3

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74-5

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ: МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР

Новосибирск

1974

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ: МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР

АННОТАЦИЯ

Формулируется операторная диаграммная техника для рассмотрения процессов в однородном (постоянном в пространстве и времени) внешнем электромагнитном поле для частиц со спином 0 и 1/2. Метод основывается на операторном представлении функции Грина заряженной частицы в поле. Особенности методики вычислений выясняются на примере нахождения массового оператора. Эта задача решена для общего случая однородного поля, причем показано, что для определения среднего на массовой оболочке достаточно знать только спектр некоторого набора операторов.

1. Введение

В последние годы значительно вырос интерес к электромагнитным процессам, происходящим во внешних поля. Это связано, с одной стороны, с созданием интенсивных электромагнитных полей в лазерах (максимальные достигнутые напряженности магнитного поля составляют 10^9 э) и появлением пучков электронов и фотонов сверхвысоких энергий, а с другой стороны, с возможными астрофизическими приложениями (по оценкам напряженности магнитного поля пульсаров могут достигать 10^{12} э).В указанных процессах может быть проверена квантовая электродинамика в области высоких энергий и больших полей. Такая проверка заведомо представляет значительный интерес, поскольку в отличие от случая электромагнитных взаимодействий свободных частиц, здесь принципиально необходим выход за рамки теории возмущений.

Большое число работ было посвящено рассмотрению ряда процессов в борновском приближении по взаимодействию с полем излучения. В области высоких энергий, когда применимо квазиклассическое приближение или эквивалентное ему рассмотрение скрещенного поля, значительная часть этих результатов приведена в [1-3]. Исходя из результатов пионерской работы Швингера [4], основанной на методе собственного времени, Мингуззи [5], использовав технику разложения вакуумного тока во внешнем поле (постоянном плюс поле плоской волны) по степеням взаимодействия с полем плоской волны, вычислил в e^2 - порядке вакуумный ток, что позволяет, в этом порядке, найти поляризационный оператор на массовой оболочке. Однако работа [5] содержала ошибки, исправленные Адлером [6] , который рассмотрел также процесс расщепления реального фотона на два фотона в магнитном поле (предполагается, что этот процесс существен при формировании излучения пульсаров). Воспользовавшись явным видом функции Грина электрона в однородном внешнем поле, найденной Швингером [4] . Нарожный [7] получил поляризационный оператор в e^2 -порядке для случая постоянного скрещенного поля ($\vec{E} \perp \vec{H}$, $E = H$), а затем Баталин и Шабад [8] - для случая произвольного однородного внешнего поля. Совсем недавно Швингер [9] сформулировал способ вычисления массового оператора в произвольном однородном внешнем поле на примере скалярных частиц. В рамках этого подхода случай частиц со спином 0 и 1/2 рассматривался в работах [10,11]. Баталин и Фрадкин [12,13] изучали задачу о радиационных поправках в рамках метода функционального интегрирования, основываясь на более ранних работах Фрадкина [14]. Ритус [15,16] определил массовый и поляризационный оператор в e^2-порядке в частном случае постоянного скрещенного поля, использовав известные решения уравнения Дирака в этом поле. Поскольку в этом случае полевые инварианты

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{H}^2), \quad \mathcal{G} = -\frac{1}{4} F^{*}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \vec{E}\vec{H} \qquad (1.1)$$

где введен дуальный тензор $F^{*}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$, обращаются в нуль, то все характеристики зависят только от переменной типа $e^2/m^2 \cdot (F_{\mu\nu} p^{\nu})^2$. По указанной причине результаты для этого случая совпадают с массовым и поляризационным операторами (собственно-энергетическими частями электрона и фотона), найденными авторами с помощью операторного квазиклассического метода [17,2].

Во всех цитированных работах, кроме работ авторов, использовались варианты функциональной формулировки теории поля Швингера, либо явный вид функций Грина частицы в поле. Однако очень часто, как и в случае свободных частиц, значительные преимущества, в силу своей физической наглядности и простоты, имеет феймановский подход и связанная с ним диаграммная техника. Оказывается возможным сформулировать обобщенную диаграммную технику для частиц со спином 0 и 1/2, находящихся в произвольном однородном внешнем поле, не используя явного вида функции Грина заряженной частицы в поле, а представив ее в операторной форме. Ее существенным достоинством оказывается возможность единого подхода к вычислению любой радиационной поправки, а также наглядность и относительная простота вычислений.

Мы будем исходить из S - матрицы в представлении Фарри:

$$S = T \exp\left\{-i \int \mathcal{H}_I^F(x)\, d^4x\right\} \qquad (1.2)$$

где плотность гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}_I^F(x)$ для частиц со спином 1/2 есть

$$\mathcal{H}_I^F(x) = \frac{e}{2}[\bar{\Psi}_F(x)\gamma_\mu, \Psi_F(x)] A^\mu(x) = J_{\mu F}(x) A^\mu(x) \qquad (1.3)$$

Здесь $\Psi_F(x)$ - решение уравнения Дирака в заданном внешнем электромагнитном поле $A_\mu^F(x)$, $J_{\mu F}(x)$ - ток спинорных частиц в поле, $A_\mu(x)$ - поле излучения. Формула (1.2) легко следует из стандартного выражения для S-матрицы в поле $A_\mu(x) + A_\mu^F(x)$ с помощью надлежащего унитарного преобразования (см., напр., [18]). При приведении S-матрицы (1.2) к нормальной форме возникают вклады, которые могут быть представлены двумя совокупностями диаграмм. Одна из них совпадает по форме записи с совокупностью диаграмм для свободных частиц (когда $A_\mu^F(x) = 0$), только линии заряженных частиц представляют теперь частицы (функции Грина) в поле. Другая совокупность диаграмм обязана своему появлению тому, что среднее вакуумное значение тока, вообще говоря, отлично от нуля $\langle 0 | J_{\mu F}(x) | 0 \rangle \neq 0$, поскольку внешнее поле индуцирует ток в вакууме. По этой причине при разложении T-произведения на сумму нормальных произведений необходимо проводить спаривание операторов, входящих в ток $J_{\mu F} = \frac{e}{2}[\bar{\Psi}_F \gamma_\mu, \Psi_F]$, что приводит к новой совокупности диаграмм, содержащей т.н. "головастики". Это же обстоятельство является причиной того, что в представлении $\langle 0 | S | 0 \rangle = e^{iL}$ фаза L не является вещественной, как в случае свободных частиц, а приобретает мнимую часть, описывающую рождение пар частиц внешним полем, т.е. появляется еще один тип диаграмм - бесфотонные вакуумные петли.

В однородном внешнем поле сохраняется 4-импульс, вследствие чего вклады головастиков пропадают. По этой причине можно, переходя к относительным амплитудам (см., напр. [18] стр.441), отделить совокупность диаграмм с бесфотонными вакуумными петлями и рассматривать только первую совокупность диаграмм.

Диаграммную технику во внешнем поле удобно строить для квадратов амплитуд (прием широко используемый в настоящее время в квантовой теории поля), когда внешние линии диаграммы находятся в одном и том же физическом состоянии. Внутренним линиям заряженных частиц соответствуют функции Грина $\mathcal{G}(x,x')$, которые в координатном представлении можно записать в операторной форме:

$$\mathcal{G}(x,x') = \frac{1}{\mathcal{P}^2 - m^2 + i\varepsilon}\,\delta(x-x') \qquad (1.4)$$

для частиц со спином 0 и

$$\mathcal{G}(x,x') = \frac{1}{\hat{\mathcal{P}} - m + i\varepsilon}\,\delta(x-x') \qquad (1.5)$$

для частиц со спином 1/2, где оператор x) $\mathcal{P}_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu(x)$, $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_\mu\gamma^\mu$.

При использовании такой формы записи задача вычисления вклада определенной диаграммы сводится к нахождению среднего от некоторого оператора.

Рассмотрим в качестве примера массовый оператор спинорной частицы (рис.1а), где двойная линия изображает частицу в поле.

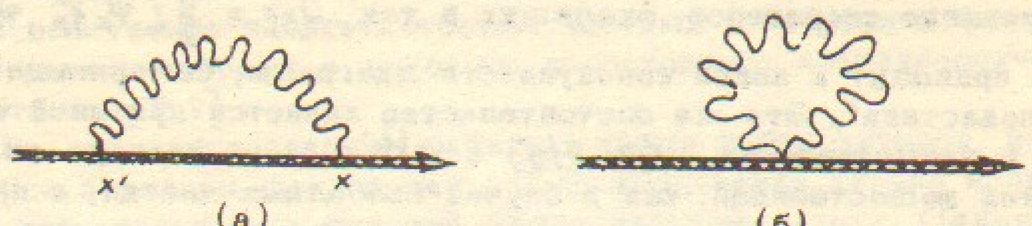

Рис. 1.

