверхности H_0 =100 кэрст и δ/r_0 =0,7 дает величину $\Delta T \simeq 70^0$ независимо от ее радиуса, поскольку температура нагрева квадратично зависит и от градиента и от радиуса (из-за квадратичной зависимости T от радиуса при заданном δ/r_0).

Учет неоднородности плотности тока при $\sigma = \sigma_0$ приводит в пренебрежении теплопроводностью к следующему выражению для распределения температуры нагрева за импульс при токе $I = I_0 \sin\omega t$, $t \leq \pi/\omega$

$$T(r) = \frac{H_0^2}{8\pi\rho c}\left\{\pi\left|\frac{J_0(x\sqrt{i})}{J_1(x_0\sqrt{i})}\right|^2 + 4\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_j b_k \mu_j \mu_k}{\mu_j^2+\mu_k^2} J_0(\mu_j r) J_0(\mu_k r) - \right. \tag{9}$$

$$\left. - 2\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j J_0(\mu_j r_0) J_0(\mu_j r)\cdot \mathrm{Re}\left[\left(1+i\frac{\mu_j^2\delta^2}{2}\right)\frac{x_0\sqrt{i}\, J_0(x\sqrt{i})}{J_1(x_0\sqrt{i})}\right]\right\},$$

где C - теплоемкость, ρ - плотность, a_j определены в (1), $b_k = a_k\left[1+\exp\left(-\frac{\pi}{2}\mu_k^2\cdot\delta^2\right)\right]$. Суммы в правой части выражения (9) определяют вклад релаксационных составляющих поля. Первый член описывает распределение температуры за полупериод в установившемся режиме. При $\delta \sim r_0$ релаксационные составляющие дают уменьшение нагрева на величину не более 5% и при интересующей нас точности расчета могут не учитываться.

Анализ зависимости температуры нагрева поверхности за импульс от δ/r_0 показывает, что независимость температуры от длительности импульса, очевидная при $\delta \ll r_0$,практически имеет место уже при $\delta/r_0 \simeq$ 0,5, что делает нецелесообразным дальнейшее уменьшение длительности импульса. При δ/r_0 =0,7 неоднородность распределения тока приводит к увеличению средней по сечению температуры нагрева за импульс в отношении 1,08, а температуры поверхности в 1,4 раза по сравнению с оценкой в предположении однородного распределения тока.

Для напряженных линз с полями $H_0 \gtrsim$ 100 кэрст оценка нагрева должна производиться с учетом изменения проводимости,которое может быть описано, как $\sigma = \frac{\sigma_0}{1+\beta q}$ /4/. Здесь σ_0 - проводимость при начальной температуре, q - прирост количества тепла в единице объема по сравнению с начальным состоянием, β - тепловой коэффициент проводимости, равный для Li $0{,}946.10^{-2}\frac{1}{\text{кал.}}$ с точностью $\sim$ 5% в диапазоне температур 0÷180°.
Количество тепла, выделившееся за импульс в единице объема, равно $Q = \frac{\exp(\beta Q_0)-1}{\beta}$, где Q_0 - количество тепла, которое выделилось бы за импульс при постоянной проводимости $\sigma = \sigma_0$.
Конечные значения проводимости и прироста температуры есть:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\beta Q_0}, \quad \Delta T = \frac{e^{\beta Q_0}-1}{\alpha},$$

где α - температурный коэффициент проводимости, равный для Li $4{,}4.10^{-3}$ град$^{-1}$.

При нагреве до температуры плавления T=180°C поправка за счет температурной зависимости физических характеристик лития составляет 42°.

Оценку изменения толщины скин-слоя к фазе пролета частиц $\omega t \simeq \frac{\pi}{2}$ с учетом того, что нелинейный рост температуры может потребовать уменьшения длительности импульса тока для уменьшения полного количества тепла, можно произвести следующим образом: пусть при длительности τ_0 количество тепла, выделившееся в единице объема стержня в предположении $\sigma = \sigma_0$ есть Q_0 . Увеличение количества тепла за счет нелинейности нагрева может быть скомпенсировано уменьшением длительности импульса в отношении $\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\ln(1+\beta Q_0)}{\beta Q_0}$, которое получается из условия $\exp\left(\frac{\tau}{\tau_0}\beta Q_0\right) - 1 = \beta Q_0$. При этом количество тепла, которое выделилось бы за импульс при $\sigma = \sigma_0$ и длительности τ есть $\widetilde{Q}_0(\pi) = Q_0\frac{\tau}{\tau_0}$, к моменту же пролета частиц ($\omega t = \frac{\pi}{2}$) при $\sigma = \sigma_0$ выделилось бы вдвое меньшее количество тепла $\widetilde{Q}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}Q_0\frac{\tau}{\tau_0}$, так что проводимость при $\omega t = \frac{\pi}{2}$ равна $\sigma(\pi/2) = \sigma_0\exp\left(-\frac{1}{2}\beta Q_0\frac{\tau}{\tau_0}\right)$ и толщина скин-слоя - $\delta(\pi/2)$ - $\delta(\pi/2) = \delta_0\sqrt{\frac{1}{\beta Q_0}\sqrt{1+\beta Q_0}\,\ln(1+\beta Q_0)}$, где δ_0 - толщина скин-слоя при $\tau = \tau_0, \sigma = \sigma_0$.

Отличие $\delta(\frac{\pi}{2})$ от δ_0 не превышает нескольких процентов в широком диапазоне температур. Так при нагреве за импульс до температуры плавления, когда $\beta\widetilde{Q}_0 = \ln(1+\alpha T) = 0.57$ и τ/τ_0 =0,73 толщина скин-слоя в момент пролета частиц $\delta(\frac{\pi}{2}) = 0.98\,\delta_0$.

Таким образом, существенное уменьшение длительности импульса для компенсации нелинейного роста нагрева практически не приводит к изменению заданного распределения поля в момент пролета частиц. Последнее заключение сделано с учетом того, что поле в процессе нагрева практически безинерционно следует за изменением проводимости, поскольку, как показано выше, время релаксации при $\delta \sim r_0$ мало по сравнению с длительностью импульса.

Проведенное рассмотрение нагрева с учетом его нелинейности и неоднородности плотности тока позволяет сделать оценку максимального поля на поверхности стержня H_{max}, при котором средняя по сечению температура не превышает температуру плавления при условии оптимального выбора длительности импульса. Для лития эта величина составляет H_{max} =170 кэрст.

Ш. Краевые эффекты

Краевые эффекты, то есть зависимость поля от z вблизи торцов линзы и, связанная с нею дополнительная нелинейность радиального распределения интегралов поля $\int H(r,z)dz$, имеют для цилиндрических линз тем большее значение, что в целях уменьшения ядерного поглощения и рассеяния частиц длина линзы должна быть сделана минимальной.

