36

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 77

М.П.Рютова

ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩАЯ ЧАСТЬ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ЛЕНГМЮРОВСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

Новосибирск

1974

ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩАЯ ЧАСТЬ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ЛЕНГМЮРОВСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

М.П.Рютова

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что вокруг локализованного ленгмюровского возмущения возникает статическое электрическое поле, спадающее при удалении от области возмущения лишь степенным образом ($E \sim 1/x^2$). Область, в которой существует это поле, порядка $L^2/r_D \gg L$, где L - размер ленгмюровского возмущения, а r_D - дебаевский радиус.

В настоящей работе исследуется структура поля локализованного ленгмюровского возмущения в однородной электронной плазме.

В линейном приближении электрическое поле ленгмюровского возмущения может быть представлено в виде:

$$E(x,t) = \mathcal{E}(x,t)\, e^{-i\omega_p t} + \text{к.с.} \qquad (\text{I})$$

где функция $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (см., например, /I/):

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = i\,\frac{3 v_T^2}{4\omega_p}\,\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \qquad (2)$$

($v_T = (2T/m)^{1/2}$ – тепловая скорость электронов, ω_p – электронная плазменная частота).

Ниже будут рассматриваться возмущения, которые можно характеризовать единственным пространственным масштабом L и которые достаточно быстро (экспоненциально) спадают на бесконечности (рис.I). Масштаб L, естественно, предполагается большим по сравнению с дебаевским радиусом: $L \gg v_T/\omega_p$.

Из-за малости групповой скорости ленгмюровских колебаний возмущение остается в исходной области пространства в течение очень большого времени $\tau \sim \omega_p L^2/v_T^2$ (τ велико не только по сравнению с ленгмюровским периодом $2\pi/\omega_p$, но и по сравнению с временем пролета электрона через возмущение L/v_T). Иными словами, в линейном приближении оказывается, что в течение длительного времени наличие возмущения никак не проявляется в области $|x| \gg L$.

В настоящей работе будет показано, что при учете квадратичных по амплитуде $\mathcal{E}$ эффектов ситуация существенно меняется: вокруг возмущения возникает квазистатическое электрическое поле, спадающее при удалении от области возмущения лишь степенным образом.

Причина появления этой "дальнодействующей" части электрического поля состоит в следующем. В области локализации возмущения на пролетающие электроны действует сила высокочастотного давления (пропорциональная $\partial|\mathcal{E}|^2/\partial x$), искажающая их функцию распределения. Возникающие искажения [1] переносятся с тепловой скоростью электронов на большие (по сравнению с h) расстояния и приводят к появлению в области $|x| \gg h$ электрического поля, величина которого устанавливается такой, чтобы обеспечивалась квазинейтральность плазмы.

Основное внимание мы уделим отысканию поля при не слишком больших значениях $|x|$, $|x| \lesssim v_T \tau$ (но $|x| \gg h$!). В этой области искажения функции распределения являются квазистатическими: время пролета электрона от области локализации ленгмюровского возмущения до точки x мало по сравнению с временем перестройки ленгмюровского возмущения τ. Именно это обстоятельство позволяет записать выражение для "дальнодействующего" электрического поля в простой и универсальной форме.

Исходными уравнениями являются кинетическое уравнение для функции распределения электронов f и уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{eE}{m}\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e\left(n_0 - \int f dv\right) \qquad (3)$$

где E - электрическое поле, n_0 - плотность нейтрализующего ионного фона, а e и m - заряд и масса электрона. В соответствии со сказанным выше, задача состоит в том, чтобы отыскать функцию распределения во втором приближении по $\mathcal{E}$. Воспользуемся методом последовательных приближений. Положим

$$E = E_1 + E_2 + \cdots$$

и

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots$$

Невозмущенная функция распределения f_0 будет считаться максвелловской: $f_0 = n\,(m/2\pi T)^{1/2}\exp(-mv^2/2T)$; E_1 совпадает с функцией, определяемой формулой (I). Соответственно этому, в линейном приближении имеем:

I) В рамках линейного приближения функция распределения электронов при пролете через область возмущения изменяется экспоненциально слабо ($h \gg v_T/\omega_p$!), так что в линейном приближении "дальнодействующая" часть возмущения не появляется.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}\left[\mathcal{E}(x,t)e^{-i\omega_p t} + \text{к.с.}\right], \qquad (4)$$