В низшем порядке по взаимодействию с полем излучения имеем

$$\langle M\rangle = -e^2\int d^4x\,d^4x'\,\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\mathcal{G}(x,x')\gamma_\mu\mathcal{D}_c(x-x')\psi(x') \qquad (1.6)$$

Используя (1.5), явный вид Фурье-представления пропагатора фотона

$$\mathcal{D}_c(x-x') = \frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+i\varepsilon}\,e^{ik(x-x')} \qquad (1.7)$$

самосопряженность оператора $\mathcal{P}_\mu$ и коммутатор $[\mathcal{P}_\mu, e^{ikx}] = -k_\mu e^{ikx}$, можно в (1.6) выполнить интегрирование по x'. В итоге имеем следующее представление массового оператора

x) Используется система единиц $\hbar=c=1$, метрика $ab = a^0b^0 - \vec{a}\vec{b}$.

$$\langle M\rangle = \int d^4x\,\bar{\psi}(x)M\psi(x) \qquad (1.8)$$

где оператор

$$M = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+i\varepsilon}\,\gamma^\mu\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-\hat{k}-m+i\varepsilon}\,\gamma_\mu \qquad (1.9)$$

Отметим, что при вычислении среднего от оператора M (1.8) достаточно знать спектр собственных значений полного набора операторов, определяющих физическое состояние ψ, причем величина $\langle M\rangle$ не зависит от явного выбора представления. Более подробно этот вопрос рассмотрен ниже.

В случае частиц со спином 0 аналогичный анализ дает следующее выражение для вклада диаграммы рис.1а в массовый оператор

$$M = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+i\varepsilon}\,(2\mathcal{P}-k)^\mu\frac{1}{(\mathcal{P}-k)^2-m^2+i\varepsilon}\,(2\mathcal{P}-k)_\mu \qquad (1.10)$$

В качестве другого примера рассмотрим поляризационный оператор (рис.2а). Амплитуда рассеяния фотона на внешнем поле имеет вид:

$$T = -\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4x\,d^4x'\,Sp\left[\mathcal{G}(x,x')\hat{e}_1 e^{-ik_1x'}\mathcal{G}(x',x)\hat{e}_2 e^{ik_2x}\right] \qquad (1.11)$$

где $e_1(e_2)$ - поляризация начального (конечного) фотона. Представим функцию Грина электрона в форме (эквивалентной (1.5)):

$$\mathcal{G}(x,x') = \langle x|\,\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m+i\varepsilon}\,|x'\rangle \qquad (1.12)$$

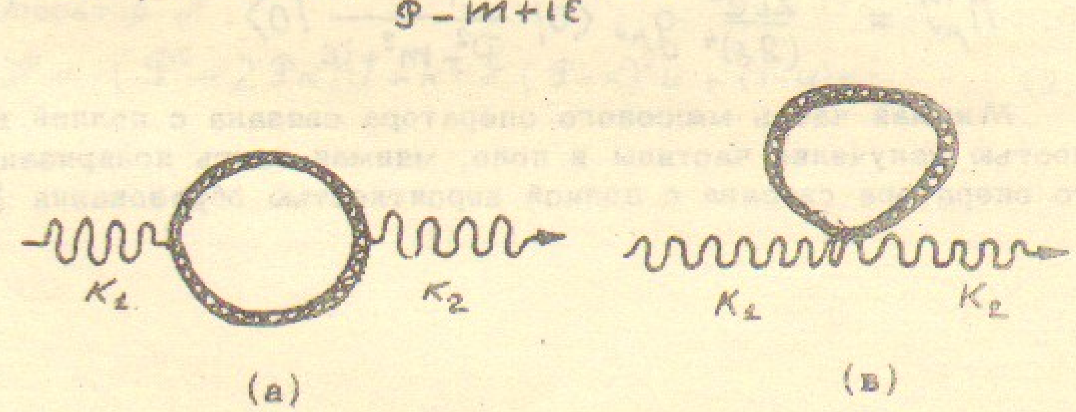

рис.2.

где $|X\rangle$ – собственный вектор оператора координаты $X|x\rangle = x|x\rangle$, нормированный так, что $\int d^4x\, |x\rangle\langle x| = 1$, $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$. С учетом этого можно переписать (1.11) в форме:

$$T = -\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4x\, d^4x'\, Sp\left[\langle x|\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m+i\varepsilon}\hat{e}_1 e^{-ik_1X}|x'\rangle\cdot \langle x'|\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m+i\varepsilon}|x\rangle\,\hat{e}_2 e^{ik_2x}\right], \tag{1.13}$$

Воспользовавшись теоремой полноты, можно провести интегрирование по x'. В результате имеем

$$T = -\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4x\, Sp\left[\langle x|\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m+i\varepsilon}\hat{e}_1\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-\hat{k}-m+i\varepsilon}|x\rangle\right]e^{i(k_2-k_1)x} \tag{1.14}$$

В силу трансляционной инвариантности, имеющей место в однородном внешнем поле, входящее в (1.14) среднее $\langle x|\ldots|x\rangle$ не зависит от координаты. Определяя теперь поляризационный оператор $\Pi_{\mu\nu}$ ($T = i(2\pi)^4\delta(k_1-k_2)e_1^\mu e_2^\nu\Pi_{\mu\nu}$), имеем:

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{ie^2 Sp}{(2\pi)^4}\langle 0|\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-\hat{k}-m+i\varepsilon}\gamma_\nu|0\rangle \tag{1.15}$$

Аналогичное рассмотрение приводит к следующему вкладу диаграммы рис.2а в поляризационный оператор для частиц со спином 0:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(a)} = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\langle 0|\frac{1}{\mathcal{P}^2-m^2+i\varepsilon}(2\mathcal{P}-k)_\mu\frac{1}{(\mathcal{P}-k)^2-m^2+i\varepsilon}(2\mathcal{P}-k)_\nu|0\rangle \tag{1.16}$$

Кроме того, для этих частиц необходимо учесть вклад диаграммы рис.2в:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(в)} = \frac{2ie^2}{(2\pi)^4}g_{\mu\nu}\langle 0|\frac{1}{\mathcal{P}^2-m^2+i\varepsilon}|0\rangle. \tag{1.17}$$

Мнимая часть массового оператора связана с полной вероятностью излучения частицы в поле, мнимая часть поляризационного оператора связана с полной вероятностью образования фото-

ном пары во внешнем поле (для квазиклассического приближения см., напр., [2]) Однако в рамках развиваемой техники можно найти также и другие характеристики физических процессов,для чего необходимо использовать соответствующие проекционные операторы.

Аналогичным образом проводится рассмотрение и более сложных диаграмм. Однако изложение конкретной рецептуры вычислений удобно сделать после выяснения характерных особенностей техники на примере вычисления вкладов диаграмм низшего порядка.

В разделе II находится массовый оператор для частицы со спином 0 в произвольном однородном электромагнитном поле, а в разделе III та же задача решена для спинорной частицы.

II. <u>Массовый оператор скалярной частицы</u>

Рассмотрим массовый оператор (рис.1а) для частицы со спином 0 (1.10):

$$M^{(0)} = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,(2\mathcal{P}-k)^\mu\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\,\frac{1}{(\mathcal{P}-k)^2-m^2+i\varepsilon}(2\mathcal{P}-k)_\mu \tag{2.1}$$

Форма записи (2.1) такая же, как для массового оператора скалярной частицы в отсутствие поля, однако существенно новым элементом является наличие в интеграле (2.1) некоммутирующих операторов, так что перед вычислением интеграла по k следует провести надлежащие преобразования подынтегрального выражения. Удобно воспользоваться экспоненциальной параметризацией входящих в (2.1) пропагаторов:

$$\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\,\frac{1}{(\mathcal{P}-k)^2-m^2+i\varepsilon} = -\int_0^\infty ds\, s\int_0^1 du\, e^{-isu(m^2-i\varepsilon)}\cdot e^{is\mathcal{H}}, \tag{2.2}$$

где оператор $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = (\mathcal{P}^2-2\mathcal{P}k)u + k^2 = (\mathcal{P}-k)^2u + (1-u)k^2 \tag{2.3}$$