Для определения краевой аберрации вне зависимости от геометрии токоподвода (при условии его аксиальной симметрии и проводимости, одинаковой с проводимостью линзы) удобно вести граничную функцию $f(z) = \frac{1}{H_0}\cdot H(r_0,z)$, которая полностью определяет поле в рабочей области линзы при краевых условиях: H=0 при z =0 и $H \to H_0 \frac{J_1(\kappa r)}{J_1(\kappa r_0)}$ при $z \to \infty$, а именно:

$$H(r,z) = \frac{2H_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)}{J_1(\lambda r_0)}\sin qz \int_0^\infty f(z')\sin qz'\,dz'\,dq \qquad (10)$$

где $\lambda^2 = \sqrt{\kappa^2 - q^2}$. Вне токоподвода, при $z \geqslant z_0$, (рис.4), $f(z) = 1$, внутри же определяется его геометрией и толщиной скин-слоя. Поскольку средний квадрат угла краевой аберрации пропорционален среднему квадрату отклонения r - зависимости интегралов поля от асимптотической $J_1(\kappa r)/J_1(\kappa r_0)$, представим интегралы поля в виде

$$\int_0^\infty H(r,z)dz = H_0\frac{J_1(\kappa r)}{J_1(\kappa r_0)}(z - z_{эфф}) + \sum_{\ell=1}^\infty B_\ell J_1(\mu_\ell r), \qquad (11)$$

где $z_{эфф}$ - смещение эффективного края линзы относительно физического края $z = 0$. Используя для $H(r,z)$ выражение (10), получаем коэффициенты B_ℓ равными

$$B_\ell = \frac{2H_0\mu_\ell}{\varkappa_\ell^2 r_0 J_0(\mu_\ell r_0)}\left[\int_0^{z\to\infty} f(z)e^{-\varkappa_\ell z}dz + z_0 - z_{эфф} - \int_0^{z_0} f(z)dz\right], \qquad (12)$$

где $\varkappa_\ell = \sqrt{\mu_\ell^2 - \kappa^2}$, z_0 - граница токоподвода, отвечающая условию $\underset{z \geqslant z_0}{f(z) = 1}$. Стремление к бесконечности верхнего предела интегрирования в (12) и (11) в реальном случае конечной длины линзы Z следует понимать как $Z \gg \frac{1}{|\varkappa_1|}$, что позволяет рассматривать эффект каждого края независимо от другого.

Средний квадрат угла аберрации за счет одного края есть

$$\overline{\alpha^2_{аб}} = \frac{\alpha_0^2}{H_0^2 Z^2}\sum_{\ell=1}^\infty B_\ell^2 J_0^2(\mu_\ell r_0), \qquad (13)$$

где α_0 - угол поворота частицы в поле H_0 на длине Z. Значение $z_{эфф}$ находим из условия минимальности $\overline{\alpha^2_{аб}}$, т.е. $\frac{\partial\overline{\alpha^2_{аб}}}{\partial z_{эфф}} = 0$, так что $z_0 - z_{эфф} = \int_0^{z_0} f(z)dz - \frac{1}{\sum_{\ell=1}^\infty \frac{\mu_\ell^2}{\varkappa_\ell^4 r_0^2}}\cdot\sum_{\ell=0}^\infty \frac{\mu_\ell^2}{\varkappa_\ell^4 r_0^2}\int_0^\infty f(z)e^{-\varkappa_\ell z}dz$,

$$\overline{\alpha^2_{аб}} = \frac{4\alpha_0}{Z^2}\left\{\sum_{\ell=1}^\infty \frac{\mu_\ell^2\left[\int_0^\infty f(z)e^{-\varkappa_\ell z}dz\right]^2}{\varkappa_\ell^4 r_0^2} - \frac{1}{\sum_{\ell=1}^\infty \frac{\mu_\ell^2}{\varkappa_\ell^4 r_0^2}}\cdot\left[\sum_{\ell=1}^\infty \mu_\ell^2 \frac{\int_0^\infty f(z)e^{-\varkappa_\ell z}dz}{\varkappa_\ell^4 r_0^2}\right]^2\right\} \qquad (14)$$

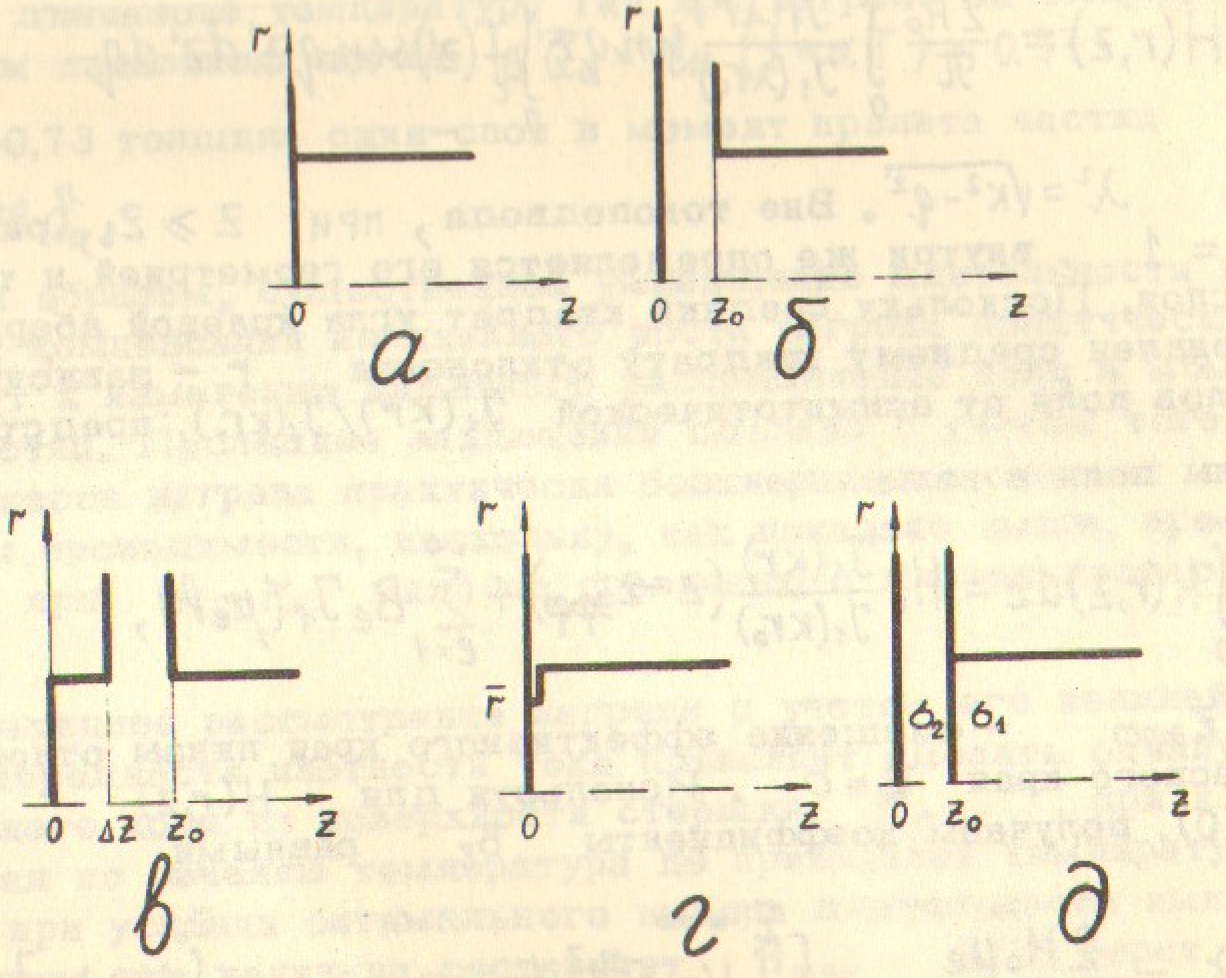


Рис.4. К расчету краевой аберрации.

