10

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 96

Б.Г.Конопельченко

СУПЕРСИММЕТРИЯ

Новосибирск

1974

СУПЕРСИММЕТРИЯ

Б.Г.Конопельченко

АННОТАЦИЯ

Дан обзор спинорных расширений группы Пуанкаре (групп суперсимметрии) и суперсимметричных моделей квантовой теории поля.

INSTITUTE OF NUCLEAR PHYSICS

SUPERSYMMETRY

B.G.Konopelchenko

Abstract

A review of the spinor extensions of the Poincare group (the groups of supersymmetry) and the supersymmetric models of quantum field theory.

Как известно, требование релятивистской инвариантности является одним из основных требований к квантовой теории поля. Однако лишь часть возможных Пуанкаре - инвариантных теорий реализуется в природе. Можно думать, что это связано с существованием более высоких симметрий, так что теории, обладающие более высокими симметриями, и реализуются в природе.

Существуют различные возможности для расширения группы Пуанкаре. Одна из них - расширить группу Пуанкаре до конформной группы, добавляя специальное конформное преобразование и растяжение. Другая возможность состоит в объединении группы Пуанкаре с группами внутренней симметрии (типа $SU(N)$). Отсутствие существенных успехов в этом направлении связано с теоремой О'Раферти о невозможности нетривиального объединения группы Пуанкаре с группами внутренней симметрии.

Генераторы группы Пуанкаре $J_{\mu\nu}$ и P_ρ обладают тензорной природой: относительно преобразований Лоренца $J_{\mu\nu}$ ведет себя как антисимметричный тензор, а P_ρ - как вектор. Общей чертой рассматриваемых до недавнего времени расширений группы Пуанкаре является то, что к генераторам $J_{\mu\nu}$, P_ρ добавлялись генераторы, также обладающие тензорной природой. В результате, мультиплеты таких групп симметрий содержат либо бозоны, либо фермионы.

Существенно новые результаты возникают при дополнении десяти генераторов группы Пуанкаре набором спинорных операторов. Появление спинорных генераторов означает выход за рамки групп Ли, т.к. для пар спинорных операторов мы должны рассматривать антикоммутаторы, если хотим сохранить правильную связь спина и статистики.

В настоящем обзоре рассматриваются такого типа расширения группы Пуанкаре и лагранжевы модели теории поля, инвариантные относительно таких групп (групп суперсимметрии).

В первой части обзора рассматриваются общие свойства групп суперсимметрии. В разделе I приводится общее решение задачи о расширении алгебры Пуанкаре спинорными операторами. Следующий раздел посвящен классификации неприводимых представлений группы суперсимметрии для одного наиболее интересного случая. В разделе Ш вводятся понятия суперпространства и суперполя. Рассматриваются трансформационные свойства суперполей. Выделяются неприводимые суперполя. Показана эквивалентность суперполя мультиплету обычных ферми- и бозе полей. Обсуждаются обобщенные суперпреобразования и обобщенные суперполя.

Вторая часть посвящена лагранжевым моделям, инвариантным относительно группы суперсимметрии.

В разделе IУ рассматривается модель, включающая скалярное, псевдоскалярное и спинорное поля. Наиболее интересная особенность этой модели состоит в большом числе сокращений расходимостей. В частности, отсутствуют контрчлены перенормировки массы и заряда и оставшиеся после сокращений логарифмические расходимости устраняются единственным контрчленом перенормировки волновой функции. Обсуждается также нарушение симметрии в этой модели.

Модели, инвариантные одновременно относительно группы суперсимметрии и группы калибровочных преобразований рассматриваются в разделах У и УI. Модель с абелевой калибровочной группой (раздел У) может рассматриваться как суперсимметричное расширение квантовой электродинамики. Особенностью моделей как с абелевой, так и с неабелевой калибровочными группами (раздел УI) является то, что кроме векторных калибровочных полей возникают спинорные калибровочные поля. Интересно также, что в неабелевом случае асимптотическая свобода сохраняется даже при включении взаимодействия со скалярными полями.

В заключении второй части рассматривается возможность объединения группы суперсимметрии с группами внутренней симметрии. Включение спинорных операторов в группы симметрии дает возможность получить спектр спинов и внутренних квантовых чисел в мультиплетах. Однако теорема О'Раферти справедлива и для конечных групп, содержащих спинорные генераторы. Тем самым, расщепление по массам частиц внутри мультиплетов групп внутренней симметрии не может быть объяснено и в рамках конечных групп симметрии, содержащих спинорные генераторы.

В приложении I приведены необходимые для раздела У сведения о произведениях суперполей. Приложение II посвящено применению техники суперполей для анализа модели раздела IУ.

ч.I. СТРУКТУРА АЛГЕБРЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ СУПЕРСИММЕТРИИ

I. Расширение алгебры Пуанкаре спинорными генераторами

Генераторы группы Пуанкаре удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\tau}] = i(g_{\mu\tau}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\tau} - g_{\mu\rho}J_{\nu\tau} - g_{\nu\tau}J_{\mu\rho}), \qquad (I.I)$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu), \quad [P_\mu, P_\nu] = 0.$$

Определим вид алгебр, которые кроме операторов $J_{\mu\nu}$ и P_ρ содержат спинорные операторы Q_α $(\alpha = 1,2,3,4)$. Будем предполагать, что Q является четырехкомпонентным спинором, т.е., что

$$[J_{\mu\nu}, Q_\alpha] = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_{\alpha\beta} Q_\beta, \qquad (I.2)$$

где γ_μ - γ - матрицы Дирака.

Для того, чтобы сохранить правильную связь спина и статистики, необходимо рассматривать коммутаторы тензорных операторов ($J_{\mu\nu}, P_\rho$) со спинорными и антикоммутаторы спинорных операторов между собой. Для такого типа алгебр выполняются обобщенные тождества Якоби /I/, которые накладывают сильные ограничения на возможный вид перестановочных соотношений. В работе /2/ были найдены все возможные расширения алгебры Пуанкаре спинорными операторами Q. Они имеют вид

$$[P_\mu, Q] = \overset{+}{\gamma}_\mu Q, \quad \{Q, \bar{Q}\} = \overset{+}{\gamma}_\mu P_\mu, \quad \{Q, Q\} = 0 \qquad (I.3а)$$

$$[P_\mu, Q] = \overset{+}{\gamma}_\mu Q, \quad \{Q, \bar{Q}\} = 0, \quad \{Q, Q\} = 0 \qquad (I.3б)$$

$$[P_\mu, Q] = 0, \quad \{Q, \bar{Q}\} = \overset{+}{\gamma}_\mu P_\mu, \quad \{Q, Q\} = 0 \qquad (I.3в)$$

$$[P_\mu, Q] = 0, \quad \{Q, \bar{Q}\} = \gamma_\mu P_\mu, \quad \{Q, Q\} = 0 \qquad (I.3г)$$

где $\overset{\pm}{\gamma}_\mu = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5)\gamma_\mu$, $\gamma_5^2 = -1$; $\overline{Q} = Q^+\gamma^0$

Кроме соотношений (I.3) возможны также аналогичные соотношения с заменой $\overset{+}{\gamma}_\mu \to \overset{-}{\gamma}_\mu$.

Подчеркнем еще раз, что формулы (I.3) вместе с (I.I) и (I.2) определяют вид всех возможных расширений алгебры Пуанкаре спинорными операторами.

Алгебры (I.I), (I.2) - (I.3) не являются алгебрами Ли, т.к. кроме коммутаторов они содержат и антикоммутаторы. Однако их можно рассматривать как такое обобщение алгебр ЛИ, в котором соответствующие группы имеют своими параметрами не обычные (коммутирующие) числа, а элементы алгебры Грассмана /I/. При этом параметры преобразований с тензорными генераторами являются коммутирующими величинами (четными элементами алгебры Грассмана), а параметры преобразований со спинорными генераторами - полностью антикоммутирующими величинами (нечетными элементами алгебры Грассмана). Общая теория такого типа алгебр рассматривалась в работе /I/.

Из общих свойств алгебр (I.3) отметим следующие. Во-первых, алгебра (I.I) - (I.2) - (I.3в) является подалгеброй алгебры (I.I) -(I.2) - (I.3г), а алгебра (I.I)-(I.3г) является единственной из (I.3) содержащей подалгебру, которая в свою очередь содержит алгебру (I.I) в качестве подалгебры. Во-вторых, отражение координат не является автоморфизмом алгебр (I.3а-I.3в), так что в системах инвариантных относительно этих алгебр четность не сохраняется.

Интересной особенностью алгебр (I.3 а,в,г) является то, что оператор P_μ можно выразить через операторы Q_α. Действительно, умножая соотношение $Q_\alpha \overline{Q}_\beta + \overline{Q}_\beta Q_\alpha = (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} P_\mu$ на γ_λ и беря шпур, для алгебры (I.3г), получаем

$$P_\lambda = \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\delta} \{Q_\alpha, Q_\delta^+\} (\gamma_0\gamma_\lambda)_{\delta\alpha} . \qquad (I.4)$$

Для гамильтониана P_0, в частности, имеем

$$P_0 = \frac{1}{4} \sum_\alpha \{Q_\alpha, Q_\alpha^+\}$$

Для алгебр (I.3 а,в) P_λ выражается формулой (I.4) с заменой $\gamma_\lambda \to \overset{+}{\gamma}_\lambda$.

Для физических приложений важным является вопрос о спектре оператора P^2 в неприводимых представлениях группы симметрии. Поскольку для алгебр (I.3 а,б) $[P^2, Q] = 2\overset{+}{\gamma}_\mu P_\mu Q$ в неприводимых представлениях этих алгебр спектр P^2 является непрерывным (см. также /32/). Таким образом, только алгебры (I.I)-(I.2)-(I.3в) и (I.I)-(I.2)-(I.3г), в которых P^2 является инвариантом, представляют интерес, как алгебры симметрии теорий, описывающих взаимодействие частиц.

Модели теории поля, инвариантные относительно группы с алгеброй (I.I)-(I.2)-(I.3в) рассматривались в работах /2-4/. Алгебра (I.3г) рассматривалась в работах /5/ в связи с голдстоуновскими фермионами.

Интерес к алгебрам типа (I.3) (алгебрам групп суперсимметрии) значительно усилился после работ /6,7/, в которых были рассмотрены модели, инвариантные относительно группы, соответствующей алгебре (I.I)-(I.2)-(I.3г)[x]. Отметим, что авторы работы /6/ пришли к алгебре (I.3г), обобщая на четырехмерное пространство группу суперкалибровочных преобразований в двумерных дуальных моделях. С этим обстоятельством и связано первоначальное название групп суперсимметрии - суперкалибровочные группы.