Тогда (2.1) можно переписать в форме

$$M^{(0)} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^\infty ds\, s\int_0^1 du\, e^{-isum^2}\tilde M^{(0)} \tag{2.4}$$

и задача свелась к нахождению

$$\tilde M^{(0)} = \int d^4k\,(2\mathcal{P}-k)^\mu e^{is\mathcal{H}}(2\mathcal{P}-k)_\mu \tag{2.5}$$

Вынесем здесь оператор $e^{is\mathcal H}$ направо:

$$e^{is\mathcal H}(2\mathcal P-k)_\mu = [2(e^{-2eFsu})_{\mu\nu}(\mathcal P-k)^\nu + k_\mu]e^{is\mathcal H} \tag{2.6}$$

При выводе этого соотношения мы воспользовались равенствами

$$[\mathcal P_\mu,\mathcal P_\nu] = -ieF_{\mu\nu} \tag{2.7}$$

$$e^{is\mathcal P^2}\mathcal P_\mu e^{-is\mathcal P^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(is)^n}{n!}\underbrace{[\mathcal P^2,[\mathcal P^2,\dots[\mathcal P^2,\mathcal P_\mu]\dots]]}_{n} \tag{2.8}$$

причем в однородном поле x) $[\mathcal P^2,\mathcal P_\mu]=2ieF_{\mu\nu}\mathcal P^\nu$, так что сумма (2.8) может быть вычислена в замкнутой форме:

$$e^{is\mathcal P^2}\mathcal P_\mu e^{-is\mathcal P^2} = \left(\sum_{n=0}^\infty\frac{(is)^n}{n!}(2ieF)^n\mathcal P\right)_\mu = (e^{-2eFs}\mathcal P)_\mu \tag{2.9}$$

Теперь мы должны найти интегралы типа

$$\int d^4k\,(1;k_\mu;k_\mu k_\nu)\,e^{is\mathcal H} \tag{2.10}$$

x) В этом случае $[\mathcal P^\alpha, F^{\mu\nu}]=0$

Прямое вычисление их довольно громоздко. Рассмотрение упрощается, если воспользоваться равенством:

$$\int d^4k\left(\frac{\partial}{\partial k_\mu},\ \frac{\partial^2}{\partial k_\mu\partial k_\nu}\right)e^{is\mathcal H}=0 \tag{2.11}$$

Входящие в (2.11) производные x) могут быть найдены с помощью следующей процедуры. Пусть

$$\frac{\partial}{\partial k}e^{is\mathcal H} = \varphi(s)\,e^{is\mathcal H}, \tag{2.12}$$

продифференцировав это соотношение по s, получим

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = ie^{is\mathcal H}\frac{\partial\mathcal H}{\partial k}e^{-is\mathcal H}, \tag{2.13}$$

где учтено, что для коммутирующих операторов A и B $\left[\frac{\partial A}{\partial k},B\right]=\left[\frac{\partial B}{\partial k},A\right]$. Подставляя сюда (2.3) и воспользовавшись (2.9), найдем

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = 2i\left[(1-u)k - ue^{-2eFsu}(\mathcal P-k)\right] \tag{2.14}$$

Решением этого дифференциального уравнения с очевидным начальным условием $\varphi(0)=0$ является

$$\varphi(s) = 2i\left[s(1-u)k + \frac{e^{-2eFsu}-1}{2eF}(\mathcal P-k)\right] \tag{2.15}$$

С учетом (2.12), вторая производная имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial k^\nu\partial k^\mu}e^{is\mathcal H} = \left[\frac{\partial\varphi_\mu(s)}{\partial k^\nu}+\varphi_\mu(s)\varphi_\nu(s)\right]e^{is\mathcal H} \tag{2.16}$$

x) Здесь и часто в дальнейшем мы будем опускать векторные индексы, что соответствует переходу к матричной форме записи, например, $\mathcal P Ak = \mathcal P^\mu A_{\mu\nu}k^\nu$.

Подставляя полученные выражения в (2.11) имеем

$$\int d^4k\, k_\nu e^{is\mathcal{H}} = \frac{A}{\mathcal{D}}\mathcal{P}\int d^4k\, e^{is\mathcal{H}} \tag{2.17}$$

где введены обозначения

$$A = e^{-2eFsu} - 1, \quad \mathcal{D} = A - 2eFs(1-u) \tag{2.18}$$

Аналогично

$$\int d^4k\, k_\mu k_\nu e^{is\mathcal{H}} = \left\{ \left(\frac{A}{\mathcal{D}}\mathcal{P}\right)_\mu \left(\frac{A}{\mathcal{D}}\mathcal{P}\right)_\nu - ie\left(\frac{F}{\mathcal{D}}\right)_{\mu\nu} \right\} \int d^4k\, e^{is\mathcal{H}} \tag{2.19}$$

причем величина в правой части симметрична относительно замены $\mu \leftrightarrow \nu$. Теперь задача свелась к вычислению интеграла

$$L(s) = \int d^4k\, e^{is\mathcal{H}} \tag{2.20}$$

Функция $L(s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dL(s)}{ds} = i\int d^4k\left[(\mathcal{P}^2 - 2\mathcal{P}k)u + k^2\right] e^{is\mathcal{H}} \tag{2.21}$$

Воспользовавшись формулами (2.17), (2.19), можно переписать (2.21) в виде:

$$\frac{dL(s)}{ds} = iB(s)L(s) \tag{2.22}$$

где

$$B(s) = \mathcal{P}^2 u - 2u\,\mathcal{P}\frac{A}{\mathcal{D}}\mathcal{P} + \mathcal{P}\frac{A^T A}{\mathcal{D}^T\mathcal{D}}\mathcal{P} - ie\,Sp\left(\frac{F}{\mathcal{D}}\right) \tag{2.23}$$

В выражении для $B(s)$ использована матричная форма записи. Вычисление явного вида $B(s)$ в конкретном поле представляет довольно громоздкую алгебраическую задачу (см.Приложение А). В общем случае, когда один или оба полевых инварианта $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ (1.1) отличны от нуля имеем:

$$B(s) = \frac{d}{ds}\left[\beta(s) + \frac{i}{2}\ln\beta_0(s) - \frac{I_H^{(0)}}{|e|H}\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,\xi_2\right] \tag{2.24}$$

где

$$\beta(s) = \mathcal{P}^2 us + \frac{I_H^{(0)}}{|e|H}a(x) - \frac{I_E^{(0)}}{|e|E}\ell(y)$$

$$\beta_0(s) = (\eta_1\cdot\eta_2)/(e^4E^2H^2)$$

$$\eta_1 = \mathrm{ch}\,y - 1 + \left(\frac{1-u}{u}\right)^2\cdot\frac{y^2}{2} + \left(\frac{1-u}{u}\right)y\,\mathrm{sh}\,y, \tag{2.25}$$

$$\eta_2 = 1 - \cos x + \left(\frac{1-u}{u}\right)^2\cdot\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1-u}{u}\right)x\sin x,$$

$$y = 2|e|Esu, \quad x = 2|e|Hsu$$

Здесь

$$E, H = \sqrt{(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} \pm \mathcal{F}}$$

$$a(x) = \mathrm{arctg}\, f_0;\quad f_0 = \frac{\xi_1}{\xi_2};\quad \xi_1 = (1-\cos x);\quad \xi_2 = \sin x + x\frac{1-u}{u}$$

$$\ell(y) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\varphi_0}{1-\varphi_0};\quad \varphi_0 = \frac{\tau_1}{\tau_2};\quad \tau_1 = \mathrm{ch}\,y - 1;\quad \tau_2 = \mathrm{sh}\,y + y\frac{1-u}{u} \tag{2.26}$$

$$I_H^{(0)} = \frac{\mathcal{P}F^2\mathcal{P} - E^2\mathcal{P}^2}{E^2 + H^2};\quad I_E^{(0)} = \frac{\mathcal{P}F^2\mathcal{P} + H^2\mathcal{P}^2}{E^2 + H^2}$$

причем $a(iy) = i\ell(y)$. В частном случае скрещенного поля $\mathcal{F} = \mathcal{G} = 0$ выражение для $B(s)$ может быть получено из (2.24) предельным переходом $\mathcal{F}, \mathcal{G} \to 0$:

$$\beta_c(s) = u(1-u)\left[\mathcal{P}^2 s - \frac{(su)^3}{3}(1-u)e^2\,\mathcal{P}F^2\mathcal{P}\right] \tag{2.27}$$

