И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 80

Г.Е.Векштейн, Д.Д.Рютов,

РЕКОМБИНАЦИОННЫЙ МЕХАНИЗМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Новосибирск

1974

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ

АН СССР

ПРЕПРИНТ

Г.Е.Векштейн, Д.Д.Рютов

РЕКОМБИНАЦИОННЫЙ МЕХАНИЗМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Новосибирск

1974

РЕКОМБИНАЦИОННЫЙ МЕХАНИЗМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г.Е.Векштейн, Д.Д.Рютов

В обычной теории процессов переноса в высокотемпературной водородной плазме последняя считается состоящей только из электронов и ионов, т.е. полностью ионизованной. В результате оказывается, что поперечные коэффициенты переноса плазмы, помещенной в магнитное поле, падают при усилении магнитного поля и могут стать сколь угодно малыми в достаточно сильном поле /I/. Однако даже в высокотемпературной плазме всегда имеется примесь нейтральных атомов водорода, образующихся вследствие рекомбинации. Так как магнитное поле не влияет на движение этих атомов, то возникает механизм переноса, не зависящий от напряженности магнитного поля[*]. Очевидно, что этот механизм определяет нижнюю границу коэффициентов переноса, которая достигается в достаточно сильном магнитном поле[1]. Представляет принципиальный интерес вычислить соответствующие коэффициенты переноса. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

Очевидно, что в сильном магнитном поле коэффициент переноса (например, коэффициент температуропроводности χ) можно оценить следующим образом:

$$\chi \sim c \lambda v_{Ta}$$

где c – равновесная доля нейтральных частиц (которая предполагается малой), λ – их длина свободного пробега относительно ионизации или перезарядки[2], а v_{Ta} – их средняя скорость. Такая оценка, естественно, справедлива, когда характерный размер задачи велик по сравнению с λ , а характерное время велико по сравнению со временем установления равновесной концентрации нейтралов[3].

Для определенности будем считать плотность плазмы не слишком большой, так чтобы единственным существенным процессом образования нейтралов была излучательная рекомбинация. Размер плазмы предполагается достаточно малым, так что излучение можно считать незапертым и пренебрегать процессами возбуждения атомов световыми квантами. Кроме того, будем предполагать, что температура плазмы удовлетворяет неравенствам

$$J_0 \ll T \ll J_0 \, M/m \qquad (I)$$

где J_0 – потенциал ионизации атома водорода, а M и m – массы иона и электрона. Первое в этой цепочке неравенств позволяет пользоваться борновским приближением при оценке сечений возбуждения и ионизации; при выполнении второго средняя скорость ионов много меньше скоростей атомных электронов, что будет использовано в дальнейшем.

Стационарное значение плотности нейтральных атомов определяется балансом двух процессов – радиационной рекомбинации и ионизации нейтральных частиц. При этом оказывается, что в достаточно разреженной плазме почти все атомы находятся в основном состоянии, поскольку спонтанное излучение (вероятность которого не зависит от плотности плазмы) приводит к быстрому переходу возбужденных атомов в основное состояние, которое они могут покинуть только в результате процессов ионизации или возбуждения электронным ударом, вероятность которых пропорциональна плотности. Чтобы оценить предельную плотность n_c , при которой доля возбужденных атомов еще мала, заметим, что вероятность рекомбинации в некоторое состояние обратно пропорциональна кубу главного квантового числа, т.е. при рекомбинации большинство атомов с самого начала возникает в основном состоянии. Поэтому главным механизмом, приводящим к появлению возбужденных состояний, является возбуждение электронным ударом из основного состояния, так что n_c следует

---

[*] Как нам стало известно, аналогичные соображения высказывались ранее Г.И.Будкером.

1) Слова "достаточно сильное" имеют здесь тот смысл, что обычные коэффициенты переноса становятся в таком поле пренебрежимо малыми. Вместе с тем мы считаем, что магнитное поле еще не столь велико, чтобы существенно влиять на состояние атомов и элементарные акты столкновений атомов с электронами и ионами.

2) Другие процессы, например, упругое рассеяние атомов, обычно несущественны.

3) Последнее условие заведомо позволяет считать функции распределения по скоростям электронов и ионов максвелловскими с одинаковой температурой.

оценивать из условия $n_e v_{Te} \sigma_{ex} \sim \gamma$, где γ – вероятность спонтанного излучения, характерное значение которой порядка[4] $10^8 - 10^9$ сек$^{-1}$, а σ_{ex} – сечение возбуждения. При $T \sim 100$ эв $\sigma_{ex} \sim 10^{-16}$ см^2 и $n_c \sim 10^{16}$ см$^{-3}$. При повышении температуры критическая плотность делается еще больше.