В дальнейшем мы будем рассматривать алгебру (I.I)-(I.2)-(I.3г) и соответствующую ей группу.

---

x) В работе/6/ (см.также /8/) рассматривалась более широкая группа, содержащая дополнительно специальное конформное преобразование, дилатацию и γ_5 -преобразование. Для того, чтобы не иметь дело с аномалиями Адлера и только нулевыми массами, мы ограничиваемся, следуя /7/, более узкой группой.

II. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Алгебра суперсимметрии задается перестановочными соотношениями

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\tau}] = i(g_{\mu\tau} J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} J_{\mu\tau} - g_{\mu\rho} J_{\nu\tau} - g_{\nu\tau} J_{\mu\rho}),$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu), \quad [P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad (2.1)$$

$$[J_{\mu\nu}, Q_\alpha] = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_{\alpha\beta} Q_\beta, \quad [P_\mu, Q_\alpha] = 0,$$

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} P_\mu, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0.$$

Майорановский спинор Q x) имеет четыре независимых компоненты и, следовательно, группа суперсимметрии является 14-параметрической.

Перестановочные соотношения (2.1) можно переписать также в терминах двухкомпонентных спиноров q_A и $q_{\dot B}$ $(A, \dot B = 1,2)$. В представлении, где матрица γ_5 диагональна майорановский спинор имеет вид $\begin{pmatrix} q_A \\ q_{\dot B} \end{pmatrix}$. Мы будем использовать как четырехкомпонентные майорановские спиноры, так и двухкомпонентные спиноры.

Перейдем к классификации представлений алгебры (2.1). Для этого необходимо найти операторы Казимира. Они имеют вид

$$C_1 = P_\mu P_\mu, \qquad C_2 = K_{\mu\nu} K_{\mu\nu}, \qquad (2.2)$$

где [9] $K_{\mu\nu} = P_\mu K_\nu - P_\nu K_\mu$ и

$$K_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} P_\nu J_{\rho\tau} - \frac{1}{4} \overline{Q} i \gamma_\mu \gamma_5 Q.$$

Вектор K_μ является обобщением вектора Паули-Любанского. Отметим, что

$$[K_{\mu\nu}, Q] = 0, \qquad [K_{\mu\nu}, P_\rho] = 0$$

---

x) Майорановский спинор удовлетворяет условию $\psi = \psi^c = C\overline{\psi}^T$, где C – матрица зарядового сопряжения. Для антикоммутирующих майорановских спиноров, в частности $\overline{\psi}_1 \psi_2 = \overline{\psi}_2 \psi_1$, $\overline{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 = -\overline{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_1$.

Рассмотрим те представления, в которых $C_1 = P^2 > 0$. Перейдем, как обычно, в систему покоя, где $P = (M, 0, 0, 0)$. В этой системе $K_{i\ell} = 0$ $(i, \ell = 1,2,3)$ и $K_{0i} = -K_{i0} = \frac{M^2}{2} \mathcal{L}_i$, где

$$\mathcal{L}_i = \varepsilon_{ik\ell} J_{k\ell} - \frac{i}{2M} \overline{Q} \gamma_i \gamma_5 Q.$$

Нетрудно убедиться, что

$$[\mathcal{L}_i, Q] = 0, \qquad [\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_k] = i \varepsilon_{ik\ell} \mathcal{L}_\ell.$$

Следовательно,

$$C_2 = -2K_{0i}K_{0i} = -\frac{M^4}{2} \mathcal{L}_i \mathcal{L}_i = -\frac{M^4}{2} Y(Y+1),$$

где $Y = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$.

Назовем величину Y – суперспином.

Таким образом, неприводимые представления группы суперсимметрии классифицируются по значениям массы М и суперспина Y $(Y = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots)$ и

$$C_1 = M^2, \quad C_2 = -\frac{M^4}{2} Y(Y+1). \qquad (2.3)$$

Обычный спин S не является инвариантом алгебры (2.1). Найдем спектр спинов в неприводимых представлениях группы суперсимметрии. Рассмотрим для этого малую группу при $P^2 > 0$. В системе покоя ($P = (M, 0, 0, 0)$) её генераторами являются J_{ik} $(i, k = 1,2,3)$ и Q_α. В базисе, где γ_0 – диагональна, антикоммутационные соотношения для Q можно записать в виде /10/:

$$\{Q_a, Q_b\} = 0, \quad \{Q_a^+, Q_b^+\} = 0$$

$$\{Q_a, Q_b^+\} = M\,\delta_{ab} \qquad (a, b = 1,2) \qquad (2.4)$$

где Q_a является двухкомпонентным спинором относительно пространственных вращений и при отражении координат $Q_a \to i Q_a$. В силу (2.4) операторы Q_a^+ и Q_b можно интерпретировать как операторы рождения и уничтожения. Рассмотрим набор из $2Y+1$ векторов $|Y, Y_3\rangle$ $(-Y < Y_3 < Y)$, являющийся базисом неприводимого представления малой группы (в системе покоя). Пусть вектор с наименьшим спином $|Y, Y_3; S_{min}\rangle$ является "вакуумом" системы (2.4):

$$Q_a |Y, Y_3; S_{min}\rangle = 0.$$

Определим ортонормированные векторы

$$|Y, Y_3; n_1, n_2\rangle = M^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)} Q_1^{+n_1} Q_2^{+n_2} |Y, Y_3; S_{min}\rangle \quad (2.5)$$

где пара (n_1, n_2) принимает значения (0,0), (0,I),(I,0),(I.I). Эти векторы образуют базис $4(2Y+1)$ – рядного неприводимого представления малой группы. Нетрудно проверить, что (спин)(четность) в неприводимом представлении принимают значения /IO/

$$\left(Y-\frac{1}{2}\right)^{\eta}, \quad Y^{i\eta}, \quad Y^{-i\eta}, \quad \left(Y+\frac{1}{2}\right)^{-\eta}$$

где η равно $\pm i$ (для целых Y) или $\pm$ I (для полуцелых Y).

Таким образом, пространство любого неприводимого представления группы суперсимметрии содержит как бозонные, так и фермионные состояния.

Базисные векторы представления полной группы могут быть получены как обычно, действием лоренцевских бустов L_p на векторы (2.5)

$$|p; Y, Y_3; n_1, n_2\rangle = \mathcal{U}(L_p)|Y, Y_3; n_1, n_2\rangle$$

Действие операторов Q_α на эти векторы задается формулой /IO/:

$$Q_\alpha |p; \varkappa\rangle = \sum_{\varkappa'} |p; \varkappa'\rangle\langle\varkappa'|\, Q_\alpha(p) |\varkappa\rangle =$$
$$= A_{\alpha\beta}(L_p) \sum_{\varkappa'} |p; \varkappa'\rangle\langle\varkappa'|\, Q_\beta |\varkappa\rangle,$$

где $|\varkappa\rangle$ обозначает векторы (2.5), а $A_{\alpha\beta}(L_p)$ – спинорное представление бустов L_p . Тем самым полностью определено действие генераторов в неприводимых представлениях группы.

В представлениях с $p^2 = 0$ спиральность принимает значения

$$Y, \; Y+\frac{1}{2}, \; -Y, \; -\left(Y+\frac{1}{2}\right).$$

Ш. С У П Е Р П О Л Я

(поля, преобразующиеся по представлениям группы суперсимметрии)

I. Для построения суперсимметричных лагранжевых моделей нам, естественно, необходимо задать трансформационные свойства полей относительно группы суперсимметрии. Суперполе мы определим по аналогии с обычным полем, т.е. как оператор рождающий из вакуума $|0\rangle$ векторы представления группы суперсимметрии (при отсутствии взаимодействия – векторы неприводимого представления)

$$|x; Y, Y_3; n_1, n_2\rangle = \Psi^{+}_{Y, Y_3; n_1, n_2}(x) |0\rangle \quad (3.1)$$

Как мы видели в предыдущем разделе среди состояний $|x; Y, Y_3; n_1, n_2\rangle$ имеются состояния с различными (целыми и полуцелыми) спинами. Следовательно, суперполе Ψ является мультиплетом обычных ферми–и бозе полей.

Простейший (скалярный) мультиплет содержит два действительных скалярных поля A, F , два действительных псевдоскалярных поля B, G и майорановское спинорное поле ψ . Относительно группы Пуанкаре каждое из них преобразуется независимо от других. Суперпреобразование (с генератором Q) перепутывает эти поля. При инфинитезимальном суперпреобразовании имеем /6/:

$$\delta A = [\bar{\varepsilon} Q, A] = i\bar{\varepsilon}\psi \; ; \; \delta B = [\bar{\varepsilon} Q, B] = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\psi \; ; \quad (3.2)$$
$$\delta\psi = [\bar{\varepsilon} Q, \psi] = \partial_\mu(A - \gamma_5 B)\gamma_\mu \varepsilon + (F + \gamma_5 G)\varepsilon \; ;$$
$$\delta F = [\bar{\varepsilon} Q, F] = i\bar{\varepsilon}\gamma_\mu \partial_\mu \psi \; ; \; \delta G = [\bar{\varepsilon} Q, G] = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_\mu \partial_\mu \psi,$$

где ε – постоянный полностью антикоммутирующий майорановский спинор.

Приведем другой пример. Для мультиплета, состоящего из антисимметричного тензора $v_{\mu\nu}$ майорановского спинора λ и псевдоскаляра $\mathcal{D}$, при инфинитезимальных суперпреобразованиях имеем:

$$\delta v_{\mu\nu} = [\bar{\varepsilon} Q, v_{\mu\nu}] = i\bar{\varepsilon}\gamma_\nu \partial_\mu \lambda - i\bar{\varepsilon}\gamma_\mu \partial_\nu \lambda,$$
$$\delta \lambda = [\bar{\varepsilon} Q, \lambda] = -\tfrac{1}{4} v_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu \varepsilon + \mathcal{D}\gamma_5 \varepsilon, \qquad (3.3)$$
$$\delta \mathcal{D} = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_\mu \partial_\mu \lambda.$$

Мы видим, что закон преобразования компонент мультиплетов достаточно сложен и поэтому построение суперсимметричных комбинаций (например, лагранжианов) не является простой задачей.

2. В работе /9/ был предложен формализм, позволяющий записать формулы (3.2), (3.3) и аналогичные им в компактной форме. Введем следуя /9/ понятие суперпространства. Суперпространство- это восьмимерное пространство, точки которого нумеруются координатами x_μ ($\mu = 0,1,2,3$) и θ_α ($\alpha = 1,2,3,4$), где x_μ -обычные пространственно-временные координаты, а θ является четырехx) компонентным полностью антикоммутирующим майорановским спинором ($\theta_\alpha\theta_\beta + \theta_\beta\theta_\alpha = 0$).

