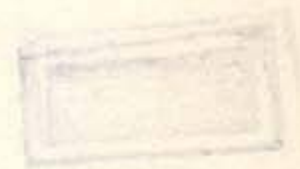


5.9.

1252

1860



**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

74
12712

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 51

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

**ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К КВАНТОВОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ:
ЭЛЕКТРОННЫЕ ПЕТЛИ**

коп

Новосибирск

1974

074
12712

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ВО
ВНЕШНЕМ ПОЛЕ: ЭЛЕКТРОННЫЕ ПЕТЛИ

А Н Н О Т А Ц И Я

Операторная диаграммная техника для рассмотрения процес-
сов в однородном (постоянном в пространстве и времени) внешнем
электромагнитном поле, развитая в работе авторов /1/, распро-
странена на случай петель заряженных частиц. Вклад петли с n -
фотонными линиями представлен в виде n -кратного интеграла от
выражения, не содержащего операторы. Получены явные представ-
ления вкладов в поляризационный оператор фотона скалярных и
спинорных частиц и проведен их анализ. Показано, что рождение
пар частиц полем весьма просто описывается в рамках данного
подхода.

обм

71252-74

ЦЕНТР СО-АН СССР
Гос. публ. научно-
техническая библиотека

СЕРИЯ
С ФОНДОМ

AN OPERATOR APPROACH TO QUANTUM ELECTRODYNAMICS IN
EXTERNAL FIELD II: ELECTRON LOOPS

V. N. BAIER, V. M. KATKOV, V. M. STRAKHOVENKO

a b s t r a c t

An operator diagrammatic technique for consideration of the phenomena in homogeneous in space and time external field which has been formulated in the author's paper /1/ is extended on case of the charged particle loops. The contribution of the loop with n external photon lines is represented by n -fold integral where integrand does not contain operators (see Eqs. (2.6)-(2.8), (2.26)-(2.28), (2.42), (2.43), (2.38), (2.33)). An explicit expression for the contribution of scalar (see Eqs. (3.12), (3.13) or (3.19), (3.16)-(3.18)) and spinor (see Eqs. (3.19), (3.33)-(3.35)) particles to the photon polarization operator has been obtained. An analysis of the properties of the photon mass κ_i (see Eq. (3.20)) shows, that the photon mass in the field \mathcal{A}_i is infinite in the branching point (3.23) what is a consequence of phase space properties in α -order. The creation of pair of the particles by the field may be described very simple in the frame of this approach starting from known Feynman expression for vacuum loop (4.1).

I. В в е д е н и е

В работе авторов /1/ (ниже цитируется как I) сформулирована операторная диаграммная техника для рассмотрения процессов в однородном внешнем электромагнитном поле ($F_{\mu\nu} = const$) и найден массовый оператор скалярной и спинорной частицы, т.е. рассмотрены диаграммы, где внешние линии представляют собой заряженные частицы. Ниже мы изучим другой класс диаграмм, внешние линии которых представляют собой фотоны. В разделе II приведено общее представление электронной петли с n фотонными концами, в разделе III получено явное выражение для вклада скалярных и спинорных частиц в поляризационный оператор фотона и проведено его обсуждение. В разделе IV дано описание рождения пар частиц полем (безфотонные электронные петли) в рамках данного подхода.

II. Электронные петли с n -фотонами

В работе I приведена операторная форма записи амплитуды рассеяния фотона на внешнем поле (электронная петля с двумя фотонными линиями), выражающаяся через поляризационный тензор $\Pi_{\mu\nu}(k_1, k_2)$, ((I.15) - (I.17)). Аналогично может быть выписано операторное выражение для тензора $\Pi_{\mu_1 \dots \mu_n}(k_1, \dots, k_n)$, через который выражаются амплитуды превращения одного числа фотонов в другое число фотонов (рис. I): $\Gamma = i(2\pi)^4 e^{i\mu_1} \dots e^{i\mu_n} \Pi_{\mu_1 \dots \mu_n}$. Эти амплитуды описывают такие процессы как расщепление фотона

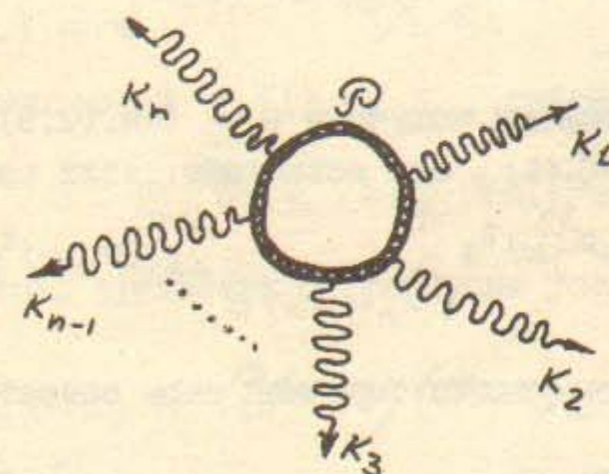


Рис. I.

на два фотона или слияние двух фотонов в один, рассеяние света на свете и т.д. Форма записи вклада диаграммы рис. I такая же, как для свободных частиц (к вкладу этой диаграммы необходимо добавить вклад диаграмм со всеми перестановками фотонных линий); для частиц со спином 1/2 имеем:

$$\Pi_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) = \frac{ie^n}{(2\pi)^4} \text{Sp} \langle 0 | \prod_{j=1}^n \frac{1}{(\hat{P} - \hat{e}_{j-1} + i\epsilon)} \gamma_{\mu_j} | 0 \rangle \quad (2.1)$$

где $\hat{P}_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$; $\hat{e}_j = \sum_{m=1}^j \kappa_m$, $\hat{e}_0 = \hat{e}_n = 0$. В рамках развиваемого подхода основная задача состоит в вычислении среднего по состояниям $x=0$: $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$, содержащего внутри совокупность некоммутирующих операторов \hat{P}_μ . Удобно провести параметризацию электронного пропагатора:

$$\frac{1}{\hat{P} - \hat{e}_{j-1} + i\epsilon} = -i(\hat{P} - \hat{e}_{j-1} + m) \int_0^\infty e^{is_j} [(P - e_{j-1})^2 + \frac{e}{2}\sigma F - m^2] ds_j \quad (2.2)$$

где $\sigma F \equiv \sigma^{\mu\nu} F_{\nu\mu}$. Для дальнейшего целесообразно последовательно пронести все экспоненциальные множители направо. При этом мы воспользуемся соотношениями:

$$\hat{P}_\mu(s) \equiv e^{i\hat{P}2s} \hat{P}_\mu e^{-i\hat{P}2s} = (e^{-2eFs} \hat{P}_\mu) \quad (2.3)$$

$$\gamma_\mu(s) \equiv e^{\frac{i}{2}e\sigma F s} \gamma_\mu e^{-\frac{i}{2}e\sigma F s} = (\gamma e^{2eFs})_\mu$$

$$\kappa_\mu(s) \equiv (e^{-2eFs} \kappa)_\mu$$

первые два из этих соотношений получены в I (см. (2.9), (3.4)), третье есть определение $\kappa_\mu(s)$, оно возникает, если рассмотреть выражение вида:

$$\hat{P}_\mu(s) - \kappa_\mu(s) = e^{i(P-\kappa)^2 s} (\hat{P}_\mu - \kappa_\mu) e^{-i(P-\kappa)^2 s} \quad (2.4)$$