В силу

$$[\mathcal{P}^2, \mathcal{P}F^2\mathcal{P}] = 0 \tag{2.28}$$

операторы $\mathcal{P}^2$, $I_H^{(0)}$, $I_E^{(0)}$, входящие в $B(s)$, коммутируют друг с другом. Поэтому коммутатор $[B(s_1), B(s_2)] = 0$ и решение уравнения (2.22) может быть представлено в виде:

$$L(s) = \frac{C}{\sqrt{\beta_0(s)}}\exp\left\{i\left[\beta(s) - \frac{I_H^{(0)}}{|e|H}\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,\xi_2\right]\right\} \tag{2.29}$$

Для вычисления константы C рассмотрим предел $s \to 0$, для которого $\beta(s) \to 0$, $\sqrt{\beta_0(s)} \to 2s^2$, так что

$$L(s)_{s\to 0} = \frac{C}{2s^2}\exp\left[-i\frac{I_H^{(0)}}{|e|H}\cdot\frac{\pi}{2}\right] \tag{2.30}$$

Прямое же вычисление интеграла (2.10) в этом пределе дает

$$L(s) \underset{s \to 0}{=} \int d^4k \, e^{isk^2} = -\frac{i\pi^2}{s^2} \tag{2.31}$$

т.е.

$$C = -2i\pi^2 \exp\left\{ i \frac{I_H^{(0)}}{|e|H} \frac{\pi}{2} \right\} \tag{2.32}$$

Подставляя теперь (2.5), (2.17), (2.18), (2.28), (2.32) в (2.4), получим массовый оператор скалярной частицы

$$M^{(0)} = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^\infty ds\, s \int_0^1 du\, e^{-isum^2} Z \frac{2 e^{i\tilde{\beta}(s)}}{\sqrt{\beta_0(s)}} \tag{2.33}$$

где $\tilde{\beta}(s) = \beta(s) + \frac{I_H^{(0)}}{|e|H} \pi \vartheta(-\xi_2)$

$$Z = 4\mathcal{P}(1+A)\mathcal{P} - 2\mathcal{P}(2+2A+A^T)\frac{A}{\mathcal{D}}\mathcal{P} + $$
$$+ \mathcal{P}\frac{A^T}{\mathcal{D}^T}(1+2A)\frac{A}{\mathcal{D}}\mathcal{P} - ie\, Sp\left[(1+2A)\frac{F}{\mathcal{D}}\right] \tag{2.34}$$

Функция Z представляет матричную форму, которая может быть преобразована к виду (см.ПриложениеА):

$$Z = \frac{1}{\eta_1}\left(\eta_3 I_E^{(0)} + \frac{i\eta_5}{2su} \right) - \frac{1}{\eta_2}\left(\eta_4 I_H^{(0)} - \frac{i\eta_6}{2su} \right) \tag{2.35}$$

где

$$\eta_3 = ch y - 1 + 2\frac{1-u}{u} \cdot y\, sh y + 2\left(\frac{1-u}{u}\right)^2 y^2\, ch y$$

$$\eta_4 = 1 - \cos x + 2\frac{1-u}{u} x \sin x + 2\left(\frac{1-u}{u}\right)^2 x^2 \cos x \tag{2.36}$$

$$\eta_5 = \frac{1-u}{u} y^2 (3 - 2 ch y) + y\, sh y \left(1 - 2\left(\frac{1-u}{u}\right)^2 y^2\right)$$

$$\eta_6 = \frac{1-u}{u} x^2 (3 - 2\cos x) + x \sin x \left(1 + 2\left(\frac{1-u}{u}\right)^2 x^2\right)$$

$\eta_{1,2}$ см.(2.26), причем $\eta_{2n-1}(ix) = -\eta_{2n}(x)$. Случай скрещенного поля получается из (2.35) предельным переходом $\mathcal{G}$, $\mathcal{F} \to 0$:

$$\frac{2Z_c}{\sqrt{\beta_{0c}(s)}} = \frac{1}{s^2}\left\{ \mathcal{P}^2(2-u)^2 + \frac{2i}{s} + e^2 \mathcal{P}F^2\mathcal{P}(us)^2(1-u)\left(8 - \frac{32}{3}u + \frac{13}{3}u^2 - u^3\right) \right\} \tag{2.37}$$

Найденный массовый оператор $M^{(0)}$ (2.33) должен быть стандартным образом перенормирован:

$$M_R^{(0)} = M^{(0)} - M^{(0)}(\mathcal{P}^2 = m^2,\ F = 0) -$$
$$- (\mathcal{P}^2 - m^2)\, dM^{(0)}/d\mathcal{P}^2 (\mathcal{P}^2 = m^2;\ F = 0) \tag{2.38}$$

В результате находим (см.(2.25), (2.35)):

$$M_R^{(0)} = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^\infty ds\cdot s \int_0^1 du \left\{ \frac{2Z}{\sqrt{\beta_0(s)}} e^{-isum^2 + i\tilde{\beta}(s)} - \frac{Z_0}{s^2} e^{-im^2u^2s} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{s^2}(\mathcal{P}^2 - m^2)\left[(2-u)^2 + isu(1-u)Z_0\right] e^{-im^2u^2s} \right\} \tag{2.39}$$

где $Z_0 = m^2(2-u)^2 + \frac{2i}{s}$

Полученное выражение для $M_R^{(0)}$ (2.38) представляет собой перенормированный оператор скалярной частицы с точным учетом внешнего электромагнитного поля. Заметим, что при регуляризации выпадает контактный член (рис.1б).

Массовый оператор скалярной частицы рассматривался также Швингером [9], который исходил из сформулированного им вариационного принципа. При вычислении интеграла (2.5) он перешел к операторам K_μ и ввел сопряженное K_μ пространство. Результаты обоих подходов: (2.25), (2.34) и (2.27), (2.30), (2.36) [9] согласуются между собой.

Для физических приложений большой интерес представляет среднее значение оператора $M_R^{(0)}$ на массовой оболочке ($\mathcal{P}^2 = m^2$). При нахождении его следует иметь в виду, что оператор $\mathcal{P}$ входит в выражение (2.39) только в виде комбинаций, $\mathcal{P}^2 - m^2$ и $I_E^{(0)}$, $I_H^{(0)}$ (2.16), коммутирующих между собой. Поэтому всегда можно выбрать решения Φ уравнения Клейна-Гордона во внешнем поле так, чтобы они являлись собственными функциями этих операторов. Весьма существенно, что операторы $I_H^{(0)}$ и $I_E^{(0)}$ оказываются линейно зависимыми на классе решений Φ уравнения Клейна-Гордона: $I_E^{(0)} = m^2 + I_H^{(0)}$. Поэтому для вычисления среднего значения массового оператора на массовой оболочке $\langle M_R^{(0)} \rangle$ достаточно знать спектр оператора $I_H^{(0)}$, который может быть взят из известной задачи для магнитного поля. В специальной системе, где $\vec{E} \parallel \vec{H}$ имеет место $I_H^{(0)} = \vec{\mathcal{P}}_\perp^2$, т.е. спектр $I_H^{(0)}$ определяется коммутационными соотношениями между компонентами $\mathcal{P}_\perp$ в этой системе, которые зависят только от магнитного поля. Как известно, нахождение спектра сводится к задаче о гармоническом осцилляторе x), т.е. $I_H^{(0)}\Phi = \vec{\mathcal{P}}_\perp^2\Phi = (2n+1)|e|H\Phi$. Тогда для вычисления среднего $\langle M_R^{(0)} \rangle$ по этим состояниям достаточно в формуле (2.39) заменить операторы $\mathcal{P}^2 - m^2$, $I_E^{(0)}$, $I_H^{(0)}$ на их собственные значения:

$$\mathcal{P}^2 - m^2 \to 0\ ,\ I_H^{(0)} \to (2n+1)|e|H\ ,\ I_E^{(0)} \to m^2 + (2n+1)|e|H \qquad (2.40)$$

Переходя в полученном для $\langle M_R^{(0)} \rangle$ выражении к пределу $E \to 0$ $(y \to 0)$, найдем среднее значение массового оператора в чисто магнитном поле xx) (этот вопрос рассматривался также в [11]):

$$\langle M_{RH}^{(0)} \rangle = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^1 du\, e^{-i\frac{H_0 x u}{2H}} \cdot \Big\{ \frac{Z_H \delta^*}{\Delta} \cdot \exp\Big[2ni\Big(a(x) - \frac{ux}{2}\Big) - \frac{iux}{2}\Big] - Z_0 \Big\} \qquad (2.41)$$

где

$$H_0 = \frac{m^2}{|e|}, \qquad \Delta = \frac{2u^2}{x^2}\eta_2\,, \quad \delta = 1 - u + \frac{iu}{x}(e^{-ix} - 1)$$

$$Z_H = m^2(2-u)^2 + (2n+1)|e|H\Big\{(2-u)^2 - 1 - \frac{1}{\Delta}\Big[2u(1-u)\frac{\sin x}{x} + (1-u)^2(4\cos x - 1)\Big]\Big\} + i\frac{2u|e|H}{x}\Big\{1 + \frac{1}{\Delta}\Big[(1-u)(3 - 2\cos x) + u\frac{\sin x}{x}\Big(1 + \frac{2(1-u)^2}{u^2}x^2\Big)\Big]\Big\} \qquad (2.42)$$

---

x) Следует иметь в виду, что функции Φ отнюдь не сводятся к решениям в чисто магнитном поле, впрочем, как уже отмечалось, в данном подходе не нужно знать явного вида решений.

xx) Для перехода к случаю чисто электрического поля необходимо зафиксировать $(2n+1)|e|H$, являющееся в специальной системе собственным значением $\vec{\mathcal{P}}_\perp^2$, и после этого устремить $H \to 0$ $(x \to 0)$. При этом спектр $I_E^{(0)}$ и $I_H^{(0)}$ становится непрерывным.