откуда

$$f_1 = \frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}\int_{-\infty}^{t}\mathcal{E}[x - v(t'-t), t']\,e^{-i\omega_p t'}dt' + \text{к.с.} \qquad (5)$$

Учитывая, что $\mathcal{E}$ меняется медленно по сравнению с быстро осциллирующей экспонентой, можно написать следующий итерационный ряд для f_1 :

$$f_1(x,v,t) = \frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}e^{-i\omega_p t}\left[\frac{i}{\omega_p}\mathcal{E} + \frac{1}{\omega_p^2}\frac{d\mathcal{E}}{dt} - \right.$$
$$\left. - \frac{i}{\omega_p^3}\frac{d^2\mathcal{E}}{dt^2} - \frac{1}{\omega_p^4}\frac{d^3\mathcal{E}}{dt^3} + \cdots\right] + \text{к.с.}$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}$. Из (5), кроме того, следует, что на больших расстояниях $(|x| \gg h)$ f_1 экспоненциально мало.

Величины второго порядка удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{df_2}{dt} - \frac{e}{m}E_2\frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{e}{m}E_1\frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{e^2}{m^2\omega_p^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial v}\left[\frac{d|\mathcal{E}|^2}{dt} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{i}{\omega_p}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}^*\frac{d\mathcal{E}}{dt} - \mathcal{E}\frac{d\mathcal{E}^*}{dt}\right) - \frac{1}{\omega_p^2}\left(\frac{d^3|\mathcal{E}|^2}{dt^3} - 3\frac{d}{dt}\left|\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right|^2\right)\right]\right\} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = -4\pi e\int f_2\, dv \qquad (7)$$

При написании правой части уравнения (6) мы оставили только члены, медленно меняющиеся со временем; члены, содержащие множители $\exp(\pm 2i\omega_p t)$, дают экспоненциально малый вклад в функцию f_2 на больших расстояниях и поэтому могут быть опущены.

Система (6), (7) обладает одним общим свойством. Если в правой части уравнения (6) стоит некоторая функция, имеющая вид полной производной по времени [2] $dF(x,v,t)/dt$, причем

2) Напомним, что мы определяем полную производную по времени как $\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}$.

$$\int F\, d v = 0 \tag{8}$$

то эта система имеет решение: $f_2 = F$, $E_2 = 0$.

Поскольку реально выражение, стоящее в правой части уравнения (6), экспоненциально мало при $x \gg L$, то это означает, что слагаемые, являющиеся полными производными по времени и удовлетворяющие условию (8) не вносят вклада в возмущение функции распределения при больших x и, следовательно, при отыскании дальнодействующей части возмущения могут быть опущены.

Учитывая это общее свойство, можно представить уравнение (6) в виде:

$$\frac{d f_2}{dt} - \frac{e}{m} E_2 \frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{e^2}{m^2 \omega_p^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left\{ \frac{\partial |\mathcal{E}|^2}{\partial x} - \frac{2i}{\omega_p} \left(\frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial t} \right) - \frac{1}{\omega_p^2} \left(v \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 |\mathcal{E}|^2}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{d \mathcal{E}}{dt} \right|^2 \right) \right\} \tag{9}$$

Принимая во внимание уравнение (2) и ограничиваясь в фигурных скобках правой части уравнения (9) членами нулевого и первого порядка [3] малости по параметру $(v_T / \omega_p L)^2$, можно привести это уравнение к виду:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{e}{m} E_2 \frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{e^2}{m^2 \omega_p^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left\{ \frac{\partial |\mathcal{E}|^2}{\partial x} + \frac{3T}{m \omega_p^2} \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right|^2 - \frac{v^2}{\omega_p^2} \left(\frac{\partial^3 |\mathcal{E}|^2}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right|^2 \right) \right\} \equiv \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v}, \tag{10}$$

где через U обозначен потенциал высокочастотной силы (который, естественно, отличен от нуля только в области пакета).

Как уже отмечалось выше, дальнодействующая часть возмущения возникает именно из-за наличия этой высокочастотной силы. Необходимо, однако, учесть, что в области пакета на частицу действует еще и электрическое поле, которое определяется из

---

3) Ограничиться только членом нулевого порядка нельзя, поскольку, как будет видно из дальнейшего, он почти полностью компенсируется квазистатическим электрическим полем.