где κ_μ - с-число. При коммутации типичной пары операторов имеем с учетом (2.3):

$$e^{i(\hat{P} - \hat{e}_{j-1})s_j} (\hat{P} - \hat{e}_j) = [\hat{P} - \hat{e}_{j-1} - \kappa_j^\mu \gamma_\mu(s_j)] e^{i(\hat{P} - \hat{e}_{j-1})s_j} \quad (2.5)$$

$$= [\hat{P} - \hat{e}_{j-1} - \kappa_j^\mu(-s_j) \gamma_\mu] e^{i(\hat{P} - \hat{e}_{j-1})s_j}$$

Подставляя представление (2.2) в формулу (2.1) и повторяя последовательно операцию (2.5) с учетом (2.3), найдём:

$$\Pi_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) = \frac{ie^n}{(2\pi)^4} (-i)^n \left(\prod_{\kappa=1}^n \int_0^\infty ds_\kappa \right) \text{Sp} \left\{ \langle 0 | \prod_{j=1}^n \left(\hat{P} - \hat{e}_{j-1} - \hat{h}_{j-1} \right) \gamma_{\mu_j}(t_j) \Theta | 0 \rangle e^{i(\frac{e}{2}\sigma F - m^2)t_n} \right\} \quad (2.6)$$

где $t_\kappa = \sum_{m=1}^\kappa s_m$, $\hat{h}_m = \sum_{\ell=1}^m \kappa_\ell^\mu \gamma_\mu(t_\ell) = \sum_{\ell=1}^m \kappa_\ell^\mu (-t_\ell) \gamma_\mu$,

$$\Theta = \prod_{j=1}^n e^{i(P - e_{j-1})^2 s_j} \quad (2.7)$$

В формуле (2.6) средние от операторов, которые нам предстоит вычислить, представляют собой совокупность выражений

$$N_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m}^{(h)} \equiv \langle 0 | \hat{P}_{\mu_1} \hat{P}_{\mu_2} \dots \hat{P}_{\mu_m} \Theta | 0 \rangle \quad (2.8)$$

и величину

$$N^{(h)} \equiv \langle 0 | \Theta | 0 \rangle \quad (2.9)$$

Рассмотрим оператор^{x)} координаты:

$$X(s) = \Theta X \Theta^{-1} \quad (2.10)$$

где $\Theta^{-1} = \prod_{j=1}^n e^{-i(P - e_{j-1})^2 s_j}$. При нахождении (2.10) необходимо вычислить величину

$$X(s_m) = e^{i(P - e_{m-1})^2 s_m} X e^{-i(P - e_{m-1})^2 s_m} \quad (2.11)$$

Продифференцировав (2.11) по s_m , найдём с учетом (2.3):

$$\frac{dX(s_m)}{ds_m} = -2 [P(s_m) - e_{m-1}(s_m)] = -2e^{-2s_m eF} (P - e_{m-1}) \quad (2.12)$$

Решение этого уравнения с граничным условием $X(0) = X$ имеет вид:

$$X(s_m) = U(s_m) (P - e_{m-1}) + X \quad (2.13)$$

где

$$U(s_m) = \frac{e^{-2eFs_m} - 1}{eF} \quad (2.14)$$

x) Мы используем матричную форму записи.

Последовательно пользуясь выражениями типа (2.13), можно вычислить $X(s)$ (2.10):

$$X(s) = \sum_{m=1}^n \mathcal{U}(s_m) \mathcal{P}(t_{m-1}) - \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{U}(s_m) \kappa_i (t_{m-1} - t_i) + X \quad (2.15)$$

Проведя преобразование этого выражения, найдём:

$$X(s) = \mathcal{U} \mathcal{P} - \mathcal{K} + X \quad (2.16)$$

где

$$\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}(t_n), \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(s) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{U}(t_n - t_i) \kappa_i \quad (2.17)$$

Рассмотрим теперь коммутатор

$$\langle 0 | [X_{\mu_2}, [X_{\mu_2}, \dots [X_{\mu_m}, \Theta] \dots]] | 0 \rangle = 0, \quad (2.18)$$

поскольку $X_{\mu_k} | 0 \rangle = 0$. Согласно определению (2.10) коммутатор

$$[X_{\mu}, \Theta] = (X_{\mu} - X_{\mu}(s)) \Theta = [-\mathcal{U} \mathcal{P} + \mathcal{K}] \Theta \quad (2.19)$$

Поскольку

$$[X_{\mu}, \mathcal{P}_{\nu}] = -i g_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

то все коммутаторы в (2.18) вычисляются непосредственно. При

$m=1$ имеем

$$\langle 0 | (-\mathcal{U} \mathcal{P} + \mathcal{K}) \Theta | 0 \rangle = 0 \quad (2.21)$$

при $m=2$ имеем

$$\langle 0 | [(-\mathcal{U} \mathcal{P} + \mathcal{K})_{\mu_2} (-\mathcal{U} \mathcal{P} + \mathcal{K})_{\mu_2} + i \mathcal{U}_{\mu_2 \mu_2}] \Theta | 0 \rangle = 0 \quad (2.22)$$

Продолжая эти операции, нетрудно убедиться, что для нечетных m имеет место

$$\langle 0 | \prod_{k=1}^{2\ell-1} (-\mathcal{U} \mathcal{P} + \mathcal{K})_{\mu_k} \Theta | 0 \rangle = 0 \quad (2.23)$$

а для четных m :

$$\langle 0 | \left[\prod_{k=1}^{2\ell} (-\mathcal{U} \mathcal{P} + \mathcal{K})_{\mu_k} - (-i)^{\ell} \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам} \\ i < j}} \prod_{\substack{\text{все} \\ \mu_i, \mu_j \text{ разные}}} \mathcal{U}_{\mu_i \mu_j} \right] \Theta | 0 \rangle = 0 \quad (2.24)$$

Последние два равенства можно преобразовать к форме:

$$\langle 0 | \prod_{k=1}^{2\ell-1} (-\mathcal{P} + \mathcal{Q})_{\mu_k} \Theta | 0 \rangle = 0 \quad (2.25)$$

$$\langle 0 | \left[\prod_{k=1}^{2\ell} (-\mathcal{P} + \mathcal{Q})_{\mu_k} - (-i)^{\ell} \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам} \\ i < j}} \prod_{\substack{\text{все} \\ \mu_i, \mu_j \text{ разные}}} \mathcal{U}_{\mu_i \mu_j}^{-1 T} \right] \Theta | 0 \rangle = 0$$

где вектор $Q = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{K}$. Отсюда следует, что средние $\langle 0 | \dots \Theta | 0 \rangle$, содержащие внутри операторы \mathcal{P}_{μ} , могут быть выражены через средние от оператора Θ . В частности для $\ell=1$ имеем

$$N_{\lambda}^{(n)} = \langle 0 | \mathcal{P}_{\lambda} \Theta | 0 \rangle = Q_{\lambda} \langle 0 | \Theta | 0 \rangle = Q_{\lambda} N^{(n)} \quad (2.26)$$

$$N_{\lambda_1 \lambda_2}^{(n)} = \langle 0 | \mathcal{P}_{\lambda_1} \mathcal{P}_{\lambda_2} \Theta | 0 \rangle = [Q_{\lambda_1} Q_{\lambda_2} - i \mathcal{U}_{\lambda_1 \lambda_2}^{-1 T}] N^{(n)}$$

Введем свертку двух операторов $\mathcal{P}_{\lambda_1}, \mathcal{P}_{\lambda_2}$:

$$\overline{\mathcal{P}_{\lambda_1} \mathcal{P}_{\lambda_2}} = -i \mathcal{U}_{\lambda_1 \lambda_2}^{-1 T} \quad (2.27)$$

Теперь можно сформулировать утверждение в известном смысле аналогичное теореме Вика: Среднее $N_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}^{(n)}$ (2.8) представляет собой сумму членов, в которых операторы \mathcal{P}_{λ} заменены на Q_{λ} со всеми возможными свертками (2.27):

$$N_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}^{(n)} = [Q_{\mu_1} Q_{\mu_2} \dots Q_{\mu_m} + \overline{\mathcal{P}_{\mu_1} \mathcal{P}_{\mu_2}} Q_{\mu_3} \dots Q_{\mu_m} + \dots] N^{(n)} \quad (2.28)$$

Для $m=1$ и $m=2$ теорема очевидна (см. (2.26)). Для произвольного m теорема без труда доказывается, исходя из формул (2.25) с применением математической индукции.