При бесконечно тонком токоподводе (рис.4а) функция $f(z)=1$ при всех $z>0$ и $\int_0^\infty f(z)e^{-\varkappa_e z}dz=\frac{1}{\varkappa_e}$. Если при этом $\mu_e^2 \gg |\kappa|^2$, что имеет место при $\delta \gtrsim r_0$,

$$\overline{\alpha^2_{аб}} = 4\alpha_0^2\frac{r_0^2}{Z^2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_m^4 r_0^4}-\frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{r_0^3\mu_m^3}\right)^2}{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_m^2 r_0^2}}\right], \tag{15}$$

что составляет $\overline{\alpha^2_{аб}} = 4\alpha_0^2 r_0^2\frac{1}{Z^2}\cdot 1.066\cdot 10^{-3}$. Смещение эффективного края линзы при этом равно $z_{эфф}$ $=0.182\, r_0$.

В реальном случае конечной, но достаточно малой толщины токоподвода (рис.4б), $z_0 \lesssim \delta$, распределение тока в нем можно считать однородным, так что
$$f(z)=\begin{cases} z/z_0 & \text{при } 0\le z\le z_0 \\ 1 & \text{при } z \geqslant z_0\end{cases}$$
$\int_0^\infty f(z)e^{-\varkappa_e z}dz=\frac{1}{\varkappa_e}\cdot\frac{1-e^{-\varkappa_e z_0}}{\varkappa_e z_0}$. При z_0/r_0 $=0,5$, считая $\varkappa_e\approx\mu_e$, получаем $\overline{\alpha^2_{аб}} = 4\alpha_0^2 r_0^2 Z^{-2}\cdot 3.05\cdot 10^{-4}$, что существенно меньше, чем в случае бесконечно тонкого токоподвода. Смещение края в этом случае есть $z_{эфф}$ $=0,392\, r_0$. Если условие "бесконечности" длины линзы не выполняется, т.е. $Z \lesssim \frac{2}{\mu_1}$, смещение эффективного края линзы и средний квадрат угла аберрации за счет одного края находится как

$$\frac{1}{2}Z - z_{эфф} = \int_0^{\frac{1}{2}Z} f(z)\,dz\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_m^2 r_0^2}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{ch\frac{\varkappa_m}{2}Z}-ch\frac{\varkappa_m}{2}Z}{\varkappa_m^2 r_0^2\, sh\frac{\varkappa_m}{2}Z} \tag{16}$$

$$\overline{\alpha^2_{аб}} = 4H_0^2\left[\int_0^{\frac{1}{2}Z}f(z)dz\right]^2\cdot\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\mu_m^2 r_0^2\left[\frac{\overline{ch\frac{\varkappa_m}{2}Z}-ch\frac{\varkappa_m}{2}Z}{\varkappa_m^2 r_0^2\, sh\frac{\varkappa_m}{2}Z}\right]^2-\frac{\left[\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{ch\frac{\varkappa_m}{2}Z}-ch\frac{\varkappa_m}{2}Z}{\varkappa_m^2 r_0^2\, sh\frac{\varkappa_m}{2}Z}\right]^2}{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_m^2 r_0^2}}\right\},$$

где $\overline{ch\frac{\varkappa_m}{2}Z} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}Z} f(z)\, ch\,\varkappa_m\left(\frac{1}{2}Z-z\right)dz}{\int_0^{\frac{1}{2}Z} f(z)\,dz}$.

Аберрация за счет обоих краев линзы $\alpha_{аб.1,2}$ находится сложением аберрационных углов каждого края $\alpha_{аб}$ квадратичным – $\overline{\alpha^2_{аб.1,2}} = 2\overline{\alpha^2_{аб}}$ – при длине линзы, сравнимой с фокусным расстоянием F, и линейным – $\sqrt{\overline{\alpha^2_{аб.1,2}}} = 2\sqrt{\overline{\alpha^2_{аб}}}$ – в случае тонкой линзы $Z \ll F$. Увеличение поперечного фазового объема (эмитанса) пучка описывается соотношением $\Phi=\sqrt{\Phi_0^2+r_0^2\,\overline{\alpha^2_{аб.1,2}}}$, где Φ_0 – исходное значение эмитанса.

В качестве возможных путей уменьшения краевой аберрации рассмотрим два примера специальной геометрии края линзы (рис.4 в,г) и различие проводимостей материала самой линзы σ_1 и токоподвода σ_2, такое что $\sigma_1 < \sigma_2$.

Если ток подводится на некотором расстоянии ΔZ от края стержня (рис.4 в), значения интегралов $\int_0^\infty f(z)e^{-\varkappa_e z}dz$, входящих в определение $\overline{\alpha^2_{аб}}$, уменьшаются пропорционально $e^{-\varkappa_e \Delta Z}$ в обоих рассмотренных выше случаях (z_0 =0 и $z_0 \lesssim \delta$), и при $\Delta Z \gg \frac{1}{|\varkappa_1|}$ аберрация может быть сделана как угодно малой. При $\Delta Z = \frac{1}{2}\, r_0$ в случае бесконечно-тонкого токоподвода

$\overline{\alpha^2_{a\delta}} = 4\alpha_o^2 r_o^2 Z^{-2} \cdot 4.3 \cdot 10^{-5}$, что в 25 раз меньше, чем при $\Delta z = 0$.