Величина Z_0 определена в (2.39), $a(x)$ – в (2.26). Мнимая часть этого выражения определяет полную вероятность излучения частицы, находящейся в состоянии n в магнитном поле произвольной напряженности (ср.[2])

$$W^{(0)} = -\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{Im}\langle M_{RH}^{(0)} \rangle \qquad (2.43)$$

где ε – энергия частицы, $\varepsilon^2 = m^2 + p_\parallel^2 + (2n+1)|e|H$.

Известный интерес представляет среднее значение массового оператора в основном состоянии $(n = 0)$, характеризующее изменение энергии основного состояния за счет радиационных поправок (см. (2.41))

$$\langle M_{RH}^{(0)} \rangle\Big|_{n=0} = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^1 du\, e^{-i\frac{H_0 u x}{2H}}\Big[\delta^*\frac{Z_H(n=0)}{\Delta}e^{-\frac{iux}{2}} - Z_0\Big] \qquad (2.44)$$

Воспользуемся тем, что

$$\delta(x) = 1 - u + \frac{iu}{x}(e^{-ix} - 1) \qquad (2.45)$$

не имеет нулей в области ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) комплексной переменной $x = \alpha - i\beta$, поскольку условие $\delta = 0$ приводит к равенству $\beta(1-u) + u(1 - \cos\alpha\, e^{-\beta}) = 0$, которое не выполняется в этой области. Имеет место соотношение:

$$\frac{\delta^*}{\Delta} = \frac{1}{\delta} \qquad (2.46)$$

где Δ дается (2.42). Нетрудно убедиться также, что в членах, содержащих дополнительную степень $\Delta = \delta \cdot \delta^*$ в знаменателе, фактор δ^* сокращается с числителем, так что в знаменателе массового оператора стоят только члены δ и δ^2. Поэтому контур интегрирования по x можно повернуть на угол $-\pi/2$. В результате имеем:

$$\langle M_{RH}^{(0)} \rangle\Big|_{n=0} = \frac{\alpha m^2}{4\pi}\int_0^1 du\int_0^\infty \frac{dz}{z}e^{-u\lambda z} \cdot \Big\{\Big(\frac{1}{\delta_1}e^{-\frac{uz}{2}} - 1\Big)\Big[(2-u)^2 - \frac{2u}{\lambda z}\Big] + \frac{1}{\lambda\delta_1}e^{-\frac{uz}{2}} \cdot \Big[2(1-u)\Big(1 - \frac{e^{-z}}{\delta_1}\Big) + \frac{u}{z}\Big(1 + \frac{uz}{2} - \frac{1}{\delta_1}\Big)\Big]\Big\} \qquad (2.47)$$

где $\lambda = \frac{H_0}{2H}$, $\delta_1 = \delta(x = -iz) = 1 - u + \frac{u}{z}(1 - e^{-z})$. Это выражение является вещественным, как и должно быть, поскольку излучение из основного состояния отсутствует. При $H \to 0$ $(\lambda \to \infty)$ имеем (ср. [11]):

$$\left\langle M^{(0)}_{RH} \right\rangle \Big|_{h=0,\, \lambda \to \infty} = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{m^2}{\lambda^2} \left(\ln\lambda - \frac{7}{96} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^3} \right) \tag{2.48}$$

При $H \to \infty$ $(\lambda \to 0)$ основной вклад дает член в (2.47) $\sim 1/\lambda$. Если обозначить коэффициент при $\alpha m^2/4\pi\lambda$ через J, то для J можно получить оценку снизу: $J > 2$, причем энергия основного состояния при $H \to \infty$ есть $m^2 + |e|H\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} J\right)$.

Рассмотрим еще скрещенное поле $\mathcal{G} = 0$, $\mathcal{F} = 0$ для которого отличен от нуля только инвариант

$$\chi^2 = \frac{e^2}{m^6} \left\langle \mathcal{P} F^2 \mathcal{P} \right\rangle = - \frac{e^2}{m^6} \left\langle \left(F^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu \right)^2 \right\rangle \tag{2.49}$$

Явный вид $\left\langle M^{(0)}_{RC} \right\rangle$ получается при подстановке (2.27), (2.37) в (2.38):

$$\left\langle M^{(0)}_{RC} \right\rangle = \frac{\alpha}{4\pi} m^2 \int_0^\infty \frac{dz}{z} \int_0^1 du \left\{ e^{-\frac{iu}{\chi}\left[z + \frac{z^3}{3}(1-u)^2\right]} \left[(2-u)^2 + z^2(1-u)\left(8 - \frac{32}{3}u + \frac{13}{3}u^2 - u^3 \right) + \frac{2iu\chi}{z} \right] - \left[(2-u)^2 + \frac{2iu\chi}{z} \right] e^{-\frac{iuz}{\chi}} \right\} \tag{2.50}$$

где сделана замена $m^2 s u \chi = z$

Для случая, когда безразмерный инвариант χ^2 существенно превосходит безразмерные полевые инварианты

$$g^2 = \frac{e^2}{m^4} \mathcal{G}, \quad f^2 = \frac{e^2}{m^4} \mathcal{F} \tag{2.51}$$

в нулевом приближении можно и в случае произвольного поля сохранить в массовом операторе члены с χ^2, опустив члены, содержащие f^2, g^2. Такого рода процедура представляет переход к квазиклассическому приближению. В результате массовый оператор в квазиклассическом приближении совпадает с массовым оператором в скрещенном поле.

Интегралы по z в выражении (2.50) могут быть вычислены непосредственно, если воспользоваться известными интегральными представлениями для функций Бесселя мнимого аргумента $K_\nu(\xi)$ (см. [18], стр.412, 984). Для полной вероятности излучения (2.43) в результате найдем:

$$W^{(0)} = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{3}} \frac{m^2}{\varepsilon} \int_0^1 du \left\{ \frac{u}{1-u} \left(\frac{4}{3} - \frac{23}{12}u + \frac{3}{4}u^2 \right) K_{2/3}(\xi) + \left(1 - u + \frac{3}{4}u^2 \right) \int_\xi^\infty K_{5/3}(z)\, dz \right\} \tag{2.52}$$

где $\xi = \frac{2}{3\chi} \frac{u}{1-u}$, ε - энергия частицы.

Проведя преобразование подынтегрального выражения с использованием рекуррентных соотношений для K -функций, получим из (2.52) известное выражение для полной вероятности излучения скалярной частицы в скрещенном поле (в квазиклассическом приближении см. [2], стр.158):

$$W^{(0)} = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{3}} \frac{m^2}{\varepsilon} \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)^2} \int_{2y/3\chi}^\infty K_{5/3}(z)\, dz \tag{2.53}$$

III. Массовый оператор спинорной частицы

Перейдем к рассмотрению массового оператора (рис.1а) частицы со спином 1/2 (1.9), который мы запишем в форме

$$M^{(1/2)} = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{\hat{\mathcal{P}} - \hat{k} + m}{(\mathcal{P} - k)^2 - m^2 + \frac{1}{2} e\sigma F + i\varepsilon} \gamma_\mu \tag{3.1}$$

где введено обозначение $\sigma F = \sigma^{\mu\nu} F_{\nu\mu}$, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$.