Результат (2.28) сводит вычисление выражений (2.8) к задаче нахождения $N^{(n)} = \langle 0 | \Theta | 0 \rangle$, к которой мы перейдем.

Введем величину $N^{(n)}(\alpha)$, в которой все $s_j \rightarrow \alpha s_j$ ($N^{(n)} \equiv N^{(n)}(1)$) и продифференцируем ее по α :

$$\frac{dN^{(n)}(\alpha)}{d\alpha} = i \langle 0 | \sum_{m=1}^n s_m (\tilde{\mathcal{P}}_m - e_{m-1})^2 \Theta(\alpha) | 0 \rangle, \quad (2.29)$$

где $\Theta(\alpha) = \prod_{j=1}^n e^{i\alpha s_j (\mathcal{P} - e_{j-1})^2}$, оператор

$$\tilde{\mathcal{P}}_m - e_{m-1} = \mathcal{P}(\alpha t_{m-1}) - \kappa_1(\alpha[t_{m-1} - t_1]) - \kappa_2(\alpha[t_{m-1} - t_2]) - \dots - \kappa_{m-1} \quad (2.30)$$

появился при пронесении экспоненциальных множителей направо, согласно соотношениям (2.3) - (2.5). С учетом этих же соотношений имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{P}}_m - e_{m-1})^2 &= \mathcal{P}^2 - 2\mathcal{P} \sum_{e=1}^{m-1} \kappa_e (-\alpha t_e) + \sum_{e=1}^{m-1} \kappa_e^2 + 2 \sum_{\rho > e} \kappa_{\rho} \kappa_e (\alpha[t_{\rho} - t_e]) \\ &= \mathcal{P}^2 - 2\mathcal{P} \mathcal{J}_m + M_m \end{aligned} \quad (2.31)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.29), получаем:

$$\frac{dN^{(n)}(\alpha)}{d\alpha} = i \langle 0 | (\mathcal{P}^2 t_n - 2\mathcal{P}J + M) \Theta(\alpha) | 0 \rangle \quad (2.32)$$

Здесь

$$J = \sum_{m=1}^n s_m J_m = \sum_{e=1}^{n-1} K e(-\alpha t_e)(t_n - t_e), \quad M = \sum_{m=1}^n s_m M_m \quad (2.33)$$

Входящие в правую часть члены с \mathcal{P}^2 и \mathcal{P} могут быть сведены с помощью формулы (2.26) к выражениям, не содержащим операторы перед $\Theta(\alpha)$:

$$\frac{dN^{(n)}(\alpha)}{d\alpha} = i \tilde{B}(\alpha) N^{(n)}(\alpha) \quad (2.34)$$

где

$$\tilde{B}(\alpha) = t_n Q^2(\alpha) - 2Q(\alpha)J + M - i t_n \text{Sp} [\mathcal{U}(\alpha t_n)] \quad (2.35)$$

Решая дифференциальное уравнение (2.34), имеем

$$N^{(n)}(\alpha) = C' \exp \left[i \int \tilde{B}(\alpha) d\alpha \right] \quad (2.36)$$

Интеграл от последнего члена (2.35) может быть взят в явном виде, тогда получим

$$N^{(n)}(\alpha) = \frac{C}{\left[\det \left(-\frac{\mathcal{U}(\alpha t_n)}{2} \right) \right]^{1/2}} \exp \left[i \int B(\alpha) d\alpha \right] \quad (2.37)$$

где

$$B(\alpha) = t_n Q^2(\alpha) - 2Q(\alpha)J + M \quad (2.38)$$

Константа C может быть найдена для предельного случая $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$. При $\alpha \rightarrow 0$ формула (2.37) даёт

$$N^{(n)}(\alpha) = \frac{C}{\alpha^{2n} t_n^2} \quad (2.39)$$

С другой стороны, при $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$ в формуле (2.9) (где $s_j \rightarrow \alpha s_j$) можно перейти к импульсному представлению и воспользоваться теоремой полноты:

$$\langle x | R(p) | x \rangle = \int d^4 p \langle x | R(p) | p \rangle \langle p | x \rangle = \int d^4 p R(p) \quad (2.40)$$

где R - произвольный оператор. Тогда формула (2.9) при $\alpha \rightarrow 0$ сведется к интегралу вида (2.31) работы I. В результате имеем

$$C = -i\pi^2 \quad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в (2.37) и полагая $\alpha = 1$, находим искомую величину $N^{(n)} = N^{(n)}(1)$. Фактор стоящий в (2.37) перед экспонентой, является универсальным и не зависит от числа внешних фотонных линий. Его явный вид может быть определен с помощью методики, изложенной в I (Приложение). Следует иметь в виду, что $\det[-\mathcal{U}(t)]$ имеет бесконечное число нулей, так что необходимо следить за правильным выбором ветвей предэкспоненциального фактора. Окончательный результат имеет вид

$$N^{(n)} = N^{(n)}(1) = -i\pi^2 \varphi(t_n) \exp \left[i \int_0^1 B(\alpha) d\alpha \right] \quad (2.42)$$

где $E, H = \sqrt{(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} \pm \mathcal{F}}$; \mathcal{F}, \mathcal{G} - полевые инварианты,

$$\varphi(t) = \frac{e^2 E H}{\sin(e H t) \text{sh}(e E t)} \quad (2.43)$$

Зная явный вид $N^{(n)}$ и подставляя его в формулу (2.28), найдём совокупность выражений $N_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{(n)}$, используя которую, получаем матричный элемент (2.6), представляющий собой n -кратный интеграл (по s_1, s_2, \dots, s_n) не содержащий операторов. С точки зрения γ -матричной структуры он (с учетом (2.3)) имеет вид:

$$\gamma^{\lambda_1} \dots \gamma^{\lambda_n} \exp \left[\frac{i}{2} e \mathcal{B} F t_n \right] \quad (2.44)$$

При вычислении следов от такого типа выражений удобно воспользоваться формулой (см. Приложение):

$$\gamma^{\mu} e^{\frac{i}{2} e \mathcal{B} F s} = i \gamma^5 \left[e^{e F s} \sin(e F s^*) \gamma^{\mu} \right] + \left[e^{e F s} \cos(e F s^*) \gamma^{\mu} \right] \quad (2.45)$$

где $F_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$, сводящей задачу к нахождению следов обычной совокупности γ -матриц.

Решение рассмотренной задачи в скалярной электродинамике проводится совершенно аналогично, поскольку и там задача сводится к рассмотрению выражений (2.8), (2.9).