Введение суперпространства удобно тем, что группа суперсимметрии может рассматриваться как группа преобразований суперпространства. Она содержит следующие преобразования:

1) Сдвиги
$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu, \quad \theta'_\alpha = \theta_\alpha,$$

2) Преобразования Лоренца:
$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu, \qquad \theta'_\alpha = S_{\alpha\beta}(\Lambda)\theta_\beta,$$
где $S_{\alpha\beta}(\Lambda)$ - спинорное представление группы Лоренца.

3) Суперпреобразование
$$x'_\mu = x_\mu + \tfrac{i}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\theta, \quad \theta'_\alpha = \theta_\alpha + \varepsilon_\alpha. \qquad (3.4)$$

Преобразования группы суперсимметрии оставляют инвариантной дифференциальную форму $(dx_\mu - \tfrac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_\mu d\theta)^2$.

x)Напомним, что майорановский спинор θ имеет четыре независимые компоненты. Вместо спинора θ можно ввести двухкомпонентный спинор ξ_A $(A=1,2)$ и ему сопряженный $\xi_{\dot B}$ /II/.

Суперполе мы определим как операторозначную функцию "координат" - $\psi(x,\theta)$. Закон преобразования суперполя относительно группы суперсимметрии задается по аналогии с обычными полями:
$$\mathcal{U}\,\psi(x,\theta)\,\mathcal{U}^{-1} = \psi'(x,\theta) = \psi(x',\theta'). \qquad (3.5)$$

Суперполе $\psi(x,\theta)$ может иметь также лоренцевские (спинорные или тензорные) индексы, тогда в правой части (3.5) при преобразованиях Лоренца возникает соответствующая матрица. Суперпреобразования в силу (3.4) не затрагивают лоренцевских индексов, поэтому для суперполя с произвольными индексами при преобразованиях (3.4) имеем
$$\mathcal{U}(\varepsilon)\,\psi_{\dots}(x,\theta)\,\mathcal{U}^{-1}(\varepsilon) = \psi_{\dots}(x_\mu + \tfrac{i}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\theta, \theta+\varepsilon). \qquad (3.6)$$

Для инфинитезимальных суперпреобразований находим
$$\delta\psi_{\dots}(x,\theta) = \bar{\varepsilon}_\alpha [Q_\alpha, \psi_{\dots}(x,\theta)] = \bar{\varepsilon}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_\alpha} + \frac{i}{2}(\gamma_\mu\theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\psi_{\dots}(x,\theta) \qquad (3.7)$$

Нетрудно убедиться, что оператор $\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_\alpha}$ не является ковариантным. Из формулы (3.7) следует, что ковариантная производная имеет вид
$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_\alpha} - \frac{i}{2}(\gamma_\mu\theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \qquad (3.8)$$

Величина $\mathcal{D}_\alpha \psi(x,\theta)$ преобразуется так же как и $\psi(x,\theta)$.Ковариантная производная удовлетворяет перестановочным соотношениям
$$\{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_\beta\} = -(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\, i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad (3.9)$$

3. Суперполе $\psi_{\dots}(x,\theta)$ преобразуется, вообще говоря, по приводимому представлению группы суперсимметрии. Выделение неприводимых компонент достигается, как обычно, наложением ковариантных дифференциальных условий. Определим левую и правую киральные части $\psi_{\dots}$, полагая /II,I2/
$$\left[\frac{1 \mp i\gamma_5}{2}\mathcal{D}\right]_\alpha \psi_{\mp\,\dots}(x,\theta) = 0 \qquad (3.10)$$

Важное свойство неприводимых полей состоит в том, что обычное произведение двух неприводимых "левых" полей также является неприводимым "левым" полем

$$\varphi'_{+\ldots}(x,\theta)\,\varphi''_{+\ldots}(x,\theta)=\varphi'''_{+\ldots}(x,\theta).$$

Аналогично, для поля ψ_-. Произведение "левого" и "правого" полей является общим приводимым полем.

Выделение некиральной части поля $\psi_{N\ldots}$ достигается наложением условия

$$\overline{\mathcal{D}}\left(\frac{1\mp i\gamma_5}{2}\right)\mathcal{D}\,\psi_{N\ldots}(x,\theta)=0.$$

Неприводимые компоненты ψ_+, ψ_-, ψ_N можно получить также действуя на ψ соответствующими операторами проектирования /I3/:

$$P_+=-\frac{1}{\partial^2}\overline{\mathcal{D}}\,\frac{1-i\gamma_5}{2}\,\mathcal{D}\,\overline{\mathcal{D}}\,\frac{1+i\gamma_5}{2}\,\mathcal{D},$$

$$P_-=-\frac{1}{\partial^2}\overline{\mathcal{D}}\,\frac{1+i\gamma_5}{2}\,\mathcal{D}\,\overline{\mathcal{D}}\,\frac{1-i\gamma_5}{2}\,\mathcal{D},$$

$$P_N=1+\frac{1}{4\partial^2}\left(\overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}\right)^2.$$

Вопрос о неприводимых суперполях удобнее рассматривать, используя двухкомпонентные спиноры /II/ (см.последний пункт этого раздела).

4. Покажем теперь, что суперполе эквивалентно мультиплету обычных полей /9/.

Рассмотрим,для примера, суперполе ψ с $Y=0$, удовлетворяющее условию $\frac{\partial}{\partial\bar\xi}\psi(x,\xi,\bar\xi)=0$. Здесь ξ - двухкомпонентный спинор. Разложим $\psi(x,\xi,\bar\xi)$ в ряд по компонентам спинора ξ. Так как квадрат каждой компоненты спинора равен нулю, то этот ряд обрывается на квадратичном по ξ члене:

$$\psi(x,\xi)=\widetilde{A}(x)+\xi_A\psi_A(x)+\xi_A\xi_B\epsilon_{AB}\widetilde{F}(x), \qquad (3.II)$$

где $\quad \varepsilon_{AB}=-\varepsilon_{BA} \quad (A,B=1,2).$

Мы видим, что ряд (3.II) содержит скалярные поля $\widetilde{A}$, $\widetilde{F}$ и спинорное поле ψ_A.

Аналогично, для суперполя линейно зависящего от $\bar\xi$ находим:

$$\psi(x,\xi,\bar\xi)=\psi^{(1)}(x)+\xi_A\psi^{(2)}_A(x)+\bar\xi_{\dot B}\psi^{(3)}_{\dot B}(x)+ \qquad (3.I2)$$
$$+\xi_A\xi_B\epsilon_{AB}\psi^{(4)}(x)+\xi_A\bar\xi_{\dot B}\psi^{(5)}_{A\dot B}(x)+\xi_A\xi_B\epsilon_{AB}\bar\xi_{\dot C}\psi^{(6)}_{\dot C}(x).$$

Этот мультиплет состоит из двух скалярных полей, трех спинорных и векторного поля.

Подобным образом может быть разложено любое суперполе.Используя это разложение и формулу (3.7) можно найти закон преобразования компонент суперполя при суперпреобразовании. В частности, для компонент суперполя (3.II), где $\widetilde{A}=\frac{1}{2}(A+iB), \widetilde{F}=\frac{1}{2}(F+iG)$ в представлении, где γ_5 диагональна получаем формулы (3.I).

5. Один из способов получения новых суперполей является перемножение суперполей. Эта операция используется при построении лагранжианов суперсимметричных моделей (см.разделы У и УI). Разложение суперполей по обычным полям позволяет легко находить зависимость компонент произведения от компонент множителей. Например, для суперполей типа (3.II) находим ($\psi_3=\psi_2\cdot\psi_1$)

$$\widetilde{A}_3=\widetilde{A}_2\cdot\widetilde{A}_1\,, \quad \psi_{3A}=\widetilde{A}_1\psi_{2A}+\widetilde{A}_2\psi_{1A}\,,$$
$$\widetilde{F}_3=\widetilde{A}_1\widetilde{F}_2+\widetilde{A}_2\widetilde{F}_1+\frac{1}{2}\epsilon_{AB}\psi_{1A}\psi_{2B}$$

Аналогичные формулы легко получить для более сложных суперполей (см.приложение I).

6. Обобщенные суперпреобразования и суперполя

В работе /I4/ было предложено обобщение суперпреобразования (3.4). Это преобразование включает аксиальные члены и имеет вид

$$x'_\mu=x_\mu+\frac{i}{2}a\,\bar\varepsilon\gamma_\mu\theta+\frac{i}{2}b\left(\bar\varepsilon i\gamma_\mu\gamma_5\theta+\frac{1}{2}\bar\varepsilon i\gamma_\mu\gamma_5\varepsilon\right), \qquad (3.I3)$$
$$\theta'=\theta+\varepsilon,$$

где a и b фиксированные константы. Нетрудно убедиться, что преобразование (3.I3) вместе с преобразованиями группы Пуанкаре образует группу. Перестановочные соотношения генераторов преобразования (3.I3) имеют вид

$$\{Q_{b\alpha}, \bar{Q}_{b\beta}\} = a(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} P_\mu, \quad \{Q_{b\alpha}, Q_{b\beta}\} = 0 \qquad (3.I4)$$

Таким образом, преобразования (3.I3) с различными b при фиксированном a являются различными реализациями алгебры (3.I4). При $a=0$ получаем абелеву группу, рассмотренную в работе /I5/.

Обозначим поле ковариантное относительно преобразования (3.I3) через $\Psi_{b\ldots}(x,\theta)$. При инфинитезимальном преобразовании

$$\delta\Psi_{b\ldots}(x,\theta) = \bar{\varepsilon}_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_\alpha} + \frac{i}{2}\{(a - ib\gamma_5)\gamma_\mu\theta\}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right]\Psi_{b\ldots}(x,\theta)$$

Ковариантная производная имеет вид

$$\mathcal{D}_{b\alpha} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_\alpha} - \frac{i}{2}\{(a + ib\gamma_5)\gamma_\mu\theta\}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

и удовлетворяет перестановочным соотношения (3.I4) с заменой $a \to -a$.