В соответствии с вышесказанным при $n \lesssim 10^{16}$ см$^{-3}$ равновесную концентрацию нейтралов можно найти, приравнивая скорости рекомбинации (во все состояния) и скорость ионизации из основного состояния.

Сечение рекомбинации (во все состояния) зависит от энергии налетающего электрона $\mathcal{E}$ (при неподвижном ионе) следующим образом /3/:

$$\sigma_r = \begin{cases} \dfrac{2^7 \pi \zeta(3)}{3} \alpha^3 a_0^2 \left(\mathcal{J}_0/\mathcal{E}\right)^{5/2} & \text{при } \mathcal{E} \gg \mathcal{J}_0 \\ \dfrac{2^8 \pi^2 e^{-4} \zeta(3)}{3} \alpha^3 a_0^2\, \mathcal{J}_0/\mathcal{E} & \text{при } \mathcal{E} \ll \mathcal{J}_0 \end{cases} \qquad (2)$$

где $\zeta(3) \approx 1,2$ – дзета-функция Римана, a_0 –боровский радиус атома водорода, а α – постоянная тонкой структуры. Из (2) видно, что при $T \gg \mathcal{J}_0$ основной вклад в рекомбинацию будут давать электроны с энергией $\mathcal{E} \sim \mathcal{J}_0$, а поскольку при $T \ll \mathcal{J}_0 M/m$ скорость ионов много меньше скорости таких электронов, то вероятность рекомбинации не будет зависеть от скорости ионов. Поэтому функция распределения нейтралов по скоростям $g_0(\vec{v})$ будет такой же, как и функция распределения ионов $f_i(\vec{v})$, т.е. максвелловской. Усредняя величину $\sigma_r v$ по функции распределения электронов $f_e(\vec{v})$, нетрудно получить

$$\langle \sigma_r v \rangle \approx 2 \cdot 10^{-11} / T^{3/2}(\text{эв}) \ (\text{см}^3/\text{сек}) \qquad (3)$$

---

4) Исключение составляет метастабильное состояние $2S$, но численные оценки показывают, что доля атомов в этом состоянии не превышает нескольких процентов. Это связано с возможностью резонансного перехода атомов из состояния $2S$ в состояние $2P$ при столкновении с ионами (см., например, /2/, стр.95).

Основной вклад в ионизацию атомов вносят электроны с тепловыми скоростями. Поэтому соответствующее сечение с хорошей точностью определяется борновским приближением /4/:

$$\sigma_i = \frac{4\pi a_0^2 \mathcal{J}_0 \cdot 0,285}{\mathcal{E}} \ln\left(\mathcal{E}/0,012\, \mathcal{J}_0\right)$$

и после усреднения:

$$\langle \sigma_i v \rangle \approx \frac{4 \cdot 10^{-8}}{T^{1/2}(\text{эв})} \ln\left[7,3\, T(\text{эв})\right] \left(\text{см}^3/\text{сек}\right) \qquad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получаем равновесную концентрацию нейтралов $C(T)$:

$$C(T) = \frac{\langle \sigma_r v \rangle}{\langle \sigma_i v \rangle} \approx 10^{-4}/T(\text{эв}) \qquad (5)$$

Перейдем теперь к нахождению поперечных коэффициентов переноса, определяемых нейтралами. Для этого нужно найти поправку к известной уже равновесной функции распределения нейтральных атомов, возникающую из-за неоднородности плазмы. Что касается функций распределения электронов и ионов, то в сильном магнитном поле их отклонением от максвелловских можно пренебречь. В интервале температур (I) основным процессом, определяющим длину свободного пробега нейтралов, является перезарядка, которая из-за резонансного характера имеет довольно большое сечение σ_* /2/. Не влияя на концентрацию нейтралов, перезарядка является в данном случае механизмом изотропизации их функции распределения. Для поправки $g_1(\vec{v})$ к функции распределения нейтралов $g_0(\vec{v})$ справедливо следующее уравнение:

$$v \cos\theta \frac{\partial g_0}{\partial x} = f_i(\vec{v}) \int \sigma_*(u)\, u\, g_1(\vec{v}')\, d^3 v' - $$
$$- g_1(\vec{v}) \int \sigma_*(u)\, u\, f_i(\vec{v}')\, d^3 v'; \quad u = |\vec{v} - \vec{v}'|, \qquad (6)$$
$$g_0(\vec{v}) = C(T) f_i(\vec{v}); \quad f_i(\vec{v}) = \frac{n M^{3/2}}{(2\pi T)^{3/2}} e^{-Mv^2/2T};$$