Найденные формулы позволяют получить явный вид выражений для любого заданного n . Случай $n=2$ (поляризационный оператор) будет детально рассмотрен в следующем разделе. Поэтому мы рассмотрим здесь в качестве иллюстрации $N^{(3)}$ (2.42) для $n=3$ (расщепление фотона во внешнем поле). В этом случае

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha t_3)} \left[\mathcal{U}(\alpha[t_3-t_1])\kappa_1 + \mathcal{U}(\alpha[t_3-t_2])\kappa_2 \right] \quad (2.46)$$

$$J = (t_3-t_1)e^{2eF\alpha t_1}\kappa_1 + (t_3-t_2)e^{2eF\alpha t_2}\kappa_2$$

$$M = 2(t_3-t_2)\kappa_2 e^{-2eF\alpha(t_2-t_1)}\kappa_1 + (t_3-t_1)\kappa_1^2 + (t_3-t_2)\kappa_2^2$$

Входящие сюда матричные выражения могут быть раскрыты с помощью техники, изложенной в Приложении работы I, в результате чего находим явный вид $B(\alpha)$ (2.38). После этого интересующий нас интеграл по α берется непосредственно^{x)}:

$$\int_0^1 B(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2eE \operatorname{sh}(eEt_3)} \left\{ (\kappa_2 C^2 \kappa_2) [\operatorname{ch}(eEt_3) - \operatorname{ch}(eE(t_3-2t_1))] + \right.$$

$$\left. + (\kappa_1 C^2 \kappa_1) [\operatorname{ch}(eEt_3) - \operatorname{ch}(eE(t_3-2t_2))] + (\kappa_1 C^2 \kappa_2) [\operatorname{ch}(eEt_3) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{ch}(eE(2t_2-2t_1-t_3)) - \operatorname{ch}(eE(t_3-2t_2)) - \operatorname{ch}(eE(t_3-2t_1))] \right\}$$

$$+ (\kappa_1 C \kappa_2) [\operatorname{sh}(eEt_3) + \operatorname{sh}(eE(2t_2-2t_1-t_3)) + \operatorname{sh}(eE(t_3-2t_2)) - \operatorname{sh}(eE(t_3-2t_1))]$$

{ члены, в которых $E \rightarrow iH$, $C \rightarrow -iB$ }.

Полученное выражение для фазы в (2.42) согласуется с найденным в частных случаях Адлером /2/ для $E=0$, $\kappa_1^2 = \kappa_2^2 = \kappa_3^2 = 0$ и Папаняном и Ритусом /3/ для $F = \Phi = 0$.

III. Поляризационный оператор

Если $n=2$, то величина $\Pi_{\mu\nu}$ представляет собой поляризационный оператор. В этом случае

$$Q(\alpha) = \frac{\mathcal{U}(\alpha[t_2-t_1])}{\mathcal{U}(\alpha t_2)} \kappa, \quad J = (t_2-t_1)e^{2eF\alpha t_1} \kappa, \quad M = (t_2-t_1)\kappa^2 \quad (3.1)$$

где $\kappa \equiv \kappa_2$. Подставляя эти выражения в (2.38), (2.42), получим:

$$N^{(2)} = -i\pi^2 \varphi(s) e^{i(\Psi + m^2 s)} \quad (3.2)$$

где $\varphi(s)$ дается формулой (2.43);

x) Здесь и ниже используются тензоры B, C , введенные в I (см. (п.3)), (п.8)).

$$\Psi = \frac{1}{2} \left[\frac{\kappa B^2 \kappa}{eH} \zeta_2 + \frac{\kappa C^2 \kappa}{eE} \zeta_1 \right] - sm^2; \quad (3.3)$$

$$\zeta_1 = \frac{\operatorname{ch}(eEs) - \operatorname{ch}(eEs\sigma)}{\operatorname{sh}(eEs)}, \quad \zeta_2 = \frac{\cos(eHs) - \cos(eHs\sigma)}{\sin(eHs)}$$

Здесь мы перешли к переменным

$$s \equiv t_2 = s_1 + s_2, \quad \sigma \equiv \frac{2t_1 - t_2}{t_2} = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} \quad (3.4)$$

Зная $N^{(2)}$, находим согласно (2.26) $N_{\mu_1}^{(2)}$, $N_{\mu_1 \mu_2}^{(2)}$, где $Q_\mu \equiv Q_\mu(z)$. Приведенные выражения могут быть использованы, как для описания электронных петель, так и для петель скалярных частиц.

Вычислим вклад скалярных частиц в поляризационный оператор фотона. При этом необходимо рассмотреть две диаграммы (рис. 2 I). Вклад первой из них представим в форме:

$$\Pi_{\mu_1 \mu_2}^{(a)} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 \langle 0 | (2\mathcal{P}_{\mu_1 - \kappa_{\mu_1}}) (2e^{-2eF s_1} \mathcal{P}_{\mu_2 - \kappa_{\mu_2}}) \times e^{is_1 \mathcal{P}^2} e^{is_2 (\mathcal{P} - \kappa)^2} | 0 \rangle e^{-i(s_1 + s_2)m^2} \quad (3.5)$$

где проведена параметризация типа (2.2) и использованы соотношения (2.3). Для нахождения явного вида $\Pi_{\mu_1 \mu_2}^{(a)}$ нужно использовать приведенные выше выражения для $N^{(2)}$, $N_{\mu}^{(2)}$, $N_{\mu\nu}^{(2)}$. После этого вычисление сводится к проведению ряда алгебраических операций. В результате найдём

$$\Pi_{\mu\nu}^{(a)} = \frac{\alpha}{8\pi} \int_{-1}^1 d\sigma \int_0^\infty s ds \varphi(s) \left[(\mathcal{P}\kappa)_\mu (\mathcal{P}\kappa)_\nu - (\lambda\kappa)_\mu (\lambda\kappa)_\nu + \frac{2i}{s} \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial \sigma} \right] e^{i\Psi} \quad (3.6)$$

где мы перешли к переменным s, σ (3.4); Ψ дается формулой (3.3), введены тензоры

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}^2 \zeta_3 - B_{\mu\nu}^2 \zeta_4, \quad \lambda_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} \zeta_2 - B_{\mu\nu} \zeta_1; \quad (3.7)$$

$$\zeta_3 = \frac{\operatorname{sh}(eEs\sigma)}{\operatorname{sh}(eEs)}, \quad \zeta_4 = \frac{\operatorname{sh}(eHs\sigma)}{\sin(eHs)}$$

Проинтегрировав последний член по частям по ψ , получим:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(a)} = \frac{\alpha}{8\pi} \int_{-1}^{+1} d\psi \int_0^{\infty} s ds \varphi(s) [(\varrho\kappa)_{\mu}(\varrho\kappa)_{\nu} - (\lambda\kappa)_{\mu}(\lambda\kappa)_{\nu} - \delta_{\mu\nu}(\kappa\varrho\kappa)] e^{i\psi} + \frac{i\alpha}{2\pi} g_{\mu\nu} \int_0^{\infty} ds \varphi(s) e^{-im^2s} \quad (3.8)$$

Вклад другой диаграммы $\Pi_{\mu\nu}^{(b)}$ (I.17)I представляет собой среднее от пропагатора. При вычислении его можно воспользоваться формулой (3.2) при $\psi=1$ (или при $\kappa \rightarrow 0$):

$$\Pi_{\mu\nu}^{(b)} = -\frac{i\alpha}{2\pi} g_{\mu\nu} \int_0^{\infty} ds \varphi(s) e^{-im^2s} \quad (3.9)$$

Сумма (3.8) и (3.9)

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)} = \Pi_{\mu\nu}^{(a)} + \Pi_{\mu\nu}^{(b)} \quad (3.10)$$