Важным свойством Ψ_b и $\mathcal{D}_{b\alpha}$ является их простая связь с $\Psi_{b=0}$ и $\mathcal{D}_{b=0}$ /I4/:

$$\Psi_{b\ldots}(x,\theta) = e^{\frac{b}{4}\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_\mu\theta}\,\Psi_{b=0\ldots}(x,\theta) = \Psi_{b=0\ldots}(x_\mu + \tfrac{b}{4}\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\theta, \theta) \qquad (3.I5)$$

$$\mathcal{D}_{b\alpha} = e^{\frac{b}{4}\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_\mu\theta}\,\mathcal{D}_{b=0\,\alpha}\,e^{-\frac{b}{4}\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_\mu\theta}$$

Соотношения (3.I5) дают возможность найти явный вид неприводимых полей. Уравнения (3.I0) эквивалентны в силу (3.I5) следующим

$$\left[\frac{1 \mp i\gamma_5}{2}\mathcal{D}_{b=0}\right]_\alpha \Psi_{\pm} = \left[\frac{1 \mp i\gamma_5}{2}\mathcal{D}_{\pm 1}\right]_\alpha \Psi_{(\pm 1)\pm} = \qquad (3.I6)$$

$$= \left(\frac{1 \mp i\gamma_5}{2}\right)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_\beta}\Psi_{(\pm 1)\pm} = 0.$$

В терминах двухкомпонентных спиноров ξ условия (3.I6) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi_A}\Psi_{(+1)+}(x,\xi,\bar{\xi}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\xi_A}\Psi_{(-1)-}(x,\xi,\bar{\xi}) = 0 \qquad (3.I7)$$

Из (3.I6) находим

$$\Psi_{(\pm 1)\pm} = A_{(\pm 1)\pm} + \bar{\theta}\left(\frac{1 \pm i\gamma_5}{2}\right)\Psi_{(\pm 1)\pm} + \frac{1}{2}\bar{\theta}\left(\frac{1 + i\gamma_5}{2}\right)\theta F_{(\pm 1)\pm}. \qquad (3.I8)$$

И, наконец,

$$\Psi_{\pm}(x,\theta) = e^{\mp\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_\mu\theta}\,\Psi_{(\pm 1)\pm}(x,\theta) \qquad (3.I9)$$

Аналогичные формулы могут быть получены и для некиральной части Ψ_N /I4/.

ч.II. СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

IУ. Скалярная модель

Рассмотрим простейшую нетривиальную суперсимметричную модель, предложенную в работе /7/. Она описывает самодействие скалярного мультиплета, рассмотренного в предыдущем разделе (П.I). Напомним, что этот мультиплет состоит из скалярного поля А, псевдоскалярного поля В, майорановского спинора ψ и двух, вспомогательных полей F, G. Лагранжиан модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g$$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu A)^2 + (\partial_\mu B)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - F^2 - G^2\right], \qquad (4.I)$$

$$\mathcal{L}_m = m\left(FA + GB - \frac{1}{2}i\bar{\psi}\psi\right),$$

$$\mathcal{L}_g = g\left(FA^2 - FB^2 + 2GAB - i\bar{\psi}\psi A + i\bar{\psi}\gamma_5\psi B\right).$$

Очевидно, что лагранжиан (4.I) инвариантен относительно группы Пуанкаре. При инфинитезимальных же суперпреобразованиях получаем, учитывая (3.2), что $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_m, \mathcal{L}_g$ преобразуются как компоненты различных мультиплетов

$$\delta\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}i\partial_\mu\left[\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_\mu\{G + \gamma_5 F - \gamma_\lambda\partial_\lambda(B - \gamma_5 A)\}\psi\right],$$

$$\delta\mathcal{L}_m = im\,\partial_\mu\left[\bar{\varepsilon}\gamma_\mu(A - \gamma_5 B)\psi\right], \qquad (4.2)$$

$$\delta\mathcal{L}_g = ig\,\partial_\mu\left[\bar{\varepsilon}\gamma_\mu(A - \gamma_5 B)^2\psi\right].$$

Поскольку L_0, L_m, L_g изменяются на полные дивергенции действие $S=\int L\, d^4x$ инвариантно относительно суперпреобразований.

К лагранжиану (4.I) можно было бы добавить член $L_\lambda = -\lambda F$, однако, он может быть исключен переопределением поля A: $A \to A + a$.

Поля F и G удовлетворяют уравнениям

$$F + mA + g(A^2 - B^2) = 0 \quad , \quad G + mB + 2gAB = 0$$

и могут быть исключены из лагранжиана. В результате получаем[x)]

$$\begin{aligned} L = &-\tfrac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 - \tfrac{1}{2} i\bar\psi\gamma_\mu\partial_\mu\psi \\ &-\tfrac{1}{2}m^2A^2 - \tfrac{1}{2}m^2B^2 - \tfrac{1}{2} im\bar\psi\psi \\ &- gmA(A^2+B^2) - \tfrac{1}{2}g^2(A^2+B^2)^2 - ig\bar\psi(A-\gamma_5 B)\psi. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Лагранжиан (4.3) относится к хорошо известному типу и,является ренормируемым. Если бы мы писали общий лагранжиан такого вида, не учитывая суперсимметрию, нам потребовалось бы три различных массы и семь констант связи. Вследствие же инвариантности относительно суперпреобразований скалярное, псевдоскалярное и спинорное поля имеют одинаковые массы и все константы связи выражаются через одну константу g .

Инвариантность модели относительно суперпреобразований проявляется также в существовании сохраняющегося тока[xx)]

$$J_\mu = \gamma_\lambda\partial_\lambda(A-\gamma_5 B)\gamma_\mu\psi - (F+\gamma_5 G)\gamma_\mu\psi. \qquad (4.4)$$

x) После исключения полей F и G закон преобразования (3.2)становится нелинейным. Другими словами, лагранжиан (4.3) инвариантен (с точностью до 4-дивергенции) относительно нелинейной реализации группы суперсимметрии.

xx) Относительно группы Лоренца ток J_μ преобразуется как произведение вектора и дираковского спинора. Компоненты J_μ содержат смесь спинов $3/2$ и $1/2$.

Из инвариантности теории относительно суперпреобразований следуют тождества Уорда, которые дают большое число соотношений между функциями Грина /I6/. Простейшие из них имеют вид

$$\langle TBB\rangle = \langle TAA\rangle, \langle TBG\rangle = \langle TAF\rangle, \langle TGG\rangle = \langle TFF\rangle,$$

$$i\gamma_\mu\partial_\mu\langle TAA\rangle + i\langle TFA\rangle - \langle T\psi\psi\rangle = 0$$

Как мы уже отмечали лагранжиан (4.I) является ренормируемым[x)]. Число типов расходящихся диаграмм может быть определено по формуле

$$d = 4 - I_{AF} - I_{BG} - E_A - E_B - 2E_F - 2E_G - \tfrac{3}{2}E_\psi \qquad (4.5)$$

где d - степень расходимости, $I_{\varphi_1\varphi_2}$ - число внутренних $\varphi_1\varphi_2$ линий, E_φ - число соответствующих внешних линий[xx)].

Из формулы (4.5) следует, что число констант перенормировки равно 20 (I0 - для пропагаторов, 7 - для вершин, 3- для четырехточечных функций). Однако из соотношений между функциями Грина, вытекающих из тождеств Уорда, следует, что независимых констант только три /I6/.

Таким образом, требование инвариантности относительно суперпреобразований уменьшает число параметров, необходимых для перенормировки лагранжиана, с двадцати до трех.

Перенормированные величины вводятся следующим образом/I6/:

$$\varphi_r = Z^{-\frac{1}{2}}\varphi \quad , \quad \varphi = A, B, F, G, \psi;$$

$$m_r = Zm + \delta m \quad , \quad g_r = Z^{\frac{3}{2}}Z'g, \qquad (4.6)$$

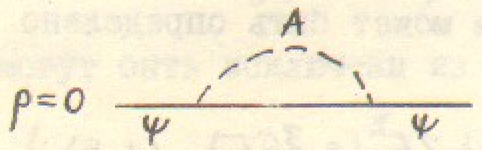
где Z - общая для всех полей (в силу суперсимметрии) константа перенормировки волновой функции, Z' - константа перенормировки константы связи.

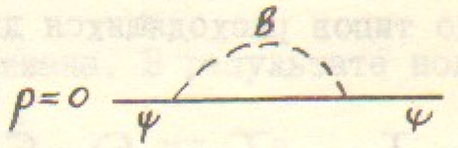
x) Регуляризация, совместимая с суперсимметрией, может быть проведена как методом Паули-Вилларса, так и введением более высоких степеней производных в кинетический член Лагранжиана /I6/.

xx)В высших порядках удобнее работать с лагранжианом, включающим поля F и G .

Наиболее интересные свойства модели (4.I) обнаруживаются при рассмотрении расходимостей.

Как показано в работе /7/ в однопетлевом приближении сокращаются все квадратичные расходимости. Кроме того конечны поправки к пропагаторам и вершинным функциям. Например, сокращаются расходящиеся члены в диаграммах





Таким образом, в однопетлевом приближении отсутствуют контрчлены перенормировки массы и заряда. Все логарифмические расходимости устраняются одним контрчленом – контрчленом перенормировки волновой функции. В результате, в однопетлевом приближении перенормировка сохраняет соотношения между массами и константами связи, вытекающие из суперсимметрии.

Можно показать, что контрчлены перенормировки массы и заряда отсутствуют во всех порядках теории возмущений /I6/. Для доказательства воспользуемся равенством

$$\frac{\partial}{\partial m} L_m = \frac{1}{2g}\frac{\partial}{\partial A} L_g .$$

Отсюда можно получить соотношение

$$\frac{\partial}{\partial m}\Gamma[R] = -\frac{m}{2g}\int R_F(y)\,d^4y + \frac{1}{2g}\int \frac{\delta\Gamma[R]}{\delta R_A(y)}\,d^4y, \qquad (4.7)$$

где $\Gamma[R]$ – производящий функционал одночастично-неприводимых функций Грина, R_φ –соответствующие классические поля. Продифференцируем (4.7) по R_F и положим R_φ =0 и p =0. В результате получаем, учитывая, что $\Gamma_{AF}(p^2=0)=m_r$: $m=Z^{-1}m_r$

В силу (4.6) $\delta m = 0$

Дифференцируя (4.7) дважды по R_ψ находим

$$\frac{\partial}{\partial m} Z^{-1}\Gamma_{\psi\psi}(p) = \frac{1}{2g} Z^{-\frac{3}{2}}\Gamma_{A\psi\psi}(p_A=0,p) .$$

Полагая $p=0$, и учитывая, что

$$\Gamma_{\psi\psi}(p=0)=m_r\ , \quad \Gamma_{A\psi\psi}(p_A=p=0)=2g_r$$

получаем

$$g_r = Z^{3/2}g$$

т.е.

$$Z' = 1 .$$

Таким образом, для устранения расходимостей в любом порядке достаточно единственного контрчлена – контрчлена перенормировки волновой функции.