При тонкой кольцевой щели глубиной $r_o - \overline{r}$ (рис.4 г) и бесконечно-тонком токоподводе граничное условие на поле в линзе

$$H(r)\Big|_{z=0} = \begin{cases} 0, & r < \overline{r} \\ H_o \frac{r_o}{r}, & r \geq \overline{r} \end{cases}$$

и поле в рабочей области $H(r,z) = H_o \frac{J_1(kr)}{J_1(kr_o)} + \sum\limits_{\ell=1}^{\infty} A_\ell J_1(\mu_\ell r) e^{-\mu_\ell z}$, где

$$A_\ell = 2H_o \frac{k^2 J_o(\mu_\ell r_o) + \varkappa_\ell^2 J_o(\mu_\ell \overline{r})}{\varkappa_\ell^2 \mu_\ell r_o J_o^2(\mu_\ell r_o)} \qquad (17)$$

Глубина щели выбирается такой, чтобы средний квадрат краевой аберрации $\overline{\alpha^2_{a\delta}} = \frac{\alpha_o^2}{H_o^2 Z^2} \cdot \sum\limits_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa_\ell^2} A_\ell^2 J_o^2(\mu_\ell r_o)$ был минимален. В частности, условие $J_o(\mu_\ell r_o) = 0$, что при $|k|^2 \ll \mu_1^2$ означает $A_1 \simeq 0$, уменьшает $\overline{\alpha^2_{a\delta}}$ примерно в 4 раза. При этом $\overline{r} = 0{,}63\, r_o$.

В случае различных проводимостей материала линзы σ_1 и токоподвода σ_2 (рис.4 д) поле в линзе

$$H_1(r,z) = H_o \frac{J_1(kr)}{J_1(kr_o)} + \sum_{\ell=1}^{\infty} A_\ell J_1(\mu_\ell r) e^{-\mu_\ell (z - z_o)}$$

связано с полем в токоподводящем диске,

$$H_2(r,z) = \int\limits_0^{\infty} F_\nu J_1(\nu r)\, \mathrm{sh}\, \varkappa z\, d\nu$$

где $\varkappa^2 = \nu^2 - k_2^2$, соотношениями

$$H_1\Big|_{z=z_o} = H_2\Big|_{\substack{z=z_o \\ r \leq r_o}}, \quad \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial H_1}{\partial z}\Big|_{z=z_o} = \frac{1}{\sigma_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial z}\Big|_{\substack{z=z_o \\ r \leq r_o}}$$

Вне проводника при $z \geq z_o$ поле равно $H_o \frac{r_o}{r}$, и граничное условие на поле H_2 при $r \geq r_o$ есть $H_2\Big|_{\substack{z=z_o \\ r \geq r_o}} = H_o \frac{r_o}{r}$.

Таким образом, для нахождения неизвестных коэффициентов A_ℓ и функции F_ν получаем два уравнения

$$\int\limits_0^{\infty} F_\nu J_1(\nu r)\, \mathrm{sh}\, \varkappa z_o\, d\nu = \begin{cases} H_o \frac{J_1(kr)}{J_1(kr_o)} + \sum\limits_{\ell=1}^{\infty} A_\ell J_1(\mu_\ell r), & r \leq r_o \\ H_o \frac{r_o}{r}, & r \geq r_o \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{\infty} \varkappa F_\nu J_1(\nu r)\, \mathrm{ch}\, \varkappa z_o\, d\nu = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu_\ell A_\ell J_1(\mu_\ell r), \quad r \leq r_o \qquad (18)$$

Из первого уравнения, помножив его на $r J_1(\mu r)$ и проинтегрировав по r от 0 до ∞ с учетом того, что

$$\lim_{x \to \infty} \int\limits_0^x r J_1(\nu r) J_1(\mu r)\, dr = \frac{1}{\pi\sqrt{\mu\nu}} \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x(\nu - \mu)}{\nu - \mu} = \frac{\delta(\nu - \mu)}{\sqrt{\mu\nu}},$$

получаем

$$\frac{F_\nu\, \mathrm{sh}\, \varkappa z_o}{\nu} = \frac{H_o r_o}{\nu^2 - k_1^2} \left[k_1 \frac{J_o(k_1 r_o)}{J_1(k_1 r_o)} J_1(\nu r_o) - \frac{k_1^2}{\nu} J_o(\nu r_o) \right] - \sum_{\ell=1}^{\infty} A_\ell \frac{\mu_\ell r_o J_o(\mu_\ell r_o) J_1(\nu r_o)}{\mu_\ell^2 - \nu^2}, \qquad (19)$$

из второго в результате умножения его на $r J_1(\mu_\ell r)$ и интегрирования от 0 до r_o –

$$A_\ell \frac{r_o}{2} J_o(\mu_\ell r_o) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \int\limits_0^{\infty} \varkappa\, \mathrm{ch}\, \varkappa z_o\, F_\nu \frac{J_1(\nu r_o)}{\mu_\ell^2 - \nu^2}\, d\nu.$$

Подставив F_ν из (19), получаем для определения коэффициентов A_ℓ бесконечную систему уравнений

$$A_\ell \frac{r_o}{2} J_o(\mu_\ell r_o) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} H_o r_o \left\{ k_1 \frac{J_o(k_1 r_o)}{J_1(k_1 r_o)} \int\limits_0^{\infty} \frac{\nu \varkappa\, \mathrm{cth}\, \varkappa z_o\, J_1^2(\nu r_o)}{(\nu^2 - k_1^2)(\mu_\ell^2 - \nu^2)}\, d\nu - \right.$$

$$\left. - k_1^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{\varkappa\, \mathrm{cth}\, \varkappa z_o\, J_1(\nu r_o) J_o(\nu r_o)}{(\nu^2 - k_1^2)(\mu_\ell^2 - \nu^2)}\, d\nu \right\} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \mu_m r_o J_o(\mu_m r_o) \int\limits_0^{\infty} \frac{\nu \varkappa\, \mathrm{cth}\, \varkappa z_o\, J_1^2(\nu r_o)}{(\mu_\ell^2 - \nu^2)(\mu_m^2 - \nu^2)}\, d\nu.$$

Нетрудно убедиться, что коэффициенты при $A_{k\neq e}$ в правой части системы малы по сравнению с коэффициентом при A_e, так что с достаточной точностью можно принять

$$A_e\frac{r_0}{2}J_0(\mu_e r_0)\left[1+2\mu_e\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\int_0^\infty\frac{\nu\varkappa\,\mathrm{cth}\,\varkappa z_0\,J_1^2(\nu r_0)}{(\mu_e^2-\nu^2)^2}d\nu\right]\simeq$$

$$\simeq\frac{\sigma_1}{\sigma_2}H_0 r_0\left[K_1\frac{J_0(K_1r_0)}{J_1(K_1r_0)}\int_0^\infty\frac{\nu\varkappa\,\mathrm{cth}\,\varkappa z_0\,J_1^2(\nu r_0)}{(\nu^2-K_1^2)(\mu_e^2-\nu^2)}d\nu-K_1^2\int_0^\infty\frac{\varkappa\,\mathrm{cth}\,\varkappa z_0\,J_1(\nu r_0)J_0(\nu r_0)}{(\nu^2-K_1^2)(\mu_e^2-\nu^2)}d\nu\right].$$