даёт полный вклад скалярных частиц в поляризационный оператор фотона. В этой сумме члены, содержащие $ig^{\mu\nu}$, взаимно сокращаются, после чего остается калибровочно инвариантное выражение (первый член в (3.8)). Поляризационный оператор $\Pi_{\mu\nu}^{(0)}$ должен быть перенормирован. Для этого представим его в виде:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)} = [\Pi_{\mu\nu}^{(0)} - \Pi_{\mu\nu}^{(0)}(F=0)] + \Pi_{\mu\nu}^{(0)}(F=0) \quad (3.11)$$

Первый член исчезает при поле $F=0$, а второй член (не зависящий от поля) должен быть стандартным образом перенормирован. В результате имеем окончательное выражение для перенормированного поляризационного оператора:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)R} = \frac{\alpha}{8\pi} \int_{-1}^{+1} d\psi \int_0^{\infty} s ds \varphi(s) [(\varrho\kappa)_{\mu}(\varrho\kappa)_{\nu} - (\lambda\kappa)_{\mu}(\lambda\kappa)_{\nu} - \delta_{\mu\nu}(\kappa\varrho\kappa)] e^{i\psi} + (g_{\mu\nu}\kappa^2 - \kappa_{\mu}\kappa_{\nu}) \Omega^{(0)} \quad (3.12)$$

где

$$\Omega^{(0)} = \frac{\alpha}{8\pi} \int_{-1}^{+1} d\psi \zeta^{(0)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-is[m^2 - \frac{(1-\psi^2)\kappa^2}{4}]} + \ln \left[1 - \frac{\kappa^2(1-\psi^2)}{4m^2} \right] \right\} \quad (3.13)$$

$$\zeta^{(0)} = \psi^2$$

Полученное выражение (3.12) позволяет провести анализ целого ряда вопросов. Мнимая часть поляризационного оператора определяет вероятность рождения пары скалярных частиц фотоном определенной поляризации:

$$W^{(0)} = \frac{e^{\mu} e^{\nu} \text{Im} \Pi_{\mu\nu}^{(0)}(k)}{\kappa_0} \quad (3.14)$$

где κ_0 - частота фотона.

Подставляя $\Pi_{\mu\nu}^{(0)R}$ (3.12) в уравнение Дайсона $(\kappa^2 - \Pi)\mathcal{D} = I$, найдем пропагатор фотона во внешнем поле. При этом собственные значения $\chi_i^{(0)}$, соответствующие собственным векторам $\vartheta_{i\mu}^{(0)}$ тензора (3.12), играют роль квадрата массы фотона в поле:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)R} \vartheta_{i\mu}^{(0)\nu} = \chi_i^{(0)} \vartheta_{i\mu}^{(0)} \quad (i=1,2,3,4) \quad (3.15)$$

Решая это уравнение^{x)}, получим 4 взаимно ортогональных вектора $\vartheta_{i\mu}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \vartheta_{(1)\mu}^{(0)} &= (C^2\kappa)_{\mu}(\kappa B^2\kappa) - (B^2\kappa)_{\mu}(\kappa C^2\kappa); \quad \vartheta_{(4)\mu}^{(0)} = \kappa_{\mu}; \\ \vartheta_{(2)\mu}^{(0)} &= (B\kappa)_{\mu} + \frac{2(\kappa B^2\kappa)\Omega_2^{(0)}}{\Lambda^{(0)}}(C\kappa)_{\mu}; \quad \vartheta_{(3)\mu}^{(0)} = (C\kappa)_{\mu} - \frac{2(\kappa C^2\kappa)(B\kappa)_{\mu}\Omega_4^{(0)}}{\Lambda^{(0)}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для собственных значений $\chi_i^{(0)}$ имеем:

$$\chi_1^{(0)} = (\Omega^{(0)} + \Omega_2^{(0)})\kappa^2; \quad \chi_4^{(0)} = 0; \quad (3.17)$$

$$\chi_2^{(0)} = \chi_1^{(0)} - \Lambda_2^{(0)} - \frac{\Lambda_2^{(0)}}{2\Lambda^{(0)}}; \quad \chi_3^{(0)} = \chi_1^{(0)} + \Lambda_3^{(0)} + \frac{\Lambda_4^{(0)}}{2\Lambda^{(0)}}$$

В формулах (3.16), (3.17) введены обозначения

$$\Lambda_2^{(0)} = (\kappa B^2\kappa)\Omega_2^{(0)}, \quad \Lambda_3^{(0)} = (\kappa C^2\kappa)\Omega_3^{(0)}, \quad \Lambda_4^{(0)} = 4(\kappa C\kappa)(\kappa B\kappa) \frac{[\Omega_4^{(0)}]^2}{\Lambda^{(0)}} \quad (3.18)$$

$$\Lambda^{(0)} = \Lambda_2^{(0)} + \Lambda_3^{(0)} + \sqrt{(\Lambda_3^{(0)} + \Lambda_2^{(0)})^2 + \Lambda_4^{(0)}};$$

$$\Omega_i^{(0)} = -\frac{\alpha}{8\pi} \int_{-1}^{+1} d\psi \int_0^{\infty} s ds \varphi(s) e^{i\psi} \omega_i^{(0)},$$

$\omega_1^{(0)} = \zeta_3\zeta_4$, $\omega_2^{(0)} = \zeta_4^2 - \zeta_3\zeta_4 + \zeta_2^2$, $\omega_3^{(0)} = \zeta_3^2 - \zeta_3\zeta_4 - \zeta_1^2$, $\omega_4^{(0)} = -\zeta_1\zeta_2$ где использованы величины ζ_{κ} , введенные в (3.3), (3.7) и (3.13).

Полученные выражения позволяют представить поляризационный оператор в диагональной форме:

x) Удобно воспользоваться разложением ϑ_{μ} по четырем взаимно ортогональным векторам $(C^2\kappa)_{\mu}$, $(B^2\kappa)_{\mu}$, $(C\kappa)_{\mu}$, $(B\kappa)_{\mu}$.

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)R} = \sum_{(i)} \frac{v_{(i)\mu}^{(0)} v_{(i)\nu}^{(0)}}{v_i^{(0)2}} u_i^{(0)} \quad (3.19)$$

удобной для применений. Используя представление (3.19), можно записать функцию Грина фотона в поле в виде

$$D_{\mu\nu} = \sum_i \frac{v_{(i)\mu}^{(0)} v_{(i)\nu}^{(0)}}{v_i^{(0)2}} \frac{1}{k^2 - \chi_i^{(0)}} \quad (3.20)$$

так что свойства функций $u_i^{(0)}$ задают характер распространения электромагнитных волн^{х)} (с определенной поляризацией) во внешнем поле.

Аналитические свойства функций $u_i^{(0)}$ определяются спецификой взаимодействия фотона с заряженными частицами в поле и существенно отличаются от свойств таких же функций в вакууме. В частности, они отображают спектр состояний скалярной частицы в поле. Проиллюстрируем последнее обстоятельство на примере функций $u_2^{(0)}$ в чисто магнитном поле ($E=0$):

$$u_2^{(0)} = \Omega^{(0)} k^2 + \frac{\alpha}{2\pi} m^2 \int_{-1}^1 d\sigma \int_0^\infty \frac{dx}{\sin x} \left\{ -2\sigma \frac{\sin \sigma x}{\sin x} + \right. \quad (3.21)$$

$$\left. + q \left[\left(\frac{\sin \sigma x}{\sin x} \right)^2 + \left(\frac{\cos x - \cos \sigma x}{\sin x} \right)^2 \right] \right\} e^{i\psi_H}$$

здесь

$$\psi_H = \frac{1}{\mu} \left[2q \left(\frac{\cos x - \cos \sigma x}{\sin x} \right) - x [1 - 2(1 - \sigma^2)] \right]; \quad (3.22)$$

$$x = |e| H s, \quad \mu = \frac{H}{H_0}, \quad H_0 = \frac{m^2}{e};$$

$$z = \frac{\kappa c^2 \kappa}{4m^2} = \frac{\kappa_0^2 - \kappa_z^2}{4m^2}, \quad q = \frac{\kappa B^2 \kappa}{4m^2} = \frac{\kappa_1^2}{4m^2}$$

(поле H направлено по оси z , $\kappa_1^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$).