Отсутствие контрчленов перенормировки массы и заряда в рассматриваемой модели приводит к отсутствию нетривиального решения уравнения Гелл-Манна-Лоу /I7/. Действительно, поскольку перенормированные масса и заряд связаны с голыми величинами соотношениями $m_r = Zm$, $g_r = Z^{3/2}g$, то для отношения функции Гелл-Манна-Лоу $\beta(g)$ и функции $\gamma(g)$, определяющей аномальную размерность полей, находим /I7/:

$$\frac{\beta(g)}{\gamma(g)} = 2\,\frac{\frac{\partial g_r}{\partial m}}{\frac{\partial \log Z}{\partial m}} = 3g .$$

Мы видим, что функции $\beta(g)$ и $\gamma(g)$ имеют нуль в совпадающих точках. Следовательно, функция $\beta(g)$ может обращаться в нуль только при $g=0$, в отличие от обычного для теорий, не обладающих суперсимметрией, предположения о существовании нетривиального корня функции $\beta(g)$. Вычисления функции $\beta(g)$ показывают /I7/, что рассматриваемая теория не является асимптотически свободной.

Массы всех частиц в модели (4.I) равны, следовательно, она не является достаточно реалистичной. Модель с различными массами можно получить, тем или иным способом нарушив инвариантность относительно суперпреобразований. Первая возможность состоит в явном нарушении суперсимметрии. Например, добавляя к лагранжиану (4.I) член $L_A = -cA$ в древесном приближении получаем/I6/:

$$m_A^2 = m_\psi^2 - \frac{2gc}{m_\psi}\ , \quad m_B^2 = m_\psi^2 + \frac{2gc}{m_\psi}\ , \qquad (4.8)$$

т.е. $\quad m_A^2 + m_B^2 = 2m_\psi^2 .$

В работе /I6/ показано, что в несимметричной теории с лагранжианом $L' = L + L_A$ перенормировка приводит к тем же результатам, что и в симметричном случае. В частности, достаточно только перенормировки волновой функции. В результате высшие порядки дают лишь конечные поправки к соотношению (4.8).

Вторая возможность получения спектра масс – спонтанное нарушение суперсимметрии. Однако в работах /I6,I8/ было показано, что решения, соответствующие спонтанному нарушению суперсимметрии в модели (4.I), нестабильны[x].

Мы видим, что отличительной чертой суперсимметричной модели является сокращение большого числа расходимостей. В связи с этим, естественно, возникает вопрос: Не может ли требование инвариантности относительно суперпреобразований превратить неперенормируемую теорию в ренормируемую? Другими словами, может ли неренормируемая по обычному подсчету степеней суперсимметричная теория оказаться ренормируемой после учета всех сокращений расходимостей?

Этот вопрос был исследован в работе /I9/. Рассматривался лагранжиан (4.I) с заменой $L_g \to L_f$, где

$$L_f = f\{FA^3 - GB^3 + 3GA^2B - 3FAB^2 - \frac{3}{2}i(A^2 - B^2)\bar{\psi}\psi + 3i\,AB\bar{\psi}\gamma_5\psi\}. \tag{4.9}$$

Взаимодействие (4.9) суперсимметрично, но неренормируемо по подсчету степеней.

В однопетлевом приближении возникает большое число сокращений расходимостей. Например, конечны двухточечная, шеститочечная и более высокие n –точечные функции. Однако четырехточечная функция логарифмически расходится. Для устранения этой расходимости необходимо ввести контрчлен

$$f^2\{(A^2+B^2)(F^2+G^2-(\partial_\mu A)^2-(\partial_\mu B)^2-i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi) - i(AF+BG)\bar{\psi}\psi + i(AG-BF)\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{4.10}$$

x) Отметим, что в силу спинорного характера генератора суперпреобразований, соответствующие голдстоуновские частицы должны быть фермионами /I8/.

$$+\left[\frac{1}{8}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi - i(A\partial_\mu B - B\partial_\mu A)\right]\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi\}$$

Это новое взаимодействие генерирует новые расходимости, для устранения которых требуется бесконечное число контрчленов. Таким образом, в модели с взаимодействием (4.9) число сокращений расходимостей, возникающих благодаря суперсимметрии, оказывается недостаточным, чтобы сделать теорию ренормируемой.

В настоящем разделе мы рассматривали модель (4.I), в терминах компонент скалярного мультиплета. Сложные трансформационные свойства полей A, B, ψ, F, G делают исследование специфических свойств этой модели, связанных с суперсимметрией (тождества Уорда, сокращение расходимостей) достаточно громоздким. Анализ модели существенно упрощается, если перейти от описания в терминах компонент к описанию в терминах суперполей. В частности, становится почти очевидным отсутствие контрчленов перенормировки массы и заряда /20/ (см.приложение II).

Общие свойства техники суперполей рассматривались в работе /23/. Отметим также книгу Ф.А.Березина "Метод вторичного квантования" (I965), содержащую общее исследование функционалов и континуального интегрирования для функций с антикоммутирующими значениями (§3).

У. Суперсимметрия и калибровочная инвариантность (случай абелевой группы)

В этом разделе мы рассмотрим пример теории инвариантной относительно как суперпреобразований, так и абелевых калибровочных преобразований /24/. Такого типа модели представляют интерес как возможные суперсимметричные обобщения обычной квантовой электродинамики.

Модель, предложенная в /24/, описывает взаимодействие безмассового векторного мультиплета с двумя скалярными мультиплетами (одним комплексным).

При обычных калибровочных преобразованиях

$$v_\mu' = v_\mu + \partial_\mu \Lambda$$
$$(\varphi_1 + i\varphi_2)' = e^{-ig\Lambda}(\varphi_1 + i\varphi_2) \tag{5.1}$$

где φ_1 и φ_2 обозначают любое из полей скалярных мультиплетов S_1 и S_2, g - константа связи. Легко видеть, что форма (5.1) не инвариантна относительно суперпреобразований. Преобразование (5.1) вместе с суперпреобразованием генерирует обобщенное калибровочное преобразование, в котором роль функции Λ играет скалярный мультиплет S, а роль векторного поля v_μ - векторный мультиплет V:

$$V' = V + \partial S,$$
$$(S_1 + iS_2)' = e^{-igS}(S_1 + iS_2), \tag{5.2}$$

где мультиплет ∂S определен в приложении I.

Если лагранжиан инвариантен относительно суперпреобразований и калибровочных преобразований, он автоматически инвариантен относительно обобщенных калибровочных преобразований. Метод построения лагранжиана, удовлетворяющего этому свойству, состоит в конструировании из векторного мультиплета V и скалярных мультиплетов S_1, S_2 векторного мультиплета, инвариантного относительно обобщенных калибровочных преобразований. Если ввести векторные мультиплеты (см. приложение I)

$$V_I = \frac{1}{2}(S_1 \times S_1 + S_2 \times S_2),$$
$$V_{II} = S_1 \wedge S_2$$

то искомый векторный мультиплет имеет вид /24/:

$$\frac{1}{4}\left[(V_I + V_{II})e^{2gV} + (V_I - V_{II})e^{-2gV}\right]. \tag{5.3}$$

Лагранжиан модели состоит из компоненты $\mathcal{D}$ мультиплета (5.3) плюс массовый член и плюс свободный лагранжиан для векторного мультиплета V.

Мы не будем выписывать лагранжиан в явном виде. Он является бесконечным степенным рядом по константе связи g и содержит все типы неренормируемых взаимодействий. Однако этот лагранжиан можно привести к значительно более простому виду, если учесть его инвариантность относительно обобщенных калибровочных преобразований (5.2). Действительно, конечным преобразованием (5.2) можно обратить в нуль все компоненты векторного мультиплета V, за исключением v_μ, λ и $\mathcal{D}$ /24/. В этой специальной калибровке $V^n = 0$ при $n > 2$, и выражение (5.3) принимает вид

$$\frac{1}{2}V_I + gV_{II}\cdot V + g^2 V_I \cdot V^2 \tag{5.4}$$

Лагранжиан модели в этой специальной калибровке состоит из компоненты $\mathcal{D}$ мультиплета (5.4), плюс массовый член для скалярного мультиплета и свободный лагранжиан векторного мультиплета. После исключения вспомогательных полей лагранжиан записывается в виде /24/:

$$\begin{aligned} L_1 = &-\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu A_1)^2 + (\partial_\mu A_2)^2 + (\partial_\mu B_1)^2 + (\partial_\mu B_2)^2 + i\bar{\psi}_1\gamma_\mu\partial_\mu\psi_1 + i\bar{\psi}_2\gamma_\mu\partial_\mu\psi_2\right] \\ &-\frac{1}{2}m^2(A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2) - \frac{i}{2}m(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) \\ &-\frac{1}{4}v_{\mu\nu}^2 - \frac{i}{2}\bar{\lambda}\gamma_\mu\partial_\mu\lambda \\ &-g\Big[v_\mu(A_1\partial_\mu A_2 - A_2\partial_\mu A_1 + B_1\partial_\mu B_2 - B_2\partial_\mu B_1 - i\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2) \\ &+ i\bar{\lambda}\{(A_1 + \gamma_5 B_1)\psi_2 - (A_2 + \gamma_5 B_2)\psi_1\}\Big] \\ &-\frac{g^2}{2}\left[v_\mu^2(A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2) + (A_1B_2 - A_2B_1)^2\right], \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$, λ - майорановский спинор,

$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 + iA_2)$ - комплексный скаляр,

$B = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + iB_2)$ - комплексный псевдоскаляр,

$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2)$ - комплексное спинорное поле.

Лагранжиан (5.5) относится к ренормируемому типу, однако, обладает тем недостатком, что его инвариантность не является очевидной (*manifest*). Это следует из неинвариантности специальной калибровки относительно суперпреобразований. Лагранжиан (5.5) инвариантен относительно комбинированного преобразования, включающего суперпреобразование (которое нарушает калибровочное условие) и обобщенное калибровочное преобразование (восстанавливающее калибровку) /24/.

Так же как и скалярная модель, модель (5.5) обнаруживает ряд интересных свойств /24/. В частности, в однопетлевом приближении все квадратично расходящиеся вклады в собственную энергию полей A_1, A_2 и ψ сокращаются и перенормированные массы равны:

$$m_{r A_1} = m_{r A_2} = m_{r\psi} = m(1-2igI),$$

где $I = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^4}$ – логарифмически расходящийся интеграл. Таким образом, в однопетлевом приближении, сохраняется соотношение между массами и константами связи, следующее из суперсимметрии.