условия квазинейтральности плазмы и частично компенсирует высокочастотную силу. Поэтому предварительно необходимо отыскать "эффективный" потенциал

$$U_{eff} = U - e\varphi \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv -E_2$$

действующий на частицу в области пакета. Для этого найдем сначала φ . При решении этой части задачи можно пренебречь в левой части уравнения (10) производной по времени, после чего f_2 в области пакета легко определяется:

$$f_2 = -\frac{1}{T} f_0 \left(U - e\varphi \right)$$

Имея в виду, что размер пакета велик по сравнению с дебаевским радиусом, можно из (7) найти φ методом последовательных приближений, полагая в нулевом приближении

$$\varphi = \frac{1}{ne} \int U f_0\, dv$$

и затем подставляя полученное выражение в левую часть уравнения (7). В результате для эффективного потенциала, действующего на частицу в области пакета, получим следующее выражение:

$$U_{eff} = -\frac{e^2}{m \omega_p^2} \left[3 \frac{\frac{T}{m} - v^2}{\omega_p^2} \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right|^2 + \frac{v^2}{\omega_p^2} \frac{\partial^2 |\mathcal{E}|^2}{\partial x^2} \right. \tag{11}$$

(здесь удержаны только главные члены по параметру $v_T / \omega_p L$).

Теперь задача сводится к тому, чтобы найти на больших расстояниях, $|x| \gg L$, возмущение плотности электронов δn, связанное с действием на них потенциала U_{eff} в области ленгмюровского колебания. После этого электрическое поле легко определится из условия квазинейтральности:

$$E_2 = \frac{T}{en} \frac{\partial}{\partial x} \delta n \tag{12}$$

Связанное с действием эффективного потенциала изменение функции распределения можно найти интегрированием уравнения (10) по траекториям:

$$f_2 = \frac{\partial f_0}{\partial v} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} U_{eff} \left[x + v(t'-t); v, t' \right] dt' \equiv$$

$$\equiv -\frac{t}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} U(x - vt, v, 0) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial}{\partial t} U_{eff} \left(y, v, t + \frac{y-x}{v} \right) dy$$

Для определенности рассматривается возмущение при $x > 0$, причем учтена экспоненциальная малость U_{eff} в интересующей нас области $x \gg l$.

Первое слагаемое связано с учетом начальных условий. Как можно убедиться, оно вносит лишь малый вклад в возмущение электрического поля в области $x \lesssim v_T t$ и поэтому в дальнейшем опускается. Возмущение плотности, соответственно, будет:

$$\delta n = \int f_2 dv = \frac{m}{T} \int_0^\infty \frac{dv}{v} f_0(v) \int_{x-vt}^\infty \frac{\partial}{\partial t} U_{eff}\left(y, v, t + \frac{y-x}{v}\right) dy \qquad (13)$$

Мы заменили верхний предел в интеграле по dy на ∞, имея в виду, что $|x| \gg l$.

Как это заранее очевидно и как это формально следует из (13), возмущение плотности при $|x| \gg l$ может быть связано только с нестационарностью эффективного потенциала. Тем удивительнее, что дальнодействующее электрическое поле оказывается статическим.

Чтобы убедиться в этом, заменим в формуле (13) порядок интегрирования и перейдем от переменной v к переменной $t' = \frac{y-x}{v}$:

$$\delta n = -\frac{m}{T} \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-t}^0 \frac{dt'}{t'} f_0\left(\frac{x-y}{t'}\right) \frac{\partial}{\partial t} U_{eff}\left(y, \frac{y-x}{t'}, t+t'\right) \qquad (14)$$

Учитывая, что, согласно уравнению (2),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int U_{eff}(y, v, t)\, dy = 0 \quad ,$$

можно представить выражение (14) в виде:

$$\delta n = -\frac{m}{T} \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-t}^0 \frac{dt'}{t'} \left\{ f_0\left(\frac{x-y}{t'}\right) \frac{\partial}{\partial t} U_{eff}\left(y, \frac{y-x}{t'}, t+t'\right) - f_0\left(\frac{x}{t'}\right) \frac{\partial}{\partial t} U_{eff}\left(y, \frac{-x}{t'}, t+t'\right) \right\} ,$$