При $|K_1|^2\ll\mu_e^2$, что имеет место при $\delta_1\gtrsim r_0$, выражение для A_e можно упростить к виду

$$A_e\frac{r_0}{2}J_0(\mu_e r_0)\left[1+2\mu_e\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\int_0^\infty\frac{\nu\varkappa\,\mathrm{cth}\,\varkappa z_0\,J_1^2(\nu r_0)}{(\mu_e^2-\nu^2)^2}d\nu\right]\simeq 2H_0\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\int_0^\infty\frac{\varkappa\,\mathrm{cth}\,\varkappa z_0\,J_1^2(\nu r_0)}{\nu(\mu_e^2-\nu^2)}d\nu$$

Величину интегралов поля по длине линзы

$$\int_0^{Z\to\infty}H(r,z)dz=H_0\frac{J_1(K_1r)}{J_1(K_1r_0)}(Z-z_0)+\sum_{e=1}^\infty\frac{A_e}{\mu_e}J_1(\mu_e r)+\int_0^\infty\frac{\mathrm{ch}\,\varkappa z-1}{\varkappa}F_\nu\,J_1(\nu r)d\nu$$

с учетом выражения F_ν через A_e получаем при $|K_1|^2\ll\mu_e^2$ в виде

$$\int_0^{Z\to\infty}H(r,z)dz\simeq H_0\frac{r}{r_0}(Z-z_0)+2H_0\int_0^\infty\frac{1}{\varkappa}\mathrm{th}\frac{\varkappa z_0}{2}\cdot\frac{J_1(\nu r_0)J_1(\nu r)}{\nu}d\nu+$$

$$+\sum_{e=1}^\infty A_e\frac{J_1(\mu_e r_0)}{\mu_e}\left[1-\frac{\mu_e^2 r_0 J_0(\mu_e r_0)}{J_1(\mu_e r_0)}\int_0^\infty\frac{1}{\varkappa}\mathrm{th}\frac{\varkappa z_0}{2}\cdot\frac{\nu J_1(\nu r_0)J_1(\nu r)}{\mu_e^2-\nu^2}d\nu\right].$$

Второе слагаемое в правой части при $r<r_0$ и достаточно малых z_0 $(z_0\ll r_0)$ равно $H_0\frac{r}{r_0}\cdot\frac{1}{K_2}\,\mathrm{tg}\frac{K_2z_0}{2}$, т.е. линейно зависит от r, и нелинейность r – распределения интегралов поля полностью определяется значениями коэффициентов A_e.

Коэффициенты A_e существенно зависят от отноешния проводимостей $\sigma_1:\sigma_2$ при условии

$$2\mu_e\int_0^\infty\frac{\nu\varkappa\,\mathrm{cth}\,\varkappa z_0\,J_1^2(\nu r_0)\,d\nu}{(\mu_e^2-\nu^2)^2}\lesssim 1 \tag{19}$$

Это условие определяет минимальное значение толщины токоподвода z_0, поскольку величина входящего в него интеграла при малых z_0

$$\int_0^\infty\frac{\nu\varkappa\,\mathrm{cth}\,\varkappa z_0\,J_1^2(\nu r_0)}{(\mu_e^2-\nu^2)^2}d\nu\underset{e=1,\ z_0<\delta_2}{\simeq}0.032K_2r_0^2\,\mathrm{ctg}\,K_2z_0+0.12z_0$$

стремится к ∞ пропорционально $\frac{1}{z_0}$.

Таким образом, если проводимость токоподводящего диска много больше проводимости линзы и толщина его достаточна для выполнения приведенного выше неравенства, краевой эффект устраняется практически полностью. Однако, в реальном случае не всегда удается найти материал, обладающий достаточно высокой проводимостью и достаточно малой плотностью, чтобы при толщине порядка скин-слоя не приводить к существенному рассеянию частиц.

В случае литиевой линзы наиболее подходящим материалом для токоподвода является бериллий. Отношение проводимостей $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\sigma_{Li}}{\sigma_{Be}}$ равно 0,67, что при $z_0=\frac{1}{2}r_0$ уменьшает коэффициенты, а значит и угол краевой аберрации, в $\sim$ 1,4 раза.

Приведенное решение задачи о распределении поля в рабочей области линзы в геометрии рис. 4д позволяет найти граничную функцию $f(z)$ в этой геометрии при $\sigma_1=\sigma_2$, а именно

$$\underset{z\leq z_0}{f(z)}\simeq 2\int_0^\infty\frac{\mathrm{sh}\,\varkappa z\,J_1^2(\nu r_0)}{\nu\,\mathrm{sh}\,\varkappa z_0}\left\{1-\sum_{e=1}\frac{2\mu_e\nu^2\int_0^\infty\frac{\varkappa'\,\mathrm{th}\,\varkappa' z_0\,J_1^2(\nu' r_0)}{\nu'(\mu_e^2-\nu'^2)}d\nu'}{(\mu_e^2-\nu^2)\left[1+2\mu_e\int_0^\infty\frac{\nu'\varkappa'\,\mathrm{cth}\,\varkappa' z_0\,J_1^2(\nu' r_0)\,d\nu'}{(\mu_e^2-\nu'^2)^2}\right]}\right\}d\nu$$

Для определения диапазона применимости результатов расчета в реальном случае, когда налицо целый ряд факторов, так или иначе влияющих на краевой эффект, учет которых в расчете неоправданно усложняет задачу, были произведены измерения топографии краевых полей на модели. Материалом цилиндрического проводника в модели служила ртуть, что позволяло перемещать датчик поля – индукционную катушку диаметром 3 мм, непосредственно в рабочей области линзы с минимальным искажением распределения поля. Модель представляла собой полый цилиндр из органического стекла с внутренним диаметром 6 см, наполненный ртутью, причем имелась возможность достаточно легко менять геометрию края линзы. Длительность импульса тока соответствовала заданному значению $\delta/r_0 = 1$, амплитуда составляла 100 кА. Сигнал с датчика поля измерялся специальной схемой импульсных измерений с цифровой обработкой данных. Точность измерения поля составляла $\sim$ 0,1% от поля на поверхности. Точность отсчета координаты от магнитной оси линзы составляла $\sim$ 0,3 мм.

Результаты измерения топографии поля в рабочей области линзы для ряда геометрий представлены на рис.5 , где радиальные распределения интегралов поля $\int H(r,z)dz$ приведены в виде образующих входных (выходных) поверхностей линз

$$z(r) = -\frac{\int_0^\infty [H(r,z) - \lim_{z\to\infty} H(r,z)]\,dz}{\lim_{z\to\infty} H(r,z)}$$

Значения $\overline{\Delta z^2}$ – средних квадратов отклонения эффективной входной поверхности от плоскости $z = z_{эфф}$, где значения $z_{эфф}$ отвечают минимуму $\overline{\Delta z^2}$, приведены в таблице. II вместе со значениями $z_{эфф}$. Ошибка в определении значений $\overline{\Delta z^2}$ обусловлена неточностью в отсчете координаты z ($\sim$0.3 мм) при измерении топографии поля. На рис. 6 а и б представлена зависимость от геометрических параметров токоподвода среднеквадратичного угла аберрации $\overline{\alpha^2_{аб}} = \alpha_0^2\,\overline{\Delta z^2}\,\frac{1}{4r_0^2}$, где α_0 – угол поворота частицы на длине $2r_0$ в поле, равном полю на поверхности линзы вне токоподвода, и смещения эффективного края линзы относительно ее физического края.