Кроме этого, в однопетлевом приближении равен нулю аномальный магнитный момент спинорного поля $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2)$ /37/. Это связано с тем, что суперсимметричная модель /5.5/ содержит по сравнению с обычной электродинамикой дополнительное взаимодействие юкавовского типа, которое и дает вклад в аномальный магнитный момент точно компенсирующий (в однопетлевом приближении) обычный вклад.

Исследование высших порядков в этой модели более сложно, чем для скалярной модели. Это связано с тем, что явно суперсимметричный лагранжиан является бесконечным рядом, а явно ренормируемый лагранжиан (5.5) инвариантен лишь относительно комбинированных преобразований, что приводит к более сложным тождествам Уорда.

Отметим в заключение, что первая суперсимметричная модель, описывающая взаимодействие векторного и скалярного мультиплетов была предложена в работе /4/. При нулевой массе векторного мультиплета лагранжиан этой модели лишь незначительно отличается от

лагранжиана (5.5) (с заменой алгебры (I.3в) на (I.3г). Приведем полученные в этой работе выражения генераторов суперпреобразований через компоненты мультиплетов

$$Q = \frac{1}{i}\int d^3x\left(A^*(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\psi(x) + B(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\psi^c(x)\right)$$

и

$$Q = \frac{1}{i\sqrt{2}}\int d^3x\left(\chi(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\lambda(x) + v_\mu(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\gamma_\mu\lambda(x)\right),$$

где $\chi(x)$ – вещественное скалярное поле.

Спонтанное нарушение суперсимметрии в модели (5.5) обсуждалось в работе /25/.

УI. Суперсимметрия и неабелева калибровочная инвариантность

Модель, рассмотренную в предыдущем разделе, естественно обобщить на случай неабелевой калибровочной группы /I2,26/. Метод построения суперсимметричных лагранжианов совпадает с описанным в разделе У, поэтому мы перечислим лишь основные этапы. Рассмотрим для определенности группу $SU(N)$. Аналогично, абелевому случаю калибровочные преобразования и суперпреобразования генерируют обобщенные калибровочные преобразования:

$$\Phi_\pm \to \Phi'_\pm = e^{-i\Lambda_\pm}\Phi_\pm$$

и (6.I)

$$e^V \to e^{V'} = e^{-i\Lambda_-}e^V e^{i\Lambda_+}$$

В формуле (6.I) $\Phi_\pm$ – неприводимые суперполя, преобразующиеся по унитарному представлению группы $SU(N)$: $\Lambda_\pm$ – неприводимые суперполя параметров калибровочной группы; V – набор векторных суперполей, преобразующихся по регулярному представлению $SU(N)$.

Лагранжиан взаимодействия суперполей $\Phi_\pm$ с векторным суперполем, инвариантный относительно суперпреобразований и преобразований (6.I) имеет вид /I2,26/:

$$L_\varphi = \mathrm{Tr}\,(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D})^2\left[\varphi_+^+ e^V \varphi_+ + \varphi_-^+ e^V \varphi_-\right], \tag{6.2}$$

где φ^+ обозначает эрмитово сопряжение от φ . Соответственно для калибровочных полей

$$L_V = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D})^2\left[V_\mu V_\mu + V_\mu^+ V_\mu^+\right], \tag{6.3}$$

где

$$V_\mu = \frac{1}{2}\left[C^{-1}\gamma_\mu \frac{1+i\gamma_5}{2}\right]_{\alpha\beta}\mathcal{D}_\alpha\left(e^{-V}\mathcal{D}_\beta e^V\right).$$

В общей калибровке лагранжианы (6.2) и (6.3) являются бесконечными степенными по полям рядами и поэтому по внешнему виду, неренормируемы. Однако, аналогично абелевому случаю можно перейти в специальную калибровку, в которой отличны от нуля только компоненты v_μ, λ и $\mathcal{D}$ векторного мультиплета V .В этой калибровке лагранжиан (6.3) принимает вид

$$L_V = \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}v_{\mu\nu}^2 - \frac{i}{2}\bar{\lambda}\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu\lambda + \frac{1}{2}\mathcal{D}^2\right), \tag{6.4}$$

где

$$v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu + ig[v_\mu, v_\nu],$$

$$\mathcal{D}_\mu\lambda = \partial_\mu\lambda + ig[v_\mu, \lambda].$$

За исключением члена $\frac{1}{2}\mathcal{D}^2$ (равного нулю в силу уравнений движения для (6.4)) выражение (6.4) является лагранжианом для поля Янга-Миллса, взаимодействующего с майорановским спинором λ ,который преобразуется по регулярному представлению группы внутренней симметрии.

Таким образом, теория Янга-Миллса с майорановским спинором, преобразующимся по регулярному представлению автоматически является суперсимметричной.

В специальной калибровке и лагранжиан (6.2) приобретает ренормируемый вид. В случае, когда суперполе φ_+ преобразуется по

регулярному представлению группы $SU(N)$ и $Y=0$ имеем /26/ ($\varphi_- = 0$) :

$$L_\varphi = \mathrm{Tr}\Big\{-\frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu A)^2 - \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu B)^2 - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\mathcal{D}_\mu\psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2$$
$$+ m\left(FA + GB - \frac{i}{2}\bar{\psi}\psi\right) \tag{6.5}$$
$$+ ig\mathcal{D}[A,B] + g\bar{\lambda}[A + \gamma_5 B, \psi]\Big\},$$

где $\mathcal{D}_\mu A = \partial_\mu A + ig[v_\mu, A]$ и т.д.
ψ - майорановский спинор.

Сумма лагранжианов (6.4) и (6.5) описывает взаимодействие скалярного мультиплета (A, B, ψ, F, G) с мультиплетом калибровочных полей. Подчеркнем, что среди калибровочных полей имеются как векторные-v_μ , так и спинорные-λ .

В отличие от обычной теории Янга-Миллса лагранжиан (6.5) содержит дополнительно связь юкавовского типа и возникающее после исключения вспомогательного поля $\mathcal{D}$, взаимодействие полей A и B четвертой степени.

Как известно, модель, описываемая лагранжианом (6.4) является асимптотически свободной. Включение взаимодействия со скалярными полями обычно приводит к отсутствию асимптотической свободы. Лагранжиан (6.5) с этой точки зрения обладает интересным свойством. Если рассматривать взаимодействие (6.5) векторного мультиплета V с n скалярными мультиплетами типа φ_+ , преобразующимися по регулярному представлению группы $SU(N)$, то в однопетлевом приближении функция Гелл-Манна-Лоу имеет вид /26/

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}(3-n)N. \tag{6.6}$$

Следовательно, если предположить, что перенормировка не нарушает суперсимметрии модели (6.5), то при $n<3$ она является асимптотически свободной.

В лагранжианах (6.4) и (6.5) спинорные поля ψ и λ являются майорановскими. Более реалистичную модель можно сконструировать из (6.4) и (6.5) при $m=0$. Исключим вспомогательное поле $\mathcal{D}$, используя уравнение движения

$$\mathcal{D}+ig[A,B]=0$$

и введем комбинацию

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda+i\psi).$$

В результате получаем лагранжиан

$$L=Tr\Big\{-\frac{1}{4}v_{\mu\nu}^2-\frac{1}{2}(D_\mu A)^2-\frac{1}{2}(D_\mu B)^2-\frac{i}{2}\bar{\varphi}\gamma_\mu\overleftrightarrow{D}_\mu\varphi$$

$$-ig\bar{\varphi}[A+\gamma_5 B,\varphi]+\frac{g^2}{2}([A,B])^2\Big\}, \qquad (6.7)$$

где D_μ -ковариантная производная, определенная в (6.5). Эта теория является асимптотически свободной; функция Гелл-Манна--Лоу даётся формулой (6.6) с n =I.

Сохраняющийся суперток для модели (6,7) имеет вид

$$J_\mu=Tr\Big\{-\frac{1}{4}v_{\nu\rho}[\gamma_\nu,\gamma_\rho]\gamma_\mu\varphi+ig[A,B]\gamma_5\gamma_\mu\varphi$$

$$-i\gamma_\lambda D_\lambda(A-\gamma_5 B)\gamma_\mu\varphi\Big\}.$$

Лагранжиан (6.7) будучи инвариантным относительно инверсии, калибровочных преобразований и суперпреобразований, инвариантен также относительно преобразования

$$\varphi\to e^{i\alpha}\varphi,\quad \varphi^*\to e^{-i\alpha}\varphi^*, \qquad (6.8)$$

с независящими от координат α. Отметим, что это преобразование не может быть введено, если скалярный мультиплет не преобразуется по регулярному представлению группы внутренней симметрии.

Можно также построить $V\pm A$ схему с сохраняющимся фермионным квантовым числом /27/. Для этого необходимо скомбинировать два мультиплета $v_\mu^{(1)},\lambda^{(1)}$ и $v_\mu^{(2)},\lambda^{(2)}$, описываемых лагранжианом (6.4). Полный лагранжиан может быть записан в терминах комплексного спинора

$$\varphi=\frac{1}{2}(1-i\gamma_5)\lambda^{(1)}+\frac{1}{2}(1+i\gamma_5)\lambda^{(2)},$$

векторного и псевдовекторного полей

$$v_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_\mu^{(1)}+v_\mu^{(2)}),\quad a_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_\mu^{(1)}-v_\mu^{(2)}).$$

Полученный лагранжиан также инвариантен относительно преобразования (6.8).

Одна из основных задач в моделях (6.4), (6.5), (6.7) состоит в генерировании массы полей (в частности, векторных) способом, не нарушающим ренормируемости. Трудность заключается в том, что хотя лагранжианы (6.5) и (6.7) содержат скалярные поля, спонтанное нарушение симметрии, по крайней мере, в древесном приближении невозможно /26/.

УП. Объединение внутренних симметрий и суперсимметрии

Объединение внутренней симметрии и суперсимметрии, рассмотренное в предыдущих разделах является тривиальным, т.к.все компоненты супермультиплета преобразуются по одному и тому же представлению группы внутренней симметрии. Более интересная возможность была предложена в работах /I0/ и /28/. Алгебра такой группы в терминах двухкомпонентных спиноров имеет вид:

$$\{q_{Ai},q_{Bj}\}=\{q_{\dot{A}i},q_{\dot{B}j}\}=0, \qquad (7.I)$$

$$\{q_{Ai},q_{\dot{B}j}\}=2\delta_{ij}(\sigma_\mu)_{A\dot{B}}P_\mu,$$

$$[q_{Ai},P_\mu]=0,\quad [P_\mu,P_\lambda]=0.$$

где σ_μ – матрицы Паули, i,j –индексы группы внутренней симметрии (например $SU(N)$).