т.е.:

$$\delta n = \frac{e^2}{T\omega_p^2} \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-t}^0 \frac{dt'}{t'} \left\{ \frac{3T}{m\omega_p^2} \left[f_0\left(\frac{x-y}{t'}\right) - f_0\left(\frac{x}{t'}\right) \right] \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{\omega_p^2} \left[\frac{(x-y)^2}{t'^2} f_0\left(\frac{x-y}{t'}\right) - \frac{x^2}{t'^2} f_0\left(\frac{x}{t'}\right) \right] \left(\frac{\partial^2 |\mathcal{E}|^2}{\partial y^2} - 3 \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right|^2 \right) \right\}$$

Имея в виду, что $\mathcal{E}$ существенно отлично от нуля только при $y \lesssim l \ll x$, можно провести разложение по y/t' в фигурных скобках. В результате в первом неисчезающем приближении получим:

$$\delta n = -\frac{3e^2 n}{m^2 \omega_p^4} \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^\infty y \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right|^2 dy$$

Соответственно этому, дальнодействующая часть электрического поля будет:

$$E_2 = \frac{3eT}{m^2 \omega_p^4} \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^\infty y \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right|^2 dy \equiv \frac{Q}{x^2} \qquad (15)$$

Величину Q, имеющую размерность заряда, можно назвать "эффективным зарядом" ленгмюровского колебания. Используя уравнение (2), несложно убедиться в том, что он не зависит от времени, т.е. "дальнодействующая" часть электрического поля оказывается не просто квазистатической, а полностью статической. С помощью (2) можно выразить эффективный заряд через характеристики возмущения в начальный момент времени:

$$Q = \frac{9ieT^2}{2m^3\omega_p^5} \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^\infty \left(\mathcal{E}_0^* \frac{\partial^3 \mathcal{E}_0}{\partial y^3} - \mathcal{E}_0 \frac{\partial^3 \mathcal{E}_0^*}{\partial y^3} \right) dy$$

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(y, 0)$$

В области очень больших x, $|x| \gg \tau / v_T$, формула (15) нарушается. Здесь пространственная зависимость поля перестает быть универсальной функцией и зависит от деталей изменения формы возмущения со временем, но поле здесь очень мало.

В заключение автор благодарит Д.Д.Рютова за полезные обсуждения.

Литература

1. В.И.Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах. Москва, изд. "Наука", 1973 г., стр. 125.

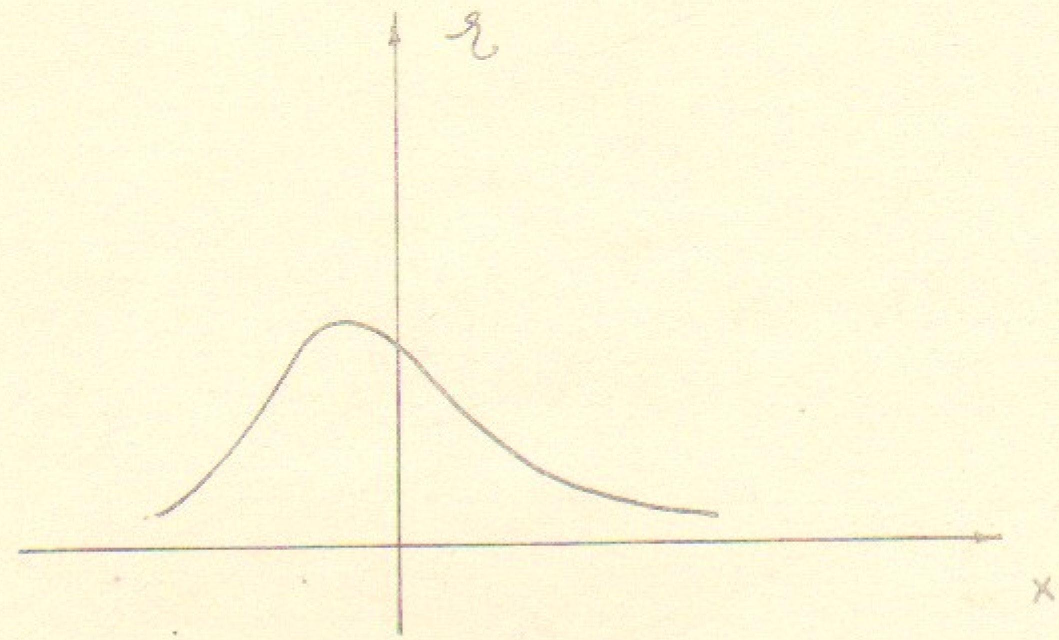

Рис. 1

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати I5.Х-74г. МН 08500
Усл. 0,7 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 77

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вт