Значения среднеквадратичного угла аберрации, вычисленные по измеренной топографии поля, находятся в хорошем соответствии со значениями, полученными расчетным путем в предположении $\delta \gg r_0$ (рис.6а). Граничная функция $f(z)$ при $0 \le z \le z_0$

для токоподводов толщиной $z_0 = \frac{1}{2} r_0$ и $z_0 = r_0$ приведена на рис.7.

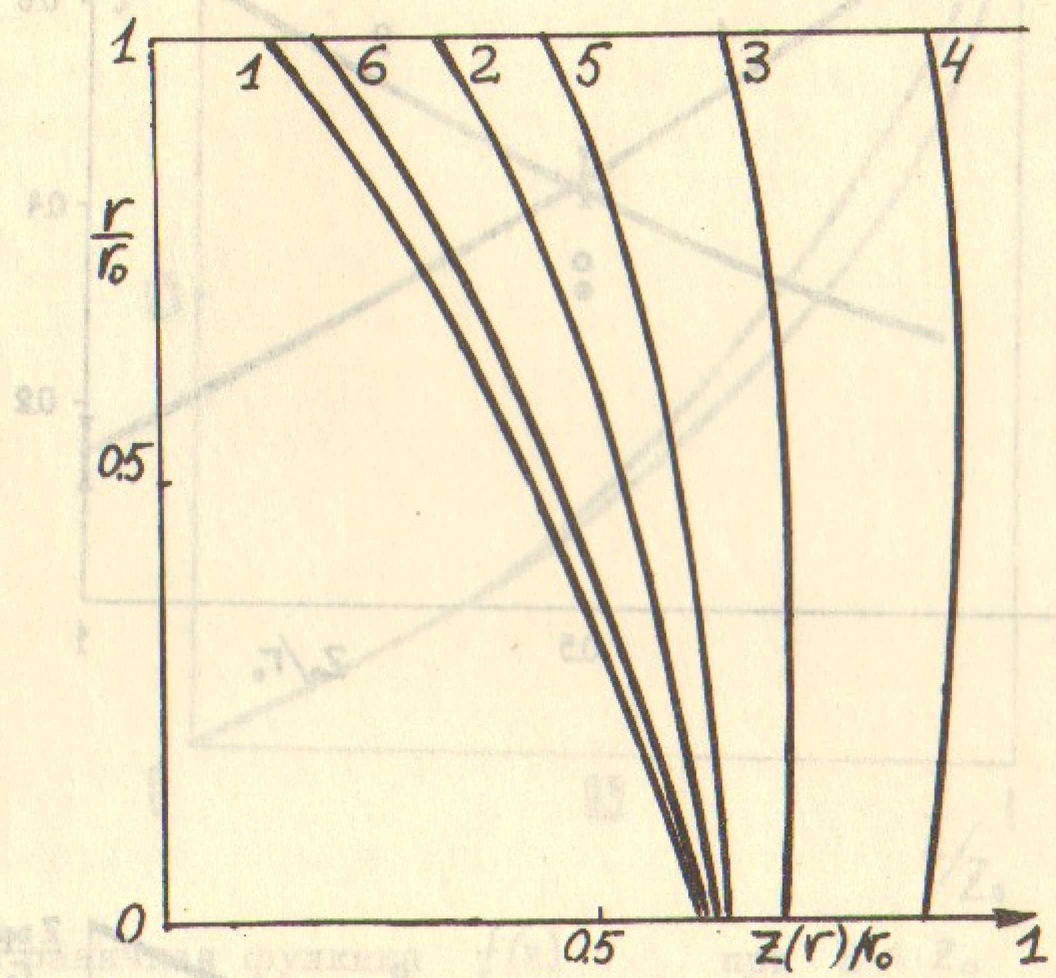
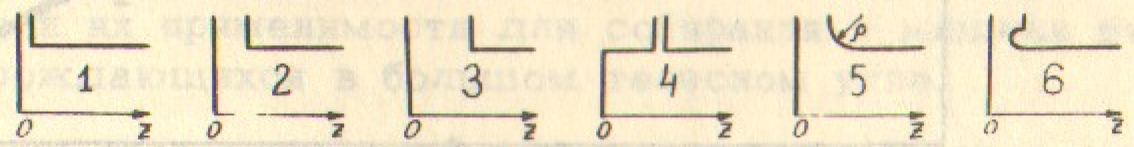


Рис.5. Входные поверхности линз, вычисленные по измеренной топографии краевых полей для токоподводов разной геометрии. Цифры на кривых соответствуют нумерации геометрий в таблице II.

Таблица II.



	1	2	3	4	5	6
$\frac{\overline{\Delta z^2}}{r_0^2} 10^4$	$44.2^{+3.4}_{-3.8}$	$19.1^{+2.4}_{-2.8}$	$2.6^{+0.9}_{-1.3}$	$0.9^{+0.1}_{-0.5}$	$10.9^{+1.7}_{-2.1}$	$35.2^{+3.0}_{-3.4}$
$\frac{z_{эфф}}{r_0}$	0.29	0.42	0.69	0.90	0.52	0.32

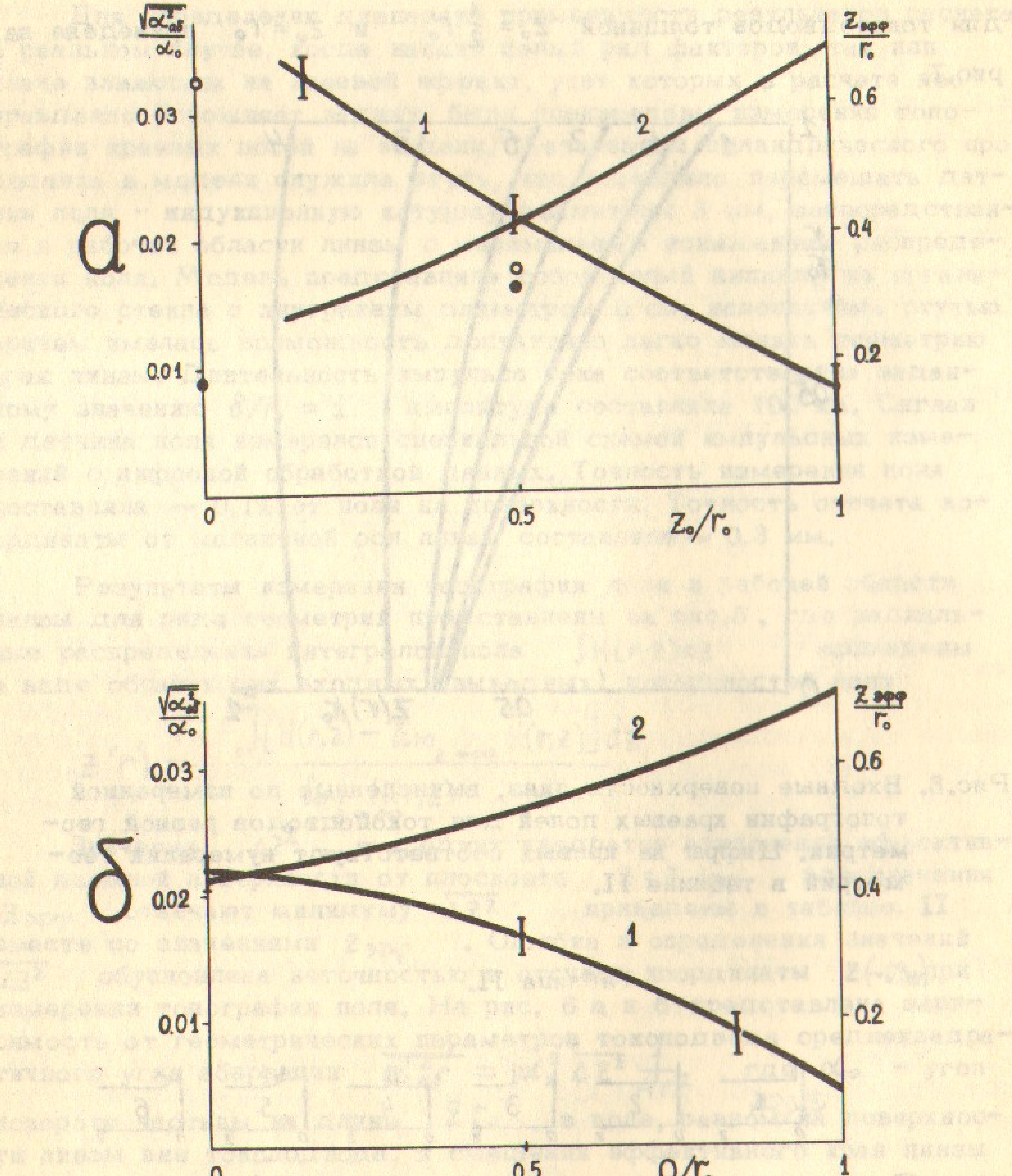


Рис.6. Зависимость среднеквадратичного угла краевой аберрации $\sqrt{\overline{\alpha^2_{аб}}}$ (кривая 1) и смещения эффективного края линзы $z_{эфф}$ (кривая 2) от толщины токоподвода z_0 (а) и от радиуса скругления ρ при $z_0 = \frac{1}{2} r_0$ (б). α_0 –угол поворота частицы на длине $2r_0$ в поле, равном полю на поверхности линзы. Точками обозначены расчетные значения $\sqrt{\overline{\alpha^2_{аб}}}$ (○) и $z_{эфф}$ (●) при $\delta \gg r_0$.

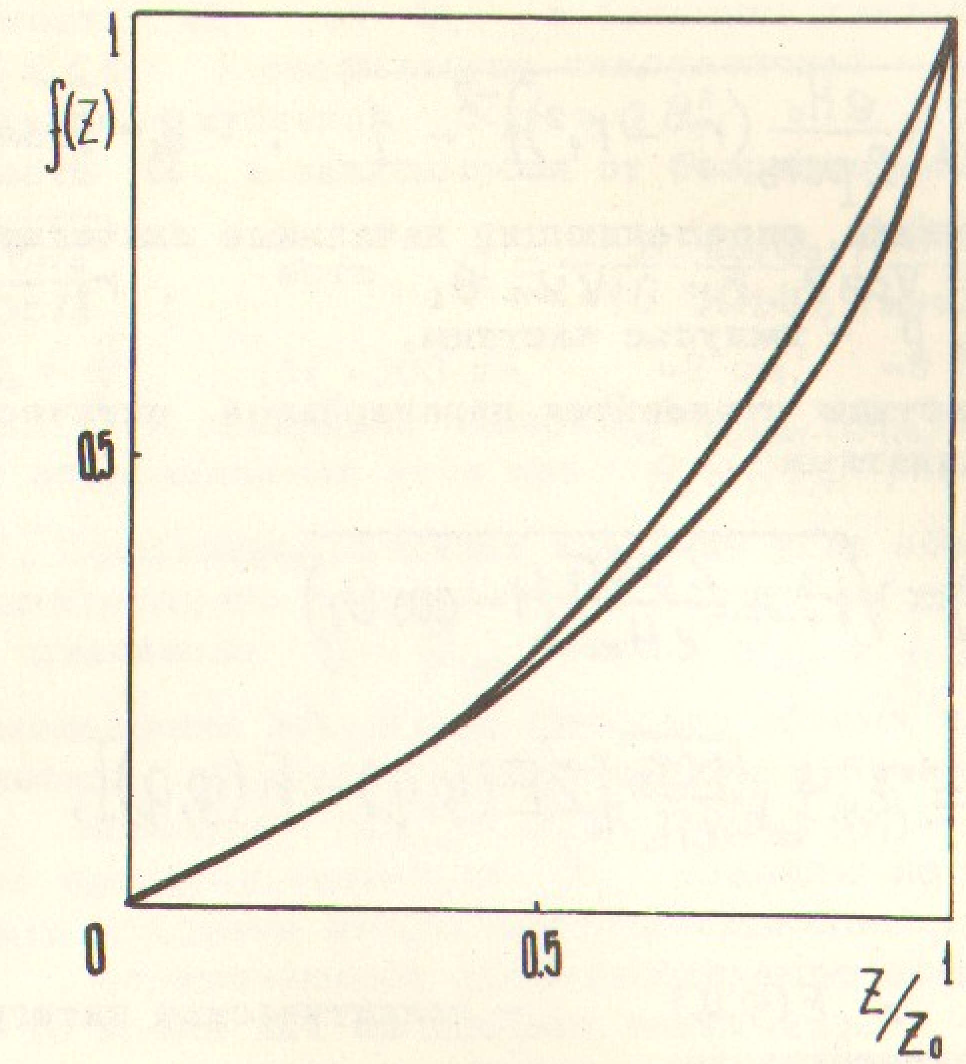


Рис.7. Граничная функция $f(z)$ при $z \leq z_0$ для токоподводов толщиной $z_0 = \frac{1}{2} r_0$ (1) и $z_0 = r_0$ (2)

IУ. Сферическая аберрация

Сферическая аберрация, т.е. нелинейная зависимость выходного угла частиц от угла входа в линзу при фокусировке непараксиального пучка из точечного источника, расположенного в главном фокусе линзы, может служить ограничением светосилы цилиндрических линз и их применимости для собирания с мишени вторичных частиц, рождающихся в большом телесном угле.

Траектория непараксиальной частицы определяется с помощью интегралов движения в поле $H_\varphi = H_0 \frac{r}{r_0}$, а именно энергии частицы или ее скорости $V = \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$, z – проекции обобщенного импульса $p_z = \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-\beta^2}} - eH_0 \frac{r^2}{2c r_0}$, и z – проекции момента количества движения $M_z = \frac{m r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ /5/, равной 0 в случае точечного источника частиц, откуда

$$\frac{dr}{dz}=\sqrt{\left[\cos\theta_1+\frac{eH_0}{2pcr_0}(r^2-r_1^2)\right]^{-2}-1}\ ,$$ θ_1 – угол вылета частицы из источника, определяющий начальные значения проекций скорости как $\dot z_1 = V\cos\theta_1$, $\dot r = V\sin\theta_1$, r_1 – координата входа в поле, p – импульс частицы.

Скорость частицы становится параллельной оптической оси в точке с координатами

$$r = r_{max}(\theta_1)=\sqrt{r_1^2+\frac{2pcr_0}{eH_0}(1-\cos\theta_1)}$$

$$z = z(r_{max}) = z_1+\sqrt{\frac{pcr_0}{eH_0}}\left[2E(\varphi,q)-F(\varphi,q)\right],$$

где $F(\varphi,q)$ и $E(\varphi,q)$ – эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода, соответственно,

$$\varphi = \arcsin\left(1+\frac{eH_0z_1^2}{pcr_0}\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta_1}{2}}{\cos^2\theta_1}\right)^{-\frac{1}{2}},\ q=\sin\frac{\theta_1}{2}\sqrt{1+\frac{eH_0z_1^2}{pcr_0}\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta_1}{2}}{\cos^2\theta_1}}\ ,$$

z_1 – расстояние от источника до входа в линзу.

Уравнения $r = r_{max}(\theta_1)$, $z = z(r_{max})$ описывают выходную поверхность линзы (рис.8), обеспечивающую отсутствие сферической аберрации. При плоской выходной поверхности угол сферической аберрации пропорционален расстоянию $\Delta z(\theta_1)$ между идеальной и реальной выходными верхностями

$$\Delta z(\theta_1) = l_0-\left[z(r_{max})-z_1\right],\ \text{а именно}\ \alpha_{аб}=-\frac{eH_0}{pcr_0}\Delta z(\theta_1)r_{max}(\theta_1).$$

Длина линзы в параксиальном приближении находится как

$$l_0=\lim_{\theta_1\to 0}\left[z(r_{max})-z_1\right]=\sqrt{\frac{pcr_0}{eH_0}}\arcsin\left(1+\frac{eH_0z_1^2}{pcr_0}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

главное фокусное расстояние

$$F_0=\lim_{\theta_1\to 0}\frac{r_{max}}{\operatorname{tg}\theta_1}=\left(\frac{eH_0}{pcr_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin l_0\sqrt{\frac{eH_0}{pcr_0}}}\ .$$

Зависимость Δz от θ_1 в большом диапазоне значений θ_1 ($\theta_1 \leq 0.5$) оказывается квадратичной – $\Delta z(\theta_1) \sim \theta_1^2$, а угла аберрации – кубичной $\alpha_{аб} = a\theta_1^3$. Коэффициент пропорциональности a в зависимости от безразмерной длины линзы

$$\varphi_0 = l_0\sqrt{\frac{eH_0}{pcr_0}}\quad \text{есть}\quad a=-\frac{3}{16}\cdot\frac{\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}\left(\frac{2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0}-\cos 2\varphi_0\right)$$

При $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ (H_0=200 кэ, =2 см, =9 см, =1 Гэв) максимальный угол собирания линзой θ_{1m} ($r_{max}(\theta_{1m})=r_0$) есть θ_{1m}=0,35, и аберрационный угол при $\theta_1=\theta_{1m}$ равен $1.26\cdot 10^{-2}$ ($\alpha_{аб}=a\theta_{1m}^3$). Среднеквадратичное значение угла аберрации в предположении однородного распределения частиц по углу вылета из источника в диапазоне $0\div\theta_{1m}$ равно $\sqrt{\overline{\alpha_{аб}^2}}=\frac{1}{2}a\theta_{1m}^3$.

Для уменьшения искажения фазового объема пучка частиц за счет сферической аберрации апроксимируем кубичную зависимость $\alpha_{аб}$ от θ_1 линейной $\alpha_{лин}=a_1\theta_1=\alpha_{аб}(\theta_1)-\Delta\alpha_{аб}(\theta_1)$. Коэффициент пропорциональности a_1 находим из условия минимума среднего квадрата нелинейности аберрационного угла $\Delta\alpha_{аб}(\theta_1)$, определяющей некомпенсируемое искажение эмитанса пучка, в то время как нелинейная часть $\alpha_{аб}-\alpha_{лин}$ – может быть скомпенсирована соответствующим перемещением источника вдоль оптической оси. Значение a_1 в зависимости от максимального угла собирания θ_{1m} при однородном распределении частиц по θ_1 есть $a_1=-\frac{2}{3}a\theta_{1m}^2$, среднеквадратичное же значение нелинейности сферической аберрации $\sqrt{\overline{\Delta\alpha_{аб}^2}}=\frac{1}{6}a\theta_{1m}^3$.

Эффективное значение главного фокусного расстояния находится подстановкой в выражение для F_0 эффективного значения длины линзы $l_{эфф}=l_0\left(1+\frac{2}{3}a\theta_{1m}^2\frac{\sin\varphi}{\varphi_0}\right)$ вместо ее физической длины l_0 .

Приведенный анализ аберрационных свойств цилиндрических линз позволяет определить диапазон параметров, которые могут быть приняты при проектировании конкретных вариантов литиевых линз. Критерием при этом должно быть сравнение величины эмитанса фокусируемого пучка с его среднеквадратичным приращением за счет аберраций и рассеяния.

Литература

1. W.K.Panofsky and W.R. Baker, Rev. Sci. Instr., 21, 445 (1950)

2. E.B.Forsyth, L.M. Lederman and J. Sunderland, Nuclear Science 3, 872, 1965

3. Б.Ф.Баянов, Г.И.Сильвестров. "Возможность применения лития для создания цилиндрических линз с большими магнитными полями". Препринт ИЯФ. Готовится к печати.

4. Г.Кнопфель "Сверхсильные импульсные магнитные поля". Издательство "Мир", Москва, 1972 г.

5. Л.Л.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. Издательство "Наука", Москва, 1965 г.

Ответственный за выпуск С.Н.РОДИОНОВ
Подписано к печати I3.У-I974г. МН 08299
Усл. I,5 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 27

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,тв