В случае группы $SU(2)$ представления алгебры (7.I) были построены в работе /I0/. Например, квантовые числа компонент неприводимого скалярного суперполя принимают значения (спин, изоспин)$^{\text{четность}}$ =

$$= (0,0)^{+}, \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)^{i}, (1,0)^{-}, (0,1)^{-}, \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)^{-i}, (0,0)^{+}$$

Объединение суперсимметрии с группой $SU(6)$ рассматривалось в /29/. Алгебра типа (7.I) исследовалась также методом суперполей /30/.

Основная надежда, связываемая с объединением групп внутренней симметрии с суперсимметрией, состояла в силу появления спинорных генераторов и соответственно антикоммутаторов, в возможности обойти теорему О'Раферти /3I/. Однако в работе /32/ показано, что теорема, доказанная в /3I/, обобщается и на случай конечных групп, содержащих спинорные генераторы. Действительно, из тождеств Якоби и лоренц-инвариантности следует, что

$$[P_\mu, [P_\nu, Q_{\alpha i}]] = 0, \tag{7.2}$$

где $Q_{\alpha i}$ –спинорные генераторы: α –спинорный индекс, i –набор индексов группы внутренней симметрии. Согласно леммам I и II работы /3I/ из (7.2) вытекает, что гильбертово пространство H_m с фиксированным $P^2 = m^2$ инвариантно относительно $Q_{\alpha i}$. Доказательство же инвариантности H_m относительно остальных (не спинорных) генераторов совпадает с приведенным в /3I/.

Таким образом, для любой конечной алгебры, содержащей подалгебру Пуанкаре и спинорные операторы (а также, естественно, совокупность унитарных операторов) пространство H_m с фиксированным $P^2 = m^2$ инвариантно относительно всех операторов этой алгебры.

Из обобщенной теоремы О'Раферти следует, что в неприводимых представлениях любых конечных групп (как содержащих, так и не содержащих спинорные генераторы), оператор P^2 может принимать либо одно фиксированное значение, либо непрерывный спектр

значений. Тем самым, включение спинорных операторов в группы симметрии не даёт возможность объяснить спектр масс частиц внутри мультиплетов.

УШ. Заключение

Наиболее привлекательным в суперсимметрии является, по-видимому, следующее. Во-первых, выход за рамки обычных алгебр и групп Ли, что приводит к симметриям, связывающим между собой бозоны и фермионы и к антикоммутирующим интегралам движения. Во-вторых, существование в суперсимметричных моделях большого числа сокращений расходимостей. И, наконец, появление спинорных калибровочных полей, что, по-видимому, может быть использовано для построения теории слабых (и электромагнитных) взаимодействий.

Отметим в заключение, работы /33,34,35,38,39/, не вошедшие в обзор, а также доклад Б.Зумино /36/.

Автор глубоко благодарен Ю.Б.Румеру за многочисленные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

В этом приложении мы приведем некоторые формулы для произведений скалярных и векторных мультиплетов /24/. Эти формулы используются в разделе У при построении суперсимметричных лагранжианов.

Пусть $A_1, B_1, \psi_1, F_1, G_1$ и $A_2, B_2, \psi_2, F_2, G_2$ являются компонентами двух скалярных мультиплетов S_1 и S_2 соответственно. Из мультиплетов S_1 и S_2 можно симметричным образом построить другой скалярный мультиплет $S_1 \cdot S_2$ с компонентами[x)]

$$A' = A_1 A_2 - B_1 B_2 , \qquad B' = A_1 B_2 + B_1 A_2$$

$$\psi' = (A_1 - \gamma_5 B_1)\psi_2 + (A_2 - \gamma_5 B_2)\psi_1 , \tag{П.I.I}$$

$$F' = F_1 A_2 + F_2 A_1 + G_1 B_2 + G_2 B_1 - i\bar{\psi}_1 \psi_2 ,$$

$$G' = G_1 A_2 + G_2 A_1 - F_1 B_2 - F_2 B_1 + i\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 .$$

Из двух скалярных мультиплетов можно построить векторный мультиплет, который мы обозначим $S_1 \times S_2 = S_2 \times S_1$, с компонентами $C', \chi', M', N', v'_\mu, \lambda', D'$, где

$$C' = A_1 A_2 + B_1 B_2 ,$$

$$\chi' = (B_1 - \gamma_5 A_1)\psi_2 + (B_2 - \gamma_5 A_2)\psi_1 , \tag{П.I.2}$$

$$M' = F_1 B_2 + F_2 B_1 + G_1 A_2 + G_2 A_1$$

$$N' = G_1 B_2 + G_2 B_1 - F_1 A_2 - F_2 A_1 ,$$

---

x) Формулы (П.I.I) получаются из (формулы Р.Ш.п.4) с учетом

$$\tilde{A} = A_1 + i B_1 , \qquad \tilde{F} = F_1 + i G_1 .$$

$$v'_\mu = B_1 \partial_\mu A_2 + B_2 \partial_\mu A_1 - A_1 \partial_\mu B_2 - A_2 \partial_\mu B_1 - i\bar{\psi}_1 \gamma_5 \gamma_\mu \psi_2$$

$$\lambda' = (G_1 + \gamma_5 F_1)\psi_2 + (G_2 + \gamma_5 F_2)\psi_1 - \partial_\mu (B_2 + \gamma_5 A_2)\gamma_\mu \psi_1 - \partial_\mu (B_1 + \gamma_5 A_1)\gamma_\mu \psi_2 ,$$

$$D' = 2F_1 F_2 + 2G_1 G_2 - 2\partial_\mu A_1 \cdot \partial_\mu A_2 - 2\partial_\mu B_1 \cdot \partial_\mu B_2 - i\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 - i\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 .$$

Существует другая возможность построить векторный мультиплет из двух скалярных, в отличие от (П.I.2) антисимметричный $S_1 \wedge S_2 = - S_2 \wedge S_1$:

$$C' = A_1 B_2 - A_2 B_1 ,$$

$$\chi' = (A_1 + \gamma_5 B_1)\psi_2 - (A_2 + \gamma_5 B_2)\psi_1 ,$$

$$M' = A_1 F_2 - A_2 F_1 - B_1 G_2 + B_2 G_1 ,$$

$$\tag{П.I.3}$$

$$N' = A_1 G_2 - A_2 G_1 + B_1 F_2 - B_2 F_1 ,$$

$$v'_\mu = A_1 \partial_\mu A_2 - A_2 \partial_\mu A_1 + B_1 \partial_\mu B_2 - B_2 \partial_\mu B_1 - i\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 ,$$

$$\lambda' = (F_2 - \gamma_5 G_2)\psi_1 - (F_1 - \gamma_5 G_1)\psi_2 + \partial_\mu (A_2 - \gamma_5 B_2)\gamma_\mu \psi_1 - \partial_\mu (A_1 - \gamma_5 B_1)\gamma_\mu \psi_2 ,$$

$$D' = 2F_2 G_1 - 2F_1 G_2 + 2\partial_\mu A_2 \cdot \partial_\mu B_1 - 2\partial_\mu A_1 \cdot \partial_\mu B_2 + i\bar{\psi}_1 \gamma_5 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 - i\bar{\psi}_2 \gamma_5 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 .$$

Из двух векторных мультиплетов V_1 и V_2 можно построить симметричным образом вектoрный мультиплет $V' = V_1 \cdot V_2 = V_2 \cdot V_1$ /24/.

Наконец, если S скалярный мультиплет с компонентами A, B, ψ, F, G мы можем построить вектoрный мультиплет с компонентами

$$C' = B, \quad \chi' = \psi, \quad M' = F, \quad N' = G,$$

$$v'_\mu = \partial_\mu A, \quad \lambda' = 0, \quad \mathcal{D}' = 0$$

Обозначим этот векторный мультиплет через ∂S .

Используя формулы (П.I.I) - (П.I.3) нетрудно проверить, что

$$(S S_1) \times S_2 - (S S_2) \times S_1 = 2 (S_1 \wedge S_2) \cdot \partial S$$

и

$$(S S_1) \wedge S_1 = -(S_1 \times S_1) \cdot \partial S$$

где S, S_1 и S_2 любые три скалярных мультиплета.

П Р И Л О Ж Е Н И Е II

Рассмотрим модель (4.I), используя технику суперполей. Лагранжиан (4.I) записывается в виде[x)] /I3/:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D})^2(\varphi_+ \varphi_-) - \frac{m}{2}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D})(\varphi_+^2 + \varphi_-^2) - \frac{g}{6}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D})(\varphi_+^3 + \varphi_-^3), \quad (\text{П.2.I})$$

где $\mathcal{D}$ -ковариантная производная, $\varphi_\pm$ -неприводимые суперполя, удовлетворяющие условиям (3.I0).

Выражения для голых пропагаторов суперполей могут быть получены различными способами. Мы будем следовать /I3 и 20/. Рассмотрим пропагатор $\langle T(\varphi_+(x_1,\theta_1)\,\varphi_-(x_2,\theta_2))\rangle$. Используя инвариантность относительно сдвигов и суперпреобразований, находим

$$\langle T(\varphi_+(x_1,\theta_1)\,\varphi_-(x_2,\theta_2))\rangle =$$

$$= \langle T(\varphi_+(x_1 - x_2 + \tfrac{i}{2}\bar{\theta}_1 \gamma \theta_2, \theta_1 - \theta_2)\,\varphi_-(0,0))\rangle . \quad (\text{П.2.2})$$

Т.к. $\varphi_-(0,0) = A_-(0)$, то из (П.22) имеем

$$\langle T(\varphi_+(x,\theta)\,\varphi_-(0,0))\rangle = \left[\exp - \tfrac{1}{4}\bar{\theta}\gamma_\mu \partial_\mu \gamma_5 \theta\right] \langle T(A_+(x) A_-(0))\rangle =$$

$$= \left[\exp - \tfrac{1}{4}\bar{\theta}\gamma_\mu \gamma_5 \partial_\mu \theta\right] G(x,m),$$

где

$$(\Box_x^2 - m^2)\, G(x-y, m) = -\delta(x-y)$$

Следовательно, $G_{+-} = \langle T(\varphi_+(x_1,\theta_1)\,\varphi_-(x_2,\theta_2))\rangle =$

$$= \left[\exp - \tfrac{1}{4}(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)\gamma_\mu \partial_{z\mu}(\theta_1 - \theta_2)\right] G(z,m), \quad (\text{П.2.3})$$

---

x) Эквивалентность лагранжиана (П.2.I) лагранжиану (4.I) нетрудно проверить, воспользовавшись формулами (3.I8),(3.I9) и $A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A \pm iB)$, $F_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(F \mp iG)$.