Проведя параметризацию пропагаторов, как в (2.2), имеем

$$M^{(1/2)} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds\, s \int_0^1 du\, e^{-isu(m^2 - i\varepsilon)} \widetilde{M}^{(1/2)} \tag{3.2}$$

где

$$\widetilde{M}^{(1/2)} = \int d^4k\, \gamma^\mu (\hat{\mathcal{P}} - \hat{k} + m) e^{is\mathcal{H} + \frac{isu}{2} e\sigma F} \gamma_\mu \tag{3.3}$$

Поскольку добавка к показателю экспоненты в подынтегральном выражении, по сравнению со случаем скалярных частиц (2.5), не содержит k_μ (и коммутирует с $\mathcal{H}$), то интегралы по k в (3.3) совпадают с вычисленными выше для случая скалярных частиц (2.17), (2.29). Воспользовавшись этим, а также соотношением

$$e^{\frac{i}{2} sue\sigma F} \gamma_\mu e^{-\frac{i}{2} sue\sigma F} = (1+A)_{\mu\nu} \gamma^\nu \tag{3.4}$$

найдем для $\widetilde{M}^{(\frac{1}{2})}$:

$$\widetilde{M}^{(1/2)} = Y_1 e^{\frac{i}{2} sue\sigma F} \left(-\frac{2\pi^2 i}{\sqrt{\beta_0(s)}}\right) e^{i\widetilde{\beta}(s)} \tag{3.5}$$

где $\beta_0(s)$, $\widetilde{\beta}(s)$ определены формулами (2.25), (2,34)

$$Y_1 = \gamma^\mu \left[\hat{\mathcal{P}} - \left(\frac{A}{\mathcal{D}}\mathcal{P}\right)_\lambda \gamma^\lambda + m\right](1+A)_{\mu\nu}\gamma^\nu \tag{3.6}$$

Как и в случае скалярных частиц, в дальнейшем нас будут интересовать, в частности, средние по решениям уравнения Дирака в поле. Имея это в виду, удобно представить показатель экспоненты в формуле (3.5) в форме, содержащей только операторы, коммутирующие с $\hat{\mathcal{P}}$ и между собой (см.Приложение А):

$$e^{\frac{i}{2} sue\sigma F} e^{i\widetilde{\beta}(s)} = Y_2 e^{i\rho(s)} \tag{3.7}$$

где

$$\rho(s) = us\hat{\mathcal{P}}^2 + \frac{I_H^{(1/2)}}{|e|H}\left[a(x) + \pi\vartheta(-\xi_2)\right] - \frac{I_E^{(1/2)}}{|e|E}\ell(y)$$

$$Y_2 = \frac{\operatorname{sign}(\xi_2)}{\sqrt{1+f_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varphi_0^2}} \cdot \left[1 + \frac{ie\varphi_0}{2|e|(E^2+H^2)}\left(E(\sigma F) + H(\sigma F^*)\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \frac{ief_0}{2|e|(E^2+H^2)}\left(H(\sigma F) - E(\sigma F^*)\right)\right] \tag{3.8}$$

величины $a(x)$, $\ell(y)$, f_0, φ_0 определены в (2.26). В показателе экспоненты в (3.7) введены операторы:

$$I_H^{(1/2)} = \frac{R^2 - H^2\hat{\mathcal{P}}^2}{E^2+H^2}, \quad I_E^{(1/2)} = \frac{R^2 + E^2\hat{\mathcal{P}}^2}{E^2+H^2}, \quad R = \frac{e}{|e|}\gamma^5 \mathcal{P}F^*\gamma \equiv \frac{e}{|e|}\gamma^5 \mathcal{P}^\mu F^*_{\mu\nu}\gamma^\nu \tag{3.9}$$

причем операторы $I_H^{(1/2)}$, $I_E^{(1/2)}$, R^2 коммутируют между собой и с оператором $\hat{\mathcal{P}}$ и выражаются через любой из них и $\hat{\mathcal{P}}^2$, так что на классе решений Ψ уравнения Дирака ($\hat{\mathcal{P}}\Psi = m\Psi$), для нахождения собственных значений этих операторов достаточно знать спектр одного из них, например $I_H^{(1/2)}$. Оператор R представляет собой свертку тензорного оператора поляризации $R_{\mu\nu}$ (введенного для свободных частиц в [20]) с тензором $\frac{1}{2}\frac{e}{|e|}F^{\mu\nu}$. В силу того, что среднее значение на состояниях Ψ $\langle R \rangle = \frac{em}{2|e|}\langle\sigma F\rangle$, $\langle R \rangle$ характеризует спиновую часть взаимодействия с внешним полем. Поскольку $[\hat{\mathcal{P}}, R] = 0$, собственные значения оператора R можно использовать для классификации спиновых состояний электрона в поле x). Введем решения $\Psi_{\pm s}$ такие, что

$$R\Psi_\pm = \pm\sqrt{R^2}\,\Psi_\pm \tag{3.10}$$

При вычислении предэкспоненциального множителя $Y_1 \cdot Y_2$ (см. (3.6), (3.8)) полезно использовать специальную систему, в которой $\vec{E} \parallel \vec{H}$ (см.Приложение А), при этом удобно выделить члены типа $\{\hat{\mathcal{P}} - m, \Gamma\}$ (Γ - комбинация γ -матриц) и воспользоваться соотношениями

$$\frac{e}{|e|}\{\sigma F, \hat{\mathcal{P}}\} = 4R, \quad \frac{e}{|e|}\{\sigma F^*, \hat{\mathcal{P}}\} = -4R_1 \tag{3.11}$$

где $R_1 = \frac{e}{|e|}\gamma^5\mathcal{P}F\gamma$, R определено в (3.9), $\{\ ,\ \}$ означает антикоммутатор. После довольно громоздких алгебраических преобразований имеем:

---

x) Например, в случае чисто магнитного поля, когда $p_\parallel = 0$ $R \to \frac{e}{|e|}\varepsilon\gamma^0(\vec{\Sigma}\vec{H})$

$$Y = Y_1 \cdot Y_2 = \frac{1}{(E^2+H^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\eta_1 \eta_2}} \Big\{ \gamma F^2 \mathcal{P} \frac{1-u}{u} [x\tau_3 - y\xi_3] +$$

$$+ \hat{\mathcal{P}} [H^2(\xi_3 \operatorname{sh} y + \tau_3 \xi_2) + E^2(\tau_3 \sin x + \xi_3 \tau_2)] +$$

$$+ iR_1 \frac{1-u}{u} (Ey \operatorname{ch} y \cdot \xi_1 - Hx \cos x \cdot \tau_1) + iR \frac{1-u}{u} \cdot [Hy(\operatorname{ch} y - \cos x) - \tag{3.12}$$

$$- (xH + yE) \sin x \cdot \operatorname{sh} y] + \frac{i}{2} \{ \hat{\mathcal{P}} - m, V \} \Big\}$$

где

$$V = \frac{e}{|e|} \sigma F \cdot \frac{1-u}{2u} \cdot [Ey \operatorname{sh} y \cdot \xi_2 + Hx \sin x \ \tau_2] +$$

$$+ \frac{e}{|e|} \sigma F \ \frac{1-u}{2u} \Big[\xi_1 \tau_1 (xH + yE) + \frac{1-u}{u} xy (H \operatorname{sh} y - \tag{3.13}$$

$$- E \sin x) \Big] - \gamma^5 (H^2 + E^2) \Big[2\tau_1 \xi_1 + \frac{1-u}{u} (x \sin x \cdot \tau_1 +$$

$$+ y \operatorname{sh} y \cdot \xi_1) \Big] + i(E^2 + H^2)(\xi_3 \tau_2 + \xi_2 \tau_3) ;$$

$$\xi_3 = \sin x + \frac{1-u}{u} x \cos x , \quad \tau_3 = \operatorname{sh} y + \frac{1-u}{u} \cdot y \operatorname{ch} y$$

$\tau_{1,2}$; $\xi_{1,2}$ определены в (2.26). Подставляя (3.5), (3.7),(3.12) в (3.2), найдем величину $M^{(1/2)}$ которую следует стандартным способом перенормировать (ср.(2.38)):

$$M_R^{(1/2)} = M^{(1/2)} - M^{(1/2)}(\hat{\mathcal{P}} = m, F = 0) - (\hat{\mathcal{P}} - m) \frac{dM^{(1/2)}}{d\hat{\mathcal{P}}} (\hat{\mathcal{P}} = m, F = 0) \tag{3.14}$$