Мы покажем, что функция $u_2^{(0)}$ имеет особенности в точках

$$z = \left(\frac{\mathcal{E}^{(0)}(\ell) + \mathcal{E}^{(0)}(\ell')}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[1 + (\ell + \ell' + 1)\mu + \sqrt{1 + 2(\ell + \ell' + 1)\mu + (\ell + \ell' + 1)^2 \mu^2} \right] \quad (3.23)$$

х) Для случая частиц со спином $1/2$ этот вопрос обсуждался Шабалом /4/.

где $\mathcal{E}^{(0)}(\ell) = \sqrt{1 + (2\ell + 1)\mu}$, $\ell, \ell' = 0, 1, 2, \dots$, отвечающих квантованному характеру поперечного движения скалярных частиц в поле. При рассмотрении этого вопроса можно опустить члены в $u_2^{(0)}$, не зависящие от поля, и иметь в виду, что особенности даёт область больших значений переменной x . Мы ограничимся вычислением члена:

$$\frac{\alpha}{2\pi} m^2 \int_{-1}^1 d\sigma \int_{x_0}^\infty \frac{dx}{\sin x} \exp \left\{ i \left[u (\cos x - \cos \sigma x) - \frac{x}{\mu} [1 - 2(1 - \sigma^2)] \right] \right\} \quad (3.24)$$

где $u = \frac{2q}{\mu \sin x}$. Расчет остальных членов (впрочем как и других функций $u_i^{(0)}$) производится аналогично. Воспользуемся разложением (/5/, стр. 987)

$$e^{-i u \cos \sigma x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(u) e^{i n \sigma x} \quad (3.25)$$

где $J_n(u)$ — функция Бесселя, и возьмем интеграл по σ , сохраняя старшие члены разложения по $1/x$:

$$\int_{-1}^1 d\sigma e^{i x (n \sigma - \frac{z}{\mu} \sigma^2)} \simeq e^{-i \pi/4} \sqrt{\frac{\pi \mu}{2x}} e^{i \frac{n^2 \mu x}{4z}} \quad (3.26)$$

Формула (3.26) справедлива, когда $|\frac{n\mu}{2z}| \ll 1$. Подставляя (3.26) в (3.24), имеем:

$$\frac{\alpha}{2\pi} m^2 e^{-i \pi/4} \sqrt{\frac{\pi \mu}{2}} q \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-i)^n (-1)^{\ell(n+\ell)}}{\sqrt{\ell \mu}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} J_n(u) \times$$

$$\times \exp \left\{ i \left[(\ell \mu + x) \left[\frac{n^2 \mu}{4z} - \frac{1-z}{\mu} \right] + i u \cos x \right] \right\} \quad (3.27)$$

где мы учли, что $x_0 \gg 1$ ($\ell_0 \gg 1$), разбили интеграл на сумму интегралов и сделали замену переменной: $x \rightarrow x + \ell \pi$. В точках

$$\frac{n^2 \mu}{4z} - \frac{1-z}{\mu} = m \quad (m - \text{целое число}) \quad (3.28)$$

сумма по ℓ в (3.27) расходится, если $n+m$ есть нечетное число. Равенство (3.28) выполняется в точках, где

$$z = z_{mn} = \frac{1}{2} \left[1 + m\mu + \sqrt{(1 + m\mu)^2 - (n\mu)^2} \right] \quad (3.29)$$

В окрестностях этих точек $z = z_{mn} + \delta^2$ можно провести в (3.27) суммирование по ℓ , удерживая старшие члены:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(n+1)}}{\sqrt{l}} e^{i\sqrt{l}\sigma \left[\frac{n^2\mu}{4} - \frac{l-2}{\mu} \right]} = \frac{1}{\sqrt{l}} \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\delta \left[1 - \left(\frac{n\mu}{2\epsilon_{mn}} \right)^2 \right]}} e^{i\frac{\sigma}{4} \text{sign} \delta} \quad (3.30)$$

Подставляя это разложение в (3.27), получим

$$\frac{\alpha |e|Hq}{2\pi} e^{-\frac{i\sigma}{2} \theta(-\delta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\sqrt{\delta \left[(1+m\mu)^2 - (n\mu)^2 \right]^{1/2}}} \int_{-5/2}^{5/2} \frac{dx}{\sin x} J_n(u) e^{i(mx+u \cos x)} \quad (3.31)$$

Действуя аналогично, найдем выражение для всей величины $\chi_2^{(0)}$. В случае $n=0, m=1$ имеем

$$\chi_2^{(0)} = - \frac{i\alpha |e|H k_1^2 e^{-\frac{k_1^2}{2|e|H}}}{4m^2(1+\mu) \sqrt{\frac{k_0^2 - k_3^2}{4m^2(1+\mu)} - 1}} \quad (3.32)$$

Нетрудно видеть, что условие (3.29) совпадает с условием (3.23) (если положить $m=l+l'+1, n=l-l'$) благодаря тому, что m, n имеют противоположную четность. Итак мы показали, что в точках (3.23): $k_0^2 = k_3^2 + m^2 (\mathcal{E}^2(l) + \mathcal{E}^2(l'))^2$ функция $\chi_2^{(0)}$ имеет корневую особенность. То что эта особенность не полюс, а точка ветвления связано с тем, что движение вдоль поля не квантуется. Появление корневой особенности можно понять из анализа мнимой части $\chi_2^{(0)}$, которая согласно формуле (3.14) связана с вероятностью рождения пары частиц фотоном данной поляризации. Как известно, (см. /6/ для спинорных частиц) эта вероятность имеет корневую особенность в точках (3.23), происхождение которой обусловлено свойствами фазового объема в данном порядке теории возмущений (бесконечно узкие уровни^{x)}).

Вклад спинорных частиц в поляризационный оператор фотона может быть получен из общих формул^{xx)} раздела II, куда следует подставить явный вид входящих величин (3.1)-(3.4). Рассмотрение совершенно аналогично проведенному выше для скалярных частиц (новая алгебраическая деталь - вычисление следов γ -матриц вы-
x) При учете конечности ширины уровней расходимость в этих точках должна исчезнуть.

xx) Эта задача рассматривалась Баталиным и Шабаром /7/, которые использовали явный вид функции Грина электрона в поле, найденный Швингером /8/.