Очевидно, что его решение можно записать в виде

$$g_1(\vec{v}) = a(v)\, e^{Mv^2/2T} \cos\theta$$

Вообще говоря, определить отсюда $a(v)$ можно лишь численными методами. Однако уравнение (6) можно существенно упростить, если учесть, что сечение перезарядки $\sigma_*(u)$ очень слабо зависит от скорости при $\mathcal{E} \lesssim J_0 M/m$, так что при интегрировании в (6) его можно с хорошей точностью заменить некоторым средним $\sigma_*(v_{T})$. Тогда из (6) следует

$$\frac{C(T)v}{4\pi\sigma_*(v_T)}\left[\left(-\frac{5}{2T}+\frac{Mv^2}{2T^2}\right)\frac{dT}{dx}+\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\int_0^v e^{-\frac{Mu^2}{2T}}a(u)u^2du\left(-u+\frac{u^3}{5v^2}\right)+\int_v^\infty e^{-\frac{Mu^2}{2T}}a(u)u^2du\left(-v+v^3/5u^2\right)\right\} \qquad (7)$$

$$-a(v)\left\{\int_v^\infty e^{-\frac{Mu^2}{2T}}u^2du\left(u+\frac{v^2}{3u}\right)+\int_0^v e^{-\frac{Mu^2}{2T}}u^2du\left(v+u^2/3v\right)\right\}$$

Кроме того, для определения, например, коэффициента теплопроводности можно ограничиться приближенным решением уравнения (7) в области скоростей $v \gtrsim (T/M)^{1/2}$, т.к. в поток тепла

$$q=\frac{M}{2}2\pi\int_0^\pi \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta\int_0^\infty v^5 a(v)e^{-Mv^2/2T}dv$$

из-за высокой степени v в последнем интеграле вклад вносит именно эта область скоростей. При таких скоростях главным в правой части уравнения (7) является последний член, и из (7) получаем:

$$a(v)\approx-\frac{C(T)M^{3/2}}{(2\pi T)^{3/2}\sigma_*(v_T)}\left[\left(-\frac{5}{2T}+\frac{Mv^2}{2T^2}\right)\frac{dT}{dx}+\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}\right] \qquad (8)$$

Зная поправку (8) к функции распределения нейтралов, нетрудно вычислить потоки вещества Q и энергии q, связанные с градиентами температуры и плотности плазмы:

$$Q=\alpha\frac{dT}{dx}+\beta\frac{dn}{dx}$$

$$q=\gamma\frac{dT}{dx}+\delta\frac{dn}{dx} \qquad (9)$$

где
$$\alpha=\frac{2C(T)}{3(2\pi T)^{1/2}\sigma_*(v_T)M^{1/2}};\quad \beta=-2\alpha T/n;$$

$$\gamma=-2\alpha T;\quad \delta=-4\alpha T^2/n;$$

Определяя поток тепла в отсутствие потока частиц, для коэффициента теплопроводности $\tilde{\varkappa}$ получим следующее значение:

$$\tilde{\varkappa}\approx\frac{1,2\cdot10^2}{T^{1/2}(эв)\,\sigma_*(v_T)\,(см^2)}\,(см^{-1}сек^{-1}) \qquad (10)$$

Интересно сравнить найденный коэффициент теплопроводности с классической кулоновской теплопроводностью водородной плазмы $\varkappa_\perp$/I/: $\varkappa_\perp\approx 1,6\cdot10^{-2}n^2(см^{-3})/H^2(г)\,T^{1/2}(эв)\,(см^{-1}сек^{-1})$

Учитывая, что при условии (I) $\sigma_*(v_T)\sim10^{-15}\,см^2$ [2], находим:

$$\tilde{\varkappa}/\varkappa_\perp\approx 0,8\cdot10^{19}H^2(г)/n^2(см^{-3}) \qquad (11)$$

Отсюда видно, что указанный механизм процессов переноса в плазме становится существенным уже при весьма умеренных магнитных полях. Так, при $n\sim10^{14}\,см^{-3}$ необходимо $H > 3.10^4$ г.

Приносим благодарность Б.М.Смирнову за обсуждение работы.

Литература

1. С.И.Брагинский. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып. I, стр. 183, М., 1963.
2. Б.М.Смирнов. "Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме", М., 1968.
3. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский "Релятивистская квантовая теория". ч.I, М.,1968.
4. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. "Квантовая механика". М.,1963.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 21.X-74г. МН 08511
Усл. 0,5 печ.л., тираж 150 экз. Бесплатно
Заказ № 80

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вт