где $\quad z_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu} + \frac{i}{2}\bar{\theta}_1\gamma_\mu\theta_2$

Соответственно, в импульсном представлении

$$G_{+-}(p;\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{p^2-m^2}\, exp\Big\{\frac{i}{4}\big[\bar{\theta}_1\gamma_\mu\gamma_5 p_\mu\theta_1 + \bar{\theta}_2\gamma_\mu\gamma_5 p_\mu\theta_2\big] + \bar{\theta}_1\gamma_\mu p_\mu\theta_2^-\Big\}, \qquad (\text{П.2.4})$$

где $\quad \theta^{\pm} = \frac{1\pm i\gamma_5}{2}\theta$

Для остальных пропагаторов аналогично получаем

$$G_{\substack{++\\--}}(p;\theta_1,\theta_2) = -\frac{m(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2)(\theta_1^{\pm}-\theta_2^{\pm})}{4(p^2-m^2)}\, exp\Big\{\pm\frac{i}{4}\big[\bar{\theta}_1\gamma_\mu\gamma_5 p_\mu\theta_1 - \bar{\theta}_2\gamma_\mu\gamma_5 p_\mu\theta_2\big]\Big\}. \qquad (\text{П.2.5})$$

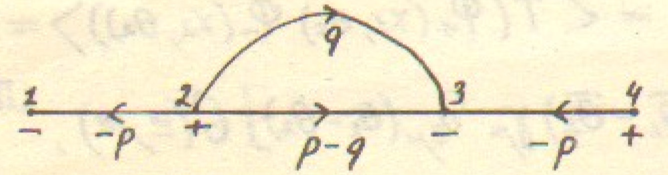
Отметим, что члены $\bar{\theta}_i\gamma_\mu\gamma_5 p_\mu\theta_i$ в пропагаторах всегда сокращаются (в силу сохранения импульса), если все линии, входящие в вершину являются внутренними.

Рассмотрим для простоты безмассовую теорию /20/. При $m=0$ существует только пропагатор G_{+-} и вершины φ_+^3 и φ_-^3. Из формы взаимодействия следует, что каждой внутренней вершине соответствует величина:

$$\Gamma = \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}(0,\theta) = -\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\bar{\theta}}.$$

Вычислим поправку к G_{+-} в однопетлевом приближении. Она имеет вид[x)]:

(П.2.6)



x) Одна фейнмановская диаграмма для суперполей эквивалентна определенной совокупности обычных фейнмановских диаграмм.

Используя перечисленные выше фейнмановские правила получаем

$$M^{(2)}(p;\theta_1,\theta_4) = \frac{1}{(p^2)^2}\int\frac{d^4q}{q^2(p-q)^2}\, exp-\frac{i}{4}\big[\bar{\theta}_1\gamma_\mu\gamma_5 p_\mu\theta_1 + \bar{\theta}_4\gamma_\mu\gamma_5 p_\mu\theta_4\big]\,\Gamma(\theta_2)\Gamma(\theta_3)\, exp\big\{-\bar{\theta}_2\gamma_\mu p_\mu\theta_1^- + \bar{\theta}_2\gamma_\mu p_\mu\theta_3^- - \bar{\theta}_4\gamma_\mu p_\mu\theta_3^-\big\}.$$

Не выполняя вычислений мы видим, что диаграмма (П.2.6) расходит только логарифмически, т.к. зависимость от q в экспонентах сократилась[x)]. Наконец, учитывая свойства спиноров θ находим

$$M^{(2)}(p;\theta_1,\theta_4) = 4\int\frac{d^4q}{q^2(p-q)^2}\times exp\Big\{-\frac{i}{4}\big[\bar{\theta}_1\gamma_\mu\gamma_5 p_\mu\theta_1 + \bar{\theta}_4\gamma_\mu\gamma_5 p_\mu\theta_4\big] - \bar{\theta}_4\gamma_\mu p_\mu\theta_1^-\Big\}. \qquad (\text{П.2.7})$$

Прямые вычисления показывают, что логарифмическая расходимость сокращается контрчленом $(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D})^2(\varphi_+\varphi_-)$, который соответствует перенормировке волновой функции.

Легко видеть, что перенормировка массы отсутствует. Это следует из невозможности построить поправки к пропагаторам G_{++} и G_{--} в любом порядке теории возмущений (это утверждение очевидно в однопетлевом приближении). Аналогично, в однопетлевом приближении отсутствует перенормировка константы связи, т.к. невозможно построить однопетлевую диаграмму с тремя вершинами. Таким образом, в соответствии с разделом IУ, единственная однопетлевая расходимость связана с перенормировкой волновой функции.

x) Если работать в терминах компонент A, B, ψ, F, G, то имеется возможность квадратичной расходимости из-за фермионной петли.

При переходе к массивной теории возникают пропагаторы G_{++} и G_{--}. Однако поправки к ним конечны, так что контрчлен перенормировки массы отсутствует. Аналогично для заряда.

Использование суперполей даёт еще большие преимущества при анализе более высоких порядков теории возмущений /2I,22/. В частности, из формулы для степени расходимости примитивных диаграмм, полученной в /2I/ следует, в согласии с разделом IУ, что в любом порядке единственной расходимостью является логарифмически расходящаяся перенормировка волновой функции.

Техника суперполей может быть, естественно, применена и к другим теориям. Рассмотрим, например, теорию с взаимодействием $f(\bar{D}D)(\varphi_+^4+\varphi_-^4)$ (что эквивалентно (49)). Анализ однопетлевых диаграмм совпадает с аналогичным анализом для взаимодействия (П.2.I). Этот анализ показывает, что единственная однопетлевая расходимость является логарифмической расходимостью четырехточечной функции. Соответствующий контрчлен имеет вид $f^2(\bar{D}D)^2(\varphi_+^2\varphi_-^2)$, что в согласии с /I9/ (см.формулу (4.I0)) приводит к неренормируемости теории.

Литература

I. Ф.А.Березин, Г.И.Кац, Математический сборник,Новая серия, 82, 343 /I970/.

2. Е.П.Лихтман, Краткие сообщения по физике,5,33/I97I/.

3. Е.П.Лихтман, Препринт ФИАН, № 4I /I97I/.

4. Ю.А.Гольфанд, Е.П.Лихтман, Письма ЖЭТФ,I3,452/I97I/.
Ю.А.Гольфанд, Е.П.Лихтман,Сборник"Проблемы теоретической физики.Памяти И.Е.Тамма",стр,37,"Наука",I972.

5. В.П.Акулов, Д.В.Волков. Письма ЖЭТФ,I6,62I /I972/, ТМФ, I8, 39 /I974/.

6. J Wess, B.Zumino,Nucl.Phys., B70, 39 (1974).

7. J.Wess, B.Zumino, Phys. Lett., B49, 52 (1974).

8. S.Ferrara, Nucl.Phys., B77, 73 (1974).

9. A.Salam, J.Strathdee, Nucl.Phys., B76, 477 (1974).

10. A.Salam, J Strathdee, Unitary representations of super-gauge symmetries, ICTP, Trieste preprint IC74/16 (1974).

11. S.Ferrara, J.Wess, B.Zumino, Phys.Lett.,B51,239(1974).

12. A.Salam, Y.Strathdee, Phys.Lett.,B51,353 (1974).

13. A.Salam, J.Strathdee, On superfields and Fermi - Bose symmetry,ICTP, Trieste preprint IC/74/42 (1974).

14. P.P.Srivastava, On a generalized supergauge transformations and superfields, ICTP, Trieste preprint IC/74/74 (1974).

15. C.Fronsdal, Super-gauge groups, ICTP, Trieste preprint IC/74/21 (1974).

16. J.Iliopoulos, B.Zumino, Nucl. Phys., B76,310 (1974).

17. S.Ferrara, J.Iliopoulos, B.Zumino,Nucl.Phys.,B77,413 (1974).

18. A.Salam, J.Strathdee, Phys.Lett.,B49, 465 (1974).

19. W.Lang, J.Wess, Investigation of nonrenormalizable Langrangian model invariant under supertransformations,University of Karlsruhe preprint (1974).

21. D.M.Capper, G.Leibrant, On the Degree of Divergence of Feynman diagrams in superfield theories,ICTP,Trieste preprint IC/74/79 (1974).

20. D.M.Capper,Feynman graphs for superfields, ICTP, Trieste preprint IC/74/66 (1974).

22. R.Delbourgo, ICTP, preprint IC/73/44 (1974).

23. A.Salam, J.Strathdee, Feynman rules for superfields, ICTP,Trieste preprint IC/74/85 (1974).

24. J.Wess, B.Zumino, Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics, CERN preprint TH-1857 (1974).Nucl.Phys.,B78,1(1974).

25. P.Fayet, J.Iliopoulos, Orsay preprint (1974).

26. S.Ferrara, B.Zumino, Supergauge invariant Yang-Mills theory, CERN preprint TH-1866 (1974).

27. R.Delburgo, A.Salam, J.Strathdee,ICTP, Trieste preprint IC/74/45 (1974).

28. J.Wess, B.Zumino, CERN preprint (1974).

29. A.Salam, J.Strathdee, SU(6) and supersymmetry, ICTP, Trieste preprint IC/74/80 (1974).

30. P.H.Dondi, M.Sohnius, Supergauge transformations with isospin symmetry, Karlsruhe Universitet preprint (1974).

31. L.O'Raifeartaigh, Phys. Rev. Lett., 14,575 (1965).

32. B.G.Konopelchenko, O'Raifeartaigh's theorem for the groups, containing spinor generators, Novosibirsk, Institute of Nuclear Physics preprint (1974).

33. G.Woo, A new supergauge model with divergence cancellations and a Goldstoyne fermion, preprint, Cambridge, DAMTP, 74-12 (1974).

34. D.H.Tchrakian, Superfields for any spin, preprint Maynooth (1974).

35. W.Rühl, Yunn B.C., Superfields as Representations, preprint Kaiserlautern (1974 .

36. B.Zumino, Fermi-Bose supersymmetry (Supergauge symmetry in four dimensions), CERN preprint TH-1901 (1974).

37. S.Ferrara,E.Remiddi,Absence of anomalous magnetic moment in a supersymmetric abelian gauge theory,CERN preprint TH-1935(1974).

38. S.A.Adjei,D.A.Akyeampong,The spinor superfield and Bose-Fermi symmetry, ICTP,Trieste preprint IC/74/96 (1974).

39. L.Mezincescu,V.Ogievetsky, Action principle in superspace, JINR preprint E2-8277,Dubna(1974).

октябрь 1974

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати I4.XI-I974г. МН 0856I
Усл. 2,0 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ №96

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,мп