полняется без труда с помощью формул (2.3), (2.45); см. Приложение). Окончательно результат может быть представлен в форме (3.19), где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(2)\mu}^{(1/2)} &= \mathcal{E}_{(2)\mu}^{(0)}, \quad \mathcal{E}_{(4)\mu}^{(1/2)} = \mathcal{E}_{(4)\mu}^{(0)}, \\ \mathcal{E}_{2\mu}^{(1/2)} &= (B\kappa)_\mu + \frac{2\Omega_4^{(1/2)}(\kappa B^2\kappa)}{\Lambda^{(1/2)}} (\kappa)_\mu, \quad \mathcal{E}_{3\mu}^{(1/2)} = (C\kappa)_\mu - \frac{2\Omega_4^{(1/2)}(\kappa C^2\kappa)}{\Lambda^{(1/2)}} (B\kappa)_\mu; \\ \chi_1^{(1/2)} &= (\Omega^{(1/2)} + \Omega_2^{(1/2)}) \kappa^2, \quad \chi_4^{(1/2)} = 0, \\ \chi_2^{(1/2)} &= \chi_2^{(0)} - \Lambda_2^{(1/2)} - \frac{\Lambda_1^{(1/2)}}{2\Lambda^{(1/2)}}, \quad \chi_3^{(1/2)} = \chi_3^{(0)} + \Lambda_3^{(1/2)} + \frac{\Lambda_1^{(1/2)}}{2\Lambda^{(1/2)}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{(1/2)} &= 4(\Omega_4^{(1/2)})^2 (\kappa B^2\kappa)(\kappa C^2\kappa), \\ \Lambda_2^{(1/2)} &= \Omega_2^{(1/2)}(\kappa B^2\kappa), \quad \Lambda_3^{(1/2)} = \Omega_3^{(1/2)}(\kappa C^2\kappa), \\ \Lambda^{(1/2)} &= \Lambda_2^{(1/2)} + \Lambda_3^{(1/2)} + \sqrt{(\Lambda_2^{(1/2)} + \Lambda_3^{(1/2)})^2 + \Lambda_1^{(1/2)}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Функция $\Omega^{(1/2)}$ дается формулой (3.13), где надо заменить $\mathcal{E}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}^{(1/2)} = 2(1-\sigma^2)$; функции $\Omega_\kappa^{(1/2)}$ даются формулой (3.18), в которую нужно подставить следующие величины;

$$\begin{aligned} \omega_1^{(1/2)} &= 2[\cos(eHs\sigma) \text{ch}(eEs\sigma) - \text{ch}(eHs) \text{th}(eEs) \sin(eHs\sigma) \text{sh}(eEs\sigma)], \\ \omega_2^{(1/2)} &= -4 \text{ch}(eEs) \frac{\cos(eHs) - \cos(eHs\sigma)}{\sin^2(eHs)} - \omega_1^{(1/2)}, \\ \omega_3^{(1/2)} &= 4 \cos(eHs) \frac{\text{ch}(eEs) - \text{ch}(eEs\sigma)}{\text{sh}^2(eEs)} - \omega_1^{(1/2)}, \\ \omega_4^{(1/2)} &= 2 \left\{ \frac{[\cos(eHs) \cos(eHs\sigma) - 1][\text{ch}(eEs) \text{ch}(eEs\sigma) - 1]}{\sin(eHs) \text{sh}(eEs)} + \right. \\ &\quad \left. + \text{sh}(eEs\sigma) \sin(eHs\sigma) \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Этот результат совпадает с /7/, но форма записи здесь иная. Функции $\chi_{(i)}^{(1/2)}$ (в чисто магнитном поле $E=0$) также имеют корневые особенности, обусловленные свойствами фазового объема в точках (3.29). Изучение этих особенностей совершенно аналогично проведенному выше. Единственное отличие состоит в том, что $n+m$ — четное. В расчете это отличие возникает потому, что при замене интеграла по x на сумму интегралов (ср. (3.27) вместо фактора $(-1)^{n+1}$ возникает $(-1)^{en}$. Связано же оно с тем, что в условии (ср. (3.23))

$$\tau = \left(\frac{\varepsilon^{(1/2)}(\ell) + \varepsilon^{(1/2)}(\ell')}{2} \right)^2 \quad (3.36)$$

входит $\varepsilon^{(1/2)} = \sqrt{1 + 2\ell\mu}$. Приведем в качестве примера функцию $\chi_3^{(1/2)}$ (вблизи τ_{mn}):

$$\chi_3^{(1/2)} = \frac{\alpha}{\beta} |\alpha| H e^{-\frac{i\beta}{2}\theta(-\delta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\sqrt{\delta^2[(1+m\mu)^2 - (n\mu)^2]^{1/2}}} \times \quad (3.27)$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} \left\{ \frac{i\alpha}{2} [\mathcal{J}_{n-1}(u) - \mathcal{J}_{n+1}(u)] - \tau \cos x \mathcal{J}_n(u) \right\} e^{i(mx + u \cos x)}$$

В частном случае $n = m = 0$ ($\tau_{mn} = 1$) имеем (для $\delta > 0$)

$$\chi_3^{(1/2)} = - \frac{2\alpha |\alpha| H m e^{-\frac{i\beta}{2}\theta(-\delta)}}{\sqrt{k_0^2 - k_3^2 - 4m^2}} \quad (3.38)$$

что, с учетом (3.14), согласуется с результатом Клепикова /6/.

Отметим в заключение, что переход к частному случаю скрещенного поля $E \rightarrow 0, H \rightarrow 0$ (квазиклассическому приближению) был детально продемонстрирован в I на примере массового оператора скалярной частицы. Аналогично проводится переход и для поляризованного оператора, а результаты совпадают с известными (см. напр. /9/).

IV. Вакуумные петли

До сих пор рассматривались электронные петли с $n \neq 0$, связанные с процессами, когда в начальном и конечном состояниях есть реальные фотоны. Имеется, однако, класс диаграмм с $n = 0$, определяющих амплитуду перехода вакуума в вакуум, т.е. связанных с

самим определением вакуума. При наличии внешнего поля такие диаграммы описывают процессы, которые являются, в принципе, наблюдаемыми, например, рождение пар внешним электрическим полем. Поэтому представляется целесообразным обсудить этот круг вопросов с рамках развиваемого подхода^{x)}.

Рассмотрим для определенности вакуумные электронные петли (петли скалярных частиц рассчитываются совершенно аналогично). Пусть $L^{(n)}$ амплитуда, описывающая замкнутую петлю свободных частиц, взаимодействующих с внешним полем n -раз. Явный вид её в координатном представлении обсуждал еще Фейнман /10/:

$$L^{(n)} = \frac{i e^n}{n(2\pi)^4} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \text{Sp} [\mathcal{G}_0(x_1, x_2) \hat{A}^F(x_2) \dots \mathcal{G}_0(x_{n-1}, x_n) \hat{A}^F(x_n) \mathcal{G}_0(x_n, x_1) \hat{A}^F(x_1)] \quad (4.1)$$

Удобно использовать следующее представление \mathcal{G}_0 : $\mathcal{G}_0(x_i, x_j) = \langle x_i | \frac{1}{\hat{p} - m} | x_j \rangle, \hat{p}_\mu = i\partial_\mu$ (ср. (I.12) работы I). Используя самосопряженность оператора и полноту системы состояний $|x_i\rangle$, имеем $L^{(n)}$ в форме, удобной для анализа:

$$L^{(n)} = \frac{i}{n(2\pi)^4} \int d^4x \text{Sp} \langle x | \left(\frac{1}{\hat{p} - m + i\epsilon} e^{\hat{A}^F} \right)^n | x \rangle \quad (4.2)$$

Вклад электронной петли с любым числом взаимодействий с внешним полем $L = \sum_n L^{(n)}$ содержит сумму:

$$\sum_n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\hat{p} - m + i\epsilon} e^{\hat{A}^F} \right)^n = - \ln \left(1 - \frac{1}{\hat{p} - m + i\epsilon} e^{\hat{A}^F} \right) = - \ln \left[\frac{1}{\hat{p} - m} (\hat{p} - m) \right] \quad (4.3)$$

Логарифм последнего операторного выражения удобно представить в виде интеграла Фруллани:

$$\ln \left(\frac{\hat{p} - m}{\hat{p} - m} \right) = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left[e^{i(\hat{p} - m + i\epsilon)s} - e^{i(\hat{p} - m + i\epsilon)s} \right] \quad (4.4)$$

x) Другая трактовка содержится в /8/.