В результате получаем массовый оператор спинорной частицы в общем случае однородного электромагнитного поля, представленный как явная функция полевых инвариантов E и H (2.26):

$$M_R^{(1/2)} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty s\,ds \int_0^1 du \Big\{ \frac{Y}{\sqrt{\beta(s)}} e^{i(\rho(s) + usm^2)} - \tag{3.15}$$

$$- \frac{m}{s^2}(1+u) e^{-im^2u^2s} + (\hat{\mathcal{P}} - m) \Big[\frac{1}{s^2} - \frac{2im^2}{s} u(1+u) \Big] (1-u) e^{-im^2u^2s} \Big\}$$

Для физических приложений большой интерес представляет среднее значение $\langle M_R^{(1/2)} \rangle$ на состояниях Ψ, которые мы выберем так, чтобы они являлись собственными функциями операторов ($\hat{\mathcal{P}} - m$), R (3.10). Для вычисления средних от входящих в (3.12) операторов R_1 и $\gamma F^2 \mathcal{P}$, воспользуемся соотношениями:

$$\{ \gamma F^2 \mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}} \} = 2(R^2 + 2\mathcal{F} \hat{\mathcal{P}}^2), \quad \{ R_1, R \} = 2 \mathcal{G} \hat{\mathcal{P}}^2 \tag{3.16}$$

где $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ даются (1.1). Тогда вычисление $\langle M_R^{(1/2)} \rangle$ сводится (учитывая приведенные выше соотношения (3.9)) к нахождению спектра собственных значений оператора[x] $I_H^{(1/2)}$.

В специальной системе отсчета $I_H^{(1/2)} = -(\vec{\gamma} \vec{\mathcal{P}}_\perp)^2 = \vec{\mathcal{P}}_\perp^2 - e\Sigma_3 H$, собственные значения этого оператора (зависящие только от магнитного поля) есть $I_H^{(1/2)} \Psi = 2n|e|H\Psi$ ($n = 0, 1 \ldots$).

Все состояния с $n \neq 0$ двухкратно вырождены. Основное состояние ($n = 0$) является невырожденным, для этого состояния $\langle I_H^{(1/2)} \rangle_0 = \langle \vec{\mathcal{P}}_\perp^2 - e\Sigma_3 H \rangle_0 = 0$, т.е. $eH \langle \Sigma_3 \rangle_0 = \langle \vec{\mathcal{P}}_\perp^2 \rangle_0 > 0$.

С другой стороны, для этого состояния $[R, \Sigma_3] \Psi_0 = 0$, поскольку $[iR, \Sigma_3]$ – самосопряженный оператор и $([iR, \Sigma_3])^2 \sim I_H^{(1/2)}$. В силу этого состояние $\Psi(n=0)$ является собственной функцией оператора $e\Sigma_3$ с положительным собственным значением. Так как (ср.(3.10)) $\langle R \rangle = \frac{em}{2|e|} \langle \sigma F \rangle$ или в специальной системе $\langle R \rangle = \frac{em}{|e|} \langle \Sigma_3 H - i\alpha_3 E \rangle$ и $\langle \alpha_3 \rangle_0 = 0$ в основном состоянии, то $\langle R \rangle_0 = \frac{emH}{|e|} \langle \Sigma_3 \rangle_0$ ($\langle \Sigma_3 \rangle_0 < 0$ для электрона,

---

x) Аналогичная ситуация имела место для частиц со спином 0.

$\langle \Sigma_3 \rangle_0 > 0$ для позитрона), т.е. в основном состоянии собственное значение оператора R положительно.

Величина $\langle M_R^{(1/2)} \rangle$ дается выражением (3.15), если в последнем провести следующие замены:

$$\hat{\mathcal{P}} - m \to 0\,, \quad I_H^{(1/2)} \to 2n|e|H\,, \quad I_E^{(1/2)} \to m^2 + 2n|e|H$$
$$\chi F^2 \mathcal{P} \to \frac{1}{m}\left[m^2E^2 + 2n|e|H(E^2+H^2)\right] \tag{3.17}$$
$$R \to \pm\sqrt{m^2H^2 + 2n|e|H(E^2+H^2)}\,, \quad R_\perp \to \pm\frac{\varphi m^2}{\sqrt{m^2H^2+2n|e|H(E^2+H^2)}}$$

Переходя в полученном выражении для $\langle M_R^{(1/2)} \rangle$ к пределу $E \to 0$ ($y \to 0$), найдем среднее значение массового оператора в чисто магнитном поле[x)] (этот частный случай рассматривался также в [10]):

$$\langle M_{RH}^{(1/2)} \rangle = \frac{\alpha}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^1 du\, e^{-i\frac{H_0}{2H}ux} \left\{ \frac{\exp\left[2in\left(a(x) - \frac{ux}{2}\right)\right]}{\Delta} \right. \cdot \tag{3.18}$$
$$\left[\left(2n\frac{H}{H_0}(1-u) - u\right)\left(1 - \cos x + u\left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\right)\right) + \left(1 + u\frac{\sin x}{x}\right) + \right.$$
$$\left. \left. + i\zeta u(1-u)\left(\frac{1-\cos x}{x} - \sin x\right)\sqrt{1 + 2n\frac{H}{H_0}}\right] - (1+u) \right\}$$

где $\zeta = \dfrac{R}{\sqrt{R^2}} = \begin{cases} \pm 1\,, & n \geq 1 \\ +1\,, & n = 0 \end{cases}$,

Мнимая часть этого выражения определяет полную вероятность излучения $W^{(1/2)}$ частицы, находящейся в состоянии n (ср. (2.13))

$$W^{(1/2)} = -\frac{2m}{\varepsilon} \operatorname{Im} \langle M_{RH}^{(1/2)} \rangle \tag{3.19}$$

---

x) Основное состояние ($n = 0$) для (3.18) рассматривалось в ряде работ [11-2].

где $\varepsilon^2 = m^2 + p_\parallel^2 + 2n|e|H$

Переход к случаю чисто электрического поля проводится так же, как для скалярных частиц. Аналогично делается переход к частному случаю скрещенного поля (квазиклассическому приближению), для которого получаются известные результаты (см. [10], [16], [2]).

Авторы благодарны В.С.Фадину за полезные обсуждения.

Приложение А

Преобразование матричных выражений типа (2.23) удобно проводить в специальной системе отсчета, в которой $\vec{E} \parallel \vec{H}$. Выберем общее направление этих векторов в качестве оси 3 декартовых координат. Тогда тензор $F_{\mu\nu}$ может быть представлен следующим образом:

$$F_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} E + B_{\mu\nu} H \tag{A.1}$$

где

$$C_{\mu\nu} = g^0_\mu g^3_\nu - g^3_\mu g^0_\nu$$
$$B_{\mu\nu} = g^2_\mu g^1_\nu - g^1_\mu g^2_\nu \tag{A.2}$$

Здесь $g^{\mu\nu}$ -метрический тензор. Тензоры $C_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(CB)_{\mu\nu} = 0\,, \quad (C^2)_{\mu\nu} - (B^2)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$
$$(C^{2k+1})_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}\,, \quad (B^{2k+1})_{\mu\nu} = (-1)^k B_{\mu\nu} \tag{A.3}$$
$$(C^{2k})_{\mu\nu} = (C^2)_{\mu\nu}\,; \quad (B^{2k})_{\mu\nu} = (-1)^{k+1}(B^2)_{\mu\nu}\,, \ (k>0)$$

Формулы (A.1) – (A.3) позволяют разложить произвольную функцию от $F_{\mu\nu}$ по тензорам $C_{\mu\nu}$, $(C^2)_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $(B^2)_{\mu\nu}$. Проиллюстрируем это на примере функции e^{SF}:

$$(e^{SF})_{\mu\nu} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(SF)^k}{k!}\Big)_{\mu\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{S^{2k}}{(2k)!}(CE+BH)^{2k}_{\mu\nu} +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S^{2k+1}}{(2k+1)!}(CE+BH)^{2k+1}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + (C^2)_{\mu\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(SE)^{2k}}{(2k)!} - \qquad (A.4)$$
$$-(B^2)_{\mu\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(SH)^{2k}}{(2k)!}(-1)^k + C_{\mu\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(SE)^{2k+1}}{(2k+1)!} + B_{\mu\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(SH)^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k =$$
$$= (C^2)_{\mu\nu}\,\mathrm{ch}(SE) - (B^2)_{\mu\nu}\cos(SH) + C_{\mu\nu}\,\mathrm{sh}(SE) + B_{\mu\nu}\sin(SH)$$

Деление функций, зависящих от тензора $F_{\mu\nu}$, проводится просто, если учесть, что система тензоров $C_{\mu\nu}$, $(C^2)_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $(B^2)_{\mu\nu}$ является линейно независимой и полной (в специальной системе). Рассмотрим, например, отношение (см. (A.1), (A.4))

$$\frac{e^{SF}-1}{SF} = \frac{C^2(\mathrm{ch}\,ES-1) + B^2(1-\cos HS) + C\,\mathrm{sh}\,ES + B\sin HS}{CES + BHS} \qquad (A.5)$$

которое мы будем искать в виде:

$$\frac{e^{SF}-1}{SF} = \lambda_1 C^2 + \lambda_3 C + \lambda_2 B^2 + \lambda_4 B \qquad (A.6)$$

Умножив обе части (A.6) на знаменатель (FS) и приравняв коэффициенты при каждом из тензоров в обеих частях (A.6), (A.5), находим:

$$\lambda_1 = \frac{\mathrm{sh}\,ES}{ES}, \quad \lambda_2 = -\frac{\sin HS}{HS}, \quad \lambda_3 = \frac{\mathrm{ch}\,ES-1}{ES}, \quad \lambda_4 = \frac{1-\cos HS}{HS} \qquad (A.7)$$

что и решает задачу.