Последний член выражения в правой части отвечает вычитанию в точке $F=0$. Мы пока его не будем выписывать, а учтем в окончательном выражении. Итак, задача свелась к нахождению величины

$$L = \int d^4x \mathcal{L} \quad (4.5)$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{i}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \langle 0 | e^{i(\hat{p}-m+i\epsilon)s} | 0 \rangle \quad (4.6)$$

Здесь использована трансляционная инвариантность в однородном поле (ср. (I.I5) I). Если учитывать вклад двух, трех и т.д. электронных петель, то полная амплитуда перехода вакуума в вакуум есть $e^{iL}/10$.

Факт обращения в нуль следа нечетного числа γ -матриц позволяет провести преобразование

$$\text{Sp} \left[\ln \left(\frac{\hat{p}-m}{p-m} \right) \right] \rightarrow \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\ln \left(\frac{\hat{p}^2-m^2}{p^2-m^2} \right) \right] \quad (4.7)$$

что даёт более удобное для вычисления представление

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2(2\pi)^4} \text{Sp} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \langle 0 | e^{i(\hat{p}^2-m^2)s} | 0 \rangle \quad (4.8)$$

Входящее в выражение (4.8) среднее было вычислено выше (2.42), где надо положить $\kappa_i=0$, $t_n=s$; тогда $B(\alpha)=0$, т.е.

$$\text{Sp} \langle 0 | e^{i\hat{p}^2 s} | 0 \rangle = \langle 0 | e^{i p^2 s} | 0 \rangle \text{Sp} (e^{\frac{i}{2} e^2 F s}) = \quad (4.9)$$

$$= -4i\pi^2 \mathcal{P}(s) \cos(eHs) \text{ch}(eEs) =$$

$$= -4i\pi^2 e^2 EH \text{ctg}(eHs) \text{cth}(eEs)$$

При подстановке (4.9) в (4.8) следует провести вычитание первых двух членов разложения выражения (4.9) при $E, H \rightarrow 0$:

$$- \frac{4i\pi^2}{s^2} \left[1 + \frac{e^2 s^2}{3} (E^2 - H^2) \right] \quad (4.10)$$

Первый из них отвечает вычитательному члену при $F \rightarrow 0$ в (4.4). Второй возникает при проведении перенормировки заряда (и связанном с ней изменением масштаба полей)/8/. В итоге имеем:

$$\mathcal{L}^{(1/2)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-is(m^2-i\epsilon)} \left[s^2 e^2 EH \text{ctg}(eHs) \text{cth}(eEs) - 1 - \frac{s^2 e^2}{3} (E^2 - H^2) \right] \quad (4.11)$$

Аналогичное рассмотрение для частиц со спином 0 даёт

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-is(m^2-i\epsilon)} \left[\frac{s^2 e^2 EH}{\sin(eHs) \text{sh}(eEs)} - 1 + \frac{s^2 e^2}{6} (E^2 - H^2) \right] \quad (4.12)$$

Функции $\mathcal{L}^{(0)}$, $\mathcal{L}^{(1/2)}$ являются эффективными лагранжианами (поправками к лагранжиану электромагнитного поля, за счет поляризации вакуума). Результат (4.11) был получен Гейзенбергом и Эйлером /11/ с помощью иного подхода, и Швингером /8/, который вычислил также (4.12), из другой исходной формулировки. В соответствии со смыслом функции \mathcal{L} вероятность рождения пары в единице 4-объема есть $2 \text{Im} \mathcal{L}$.

Последняя величина без труда вычисляется, если в (4.11), (4.12) повернуть контур интегрирования на $-\pi/2$ и взять интеграл с помощью теории вычетов:

$$W^{(1/2)} \equiv 2 \text{Im} \mathcal{L}^{(1/2)} = \frac{e^2 EH}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{th} \left(\frac{n\pi H}{E} \right) e^{-\frac{m^2 n\pi}{eE}} \quad (4.13)$$

и

$$W^{(0)} \equiv 2 \text{Im} \mathcal{L}^{(0)} = \frac{e^2 EH}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{1}{\text{sh} \left(\frac{n\pi H}{E} \right)} e^{-\frac{m^2 n\pi}{eE}} \quad (4.14)$$

Авторы признательны В.С.Фадину за полезные дискуссии.

Выведем формулу (2.45). Для этого перепишем её левую часть в виде

$$\gamma^\mu e^{\frac{i}{2}e\sigma F s} = (e^{eFs})^\mu{}_\nu m^\nu(s) \quad (\text{П.1})$$

где

$$m^\nu(s) \equiv e^{\frac{i}{4}e\sigma F s} \gamma^\nu e^{\frac{i}{4}e\sigma F s}$$

здесь мы воспользовались соотношением (2.3). Дифференцируя $m^\nu(s)$ по s , получаем уравнение

$$\frac{dm^\nu(s)}{ds} = ie\gamma^5 (F^*)^\nu{}_\lambda m^\lambda(s) \quad (\text{П.2})$$

с очевидным начальным условием $m^\nu(0) = \gamma^\nu$. Решение уравнения (П.2) имеет вид

$$m^\nu(s) = (e^{ie\gamma^5 F^* s} \gamma)^\nu \quad (\text{П.3})$$

Его можно переписать иначе:

$$m^\nu(s) = i\gamma^5 [\sin(eF^* s) \gamma]^\nu + [\cos(eF^* s) \gamma]^\nu \quad (\text{П.4})$$

Подставив (П.4) в (П.1), получаем формулу (2.45).

Вычислим также один из следов, возникающих при рассмотрении поляризационного оператора спинорных частиц

$$\pi^{\nu\mu} = \frac{1}{4} \text{Sp} (\gamma^\nu \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}e\sigma F s}) = \frac{1}{4} \text{Sp} [\gamma^\nu (e^{eFs})^\mu{}_\lambda m^\lambda(s)] \quad (\text{П.5})$$

Подставляя сюда выражение для $m^\lambda(s)$ (П.4), имеем:

$$\begin{aligned} \pi^{\nu\mu} &= \frac{1}{4} \left\{ \gamma^\nu (e^{eFs})^\mu{}_\lambda \left[i\gamma^5 (\sin(eF^* s) \gamma)^\lambda + (\cos(eF^* s) \gamma)^\lambda \right] \right\} = \\ &= (e^{eFs})^\mu{}_\lambda (\cos(eF^* s))^\lambda{}_\nu \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

- I. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЖЭТФ 67, 453, 1974.
2. S.Adler. Ann. of Phys. 67, 599, 1971
3. В.О.Папанян, В.И.Ритус. ЖЭТФ, 61, 2231, 1971.
4. A.Shabad. Nuovo Cimento Lett. 3, 457, 1972.
5. Н.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, Физматгиз, 1962.
6. Н.П.Клепиков. ЖЭТФ 26, 19, 1954.
7. И.А.Баталин, А.Е.Шабал. ЖЭТФ 60, 894, 1971.
8. J.Schwinger. Phys. Rev. 82, 664, 1951.
9. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат, Москва, 1973.
10. R.Feynman. Phys. Rev. 76, 749, 1949.
- II. W.Heisenberg, H.Euler. Zs.f. Phys. 98, 714, 1936.

Ответственный за выпуск *Г.А.Спиридонов*
Подписано к печати 2.УШ-1974г. МН 08391
Усл. 1,4 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ №51

Отпечатано на ротапринтере в ИЯФ СО АН СССР