После выполнения указанных выше операций (A.4), (A.6), (A.7) можно вернуться к форме записи, не зависящей от выбора системы координат, выразив тензоры C, C^2, B, B^2 через степени F, F^*:

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{E^2+H^2}(EF_{\mu\nu} + HF^*_{\mu\nu}), \quad B_{\mu\nu} = \frac{1}{E^2+H^2}(HF_{\mu\nu} - EF^*_{\mu\nu})$$
$$(A.8)$$
$$(C^2)_{\mu\nu} = \frac{1}{E^2+H^2}(F^2_{\mu\nu} + H^2 g_{\mu\nu}), \quad (B^2)_{\mu\nu} = \frac{1}{E^2+H^2}(F^2_{\mu\nu} - E^2 g_{\mu\nu})$$

где E, H выражаются через $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ согласно (2.26). Заметим, что все соотношения для функций дуального тензора F^* получаются заменой $E \to H$, $H \to -E$ из соответствующих соотношений для F (например, из (A.1), (A.4), (A.6), (A.7)).

Преобразование выражений, содержащих γ -матрицы, рассмотрим на примере вывода формулы (3.7). Будем исходить из (3.5), где показатель экспоненты имеет вид:

$$i\Big[\Big(\mathcal{P}^2 + \frac{e\sigma F}{2}\Big)us - \frac{I_E^{(0)}}{|e|E}\ell(y) + \frac{I_H^{(0)}}{|e|H}\tilde{a}(x)\Big]; \quad \tilde{a}(x) = a(x) + \pi\vartheta(-\xi_0) \qquad (A.9)$$

Операторы $I_H^{(0)}$, $I_E^{(0)}$ не коммутируют с $\hat{\mathcal{P}}$. В специальной системе отсчета $I_E^{(0)} = \mathcal{P}C^2\mathcal{P}$, $I_H^{(0)} = \mathcal{P}B^2\mathcal{P}$, а их коммутаторы с $\hat{\mathcal{P}}$ есть:

$$[\mathcal{P}B^2\mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}}] = -2ieH(\gamma B\mathcal{P}), \quad [\mathcal{P}C^2\mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}}] = 2ieE(\gamma C\mathcal{P}) \qquad (A.10)$$

отсюда ясно, что для образования операторов, коммутирующих с $\hat{\mathcal{P}}$, необходимо добавить к $I_H^{(o)}$, $I_E^{(o)}$ соответствующие спиновые члены. Вычислим следующие коммутаторы:

$$[\sigma C, \hat{\mathcal{P}}] = -4i(\gamma C \mathcal{P}), \quad [\sigma B, \hat{\mathcal{P}}] = -4i(\gamma B \mathcal{P}) \qquad (A.11)$$

Из формул (A.10), (A.11) видно, что операторы $\mathcal{P}C^2\mathcal{P} + \frac{eE\sigma C}{2}$, $\mathcal{P}B^2\mathcal{P} - \frac{eH\sigma B}{2}$ коммутируют с $\hat{\mathcal{P}}$, т.е. являются искомыми операторами. Используя (A.8), имеем в произвольной системе отсчета:

$$\mathcal{P}C^2\mathcal{P} + \frac{eE\sigma C}{2} = \frac{R^2 + E^2\hat{\mathcal{P}}^2}{E^2+H^2} = I_E^{(1/2)} \qquad (A.12)$$

$$\mathcal{P}B^2\mathcal{P} - \frac{eH\sigma B}{2} = \frac{R^2 - H^2\hat{\mathcal{P}}^2}{E^2+H^2} = I_H^{(1/2)}$$

Теперь формула (A,9) принимает вид

$$e^{i\left(\tilde{\beta}(s) + \frac{sue\sigma F}{2}\right)} = e^{i\frac{e}{|e|}\Sigma_3 \tilde{a}(x)} \, e^{\frac{e}{|e|}\alpha_3 \ell(y)} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ i \left[\hat{\mathcal{P}}^2 us + \frac{I_H^{(1/2)}}{|e|H}\tilde{a}(x) - \frac{I_E^{(1/2)}}{|e|E}\ell(y)\right]\right\} \qquad (A.13)$$

Стоящие в правой части экспоненциальные факторы без труда вычисляются, а ответ с помощью (A.8) может быть записан в произвольной системе:

$$e^{i\frac{e}{|e|}\Sigma_3\tilde{a}(x)} = \cos\tilde{a}(x) + i\frac{e}{|e|}\Sigma_3 \sin\tilde{a}(x) = \frac{\operatorname{sign}\xi_2}{\sqrt{1+f_0^2}}\left(1 + i\frac{e}{|e|}f_0\Sigma_3\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}\xi_2}{\sqrt{1+f_0^2}}\left\{1 + \frac{ief_0(H\sigma F - E\sigma F^*)}{2|e|(E^2+H^2)}\right\}; \quad e^{\frac{e}{|e|}\alpha_3\ell(y)} = \operatorname{ch}\ell(y) + \frac{e}{|e|}\alpha_3 \operatorname{sh}\ell(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\varphi_0^2}}\left(1 + \frac{e}{|e|}\varphi_0\alpha_3\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi_0^2}}\left\{1 + \frac{ie\varphi_0(E\sigma F + H\sigma F^*)}{2|e|(H^2+E^2)}\right\} \qquad (A.14)$$

Подставив формулу (A.14) в (A.13), получим (3.7).

Литература

1. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, часть 1, Наука, Москва, 1968.
2. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат, Москва, 1973.
3. Синхротронное излучение под редакцией А.А.Соколова, И.М.Тернова. Наука, Москва, 1966.
4. J.Schwinger.Phys.Rev.82,664,1951
5. A.Minguzzi.Nuovo Cimento 19,847,1961
6. S.Adler.Ann.of Phys.67,599,1971
7. Н.Б.Нарожный ЖЭТФ 55, 714, 1968.
8. И.А.Баталин, А.Е.Шабад. ЖЭТФ, 60, 894, 1971.
9. J.Schwinger.Phys.Rev.D7,1696,1973
10. W.Tsai,A.Yildiz.Phys.Rev.D8,N 10,1973
11. W.Tsai.Preprint UCLA/73/tep/77,1973
12. И.А.Баталин, Е.С.Фрадкин. ТМФ 5, 190, 1970.
13. И.А.Баталин, Е.С.Фрадкин "Международный семинар по функциональному анализу", Москва, 1971.
14. Е.С.Фрадкин. Труды ФИАН т.29, 1965.
15. В.И.Ритус ЖЭТФ, 57, 2176, 1969.
16. В.И.Ритус сб. "Проблемы теоретической физики", Наука, Москва, 1972.
17. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко ДАН СССР 197, 66, 1971.
18. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ.Москва, 1963.
19. Н.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, Физматгиз, 1962.

20. D.Fradkin,R.Good.Nuovo Cimento 22,645,1961
21. M.Demeur.Acad.Roy.Belg.Classe Sci.Men.28,1643, 1953
22. B.Jankovici.Phys.Rev.187,2275,1969
23. R.G.Newton.Phys.Rev.D3,626,1971

Поступило 6 февраля 1974г.

Ответственный за выпуск С.Н.РОДИОНОВ
Подписано к печати 18.Ш.74 г. МН 08139
Усл. 2.0 печ. л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 5

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР