55

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 101

Б.Г.Конопельченко

ГРУППЫ СИММЕТРИИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Новосибирск

1975

Б.Г.Конопельченко

ГРУППЫ СИММЕТРИИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматриваются группы симметрии и суперсимметрии в квантовой теории поля.

THE GROUPS OF SYMMETRY IN THE QUANTUM FIELD THEORY

B.G.Konopel'chenko

Abstract

The groups of symmetry and supersymmetry in the quantum field theory are considered.

I. Введение

В настоящей работе дан обзор групп симметрии в квантовой теории поля. Рассмотрены пространственно-временные группы симметрии (группы Лоренца, Пуанкаре, Вейля, конформная группа) и группы внутренней симметрии как со скалярными, так и со спинорными параметрами (группы суперсимметрии). Основное внимание в обзоре обращено на возможность существования тех или иных групп симметрии. Показано, что требование релятивистской инвариантности приводит к сильным ограничениям на структуру возможных групп симметрии.

План работы следующий. Во втором разделе кратко рассмотрены группы Лоренца и Пуанкаре. Группы Вейля и конформная группа описаны в третьем разделе. В четвертом разделе показано, что группами Лоренца, Пуанкаре, Вейля и конформной группой исчерпываются возможные конечные пространственно-временные группы симметрии. Группы внутренней симметрии обсуждаются в пятом разделе. В следующем, шестом, разделе рассматриваются группы преобразований со спинорными параметрами (группы суперсимметрии). Общая структура возможных групп суперсимметрии описана в седьмом, восьмом и девятом разделах. В десятом разделе рассмотрен формализм суперпространства, дающий возможность представить группы суперсимметрии как группы преобразований. В одиннадцатом разделе обсуждаются возможные типы обобщенных групп внутренней симметрии.

II. Группы Лоренца и Пуанкаре

I. Поскольку группы Лоренца и Пуанкаре хорошо известны, мы рассмотрим их кратко.

Будем обозначать координаты пространства Минковского через x_μ, где μ =0,I,2,3.

Группа Лоренца является группой непрерывных, однородных преобразований координат

$$x_\mu \to x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu , \qquad (II.I)$$

сохраняющих Лоренцевский квадрат $x^2 = x_\mu x_\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Группа Лоренца, будучи группой вращений четырехмерного псевдоэвклидова пространства, имеет шесть непрерывных параметров и соответственно шесть генераторов $J_{\mu\nu}$ ($J_{\mu\nu} = - J_{\nu\mu}$). Генераторы $J_{\mu\nu}$ удовлетворяют хорошо известным перестановочным соотношениям

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\tau}] = i(g_{\mu\tau} J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} J_{\mu\tau} - g_{\mu\rho} J_{\nu\tau} - g_{\nu\tau} J_{\mu\rho}) \qquad (II.2)$$

где $g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$.

Операторы Казимира группы Лоренца имеют вид:

$$C_1 = J_{\mu\nu} J_{\mu\nu} ,$$
$$C_2 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} J_{\mu\nu} J_{\rho\tau} . \qquad (II.3)$$

Таким образом, неприводимые представления группы Лоренца классифицируются по значениям двух чисел. Нас будут интересовать неприводимые конечнорядные представления. Будем обозначать эти представления $\mathcal{D}(j,k)$. Числа j и k принимают значения $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots,$. Размерность представления $\mathcal{D}(j,k)$ равна $(2j+1)(2k+1)$ (см.например /I,2/).

Все лоренц-ковариантные поля, преобразующиеся по тем или иным представлениям группы Лоренца, распадаются на два класса: тензорные поля – $j+k$ – целое и спинорные – $j+k$ – полуцелое. Такое разбиение всех полей связано как с тем, что поля первого класса преобразуются по однозначным представлениям, а второго – по двузначным представлениям группы Лоренца, так и с тем, что при квантовании для первых полей необходимо рассматривать коммутатор, а для вторых – антикоммутатор (теорема о связи спина и статистики /3/). Всевозможные типы полей

можно записать единым образом, используя спинорные обозначения. Для этого вводятся два типа индексов: без точек и с точками, принимающие по два значения. Величина, преобразующаяся по неприводимому представлению $\mathcal{D}(j,k)$ группы Лоренца, имеет вид спинтензора $T_{A_1 \dots A_{2j} \dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2k}}$, полностью симметричного в каждом типе индексов (A_i =I,2; $\dot{B}_i$ =İ,2̇). Роль инвариантной метрики в пространстве спинтензоров играют антисимметричные тензоры ϵ_{AB} и $\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}$ ($\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$ и $\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = -\epsilon_{\dot{B}\dot{A}}$). Формализм спинтензоров удобен в целом ряде вопросов и мы им воспользуемся в разделах 6–8.

2. Группа Пуанкаре содержит кроме лоренцевских преобразований (2.I) сдвиги

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + a_\mu \qquad (II.4)$$

и оставляет инвариантным конус $(x-y)^2$. Группа Пуанкаре является десяти-параметрической группой и ее генераторы $J_{\mu\nu}$, P_ρ удовлетворяют перестановочным соотношениям (плюс соотношения (II.2)):

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu),$$
$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \qquad (II.5)$$

Группа Пуанкаре имеет два оператора Казимира

$$C_1 = P^2 ,$$
$$C_2 = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J_{\mu\nu} P^2 - J_{\mu\sigma} J_{\nu\sigma} P_\mu P_\nu . \qquad (II.6)$$

В неприводимых представлениях с $P^2 = M^2 > 0$ $C_2 = M^2 S(S+1)$, где S – спин ($S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots,$) . Таким образом, при $M^2 > 0$ неприводимые представления группы Пуанкаре классифицируются по значениям массы M и спина S. В представлениях с M =0 вторым оператором Казимира является спиральность λ ($\lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots,$). Отметим, что в представлениях с $M^2 \geq 0$ имеется дополнительный инвариант $sgn\, p_0 = \frac{p_0}{|p_0|}$

В силу релятивистской инвариантности векторы пространства состояний квантовой теории поля преобразуются по унитарным представлениям группы Пуанкаре. Соответственно, квантовые поля, описывающие элементарные частицы, преобразуются по неприводимым унитарным представлениям группы Пуанкаре и, следовательно, классифицируются по значениям массы M и спина S (при $M=0$, по значениям спиральности).

Однако во многих случаях (например, при построении лагранжианов) удобно использовать поля, преобразующиеся по приводимым представлениям группы Пуанкаре, а именно, поля $\psi^{(j,k)}_{M}$ с массой M, преобразующиеся по представлениям $\mathcal{D}(j,k)$ группы Лоренца. Поскольку представление $\mathcal{D}(j,k)$ группы Лоренца является прямой суммой $\left(\mathcal{D}(j,k)=\sum_{m=|j-k|}^{j+k}\oplus\, \mathcal{D}_{SO(3)}(m)\right)$ неприводимых представлений $\mathcal{D}_{SO(3)}(m)$ группы трехмерных вращений, то поле $\psi^{(j,k)}_{M}$ при $M^2>0$ преобразуется по прямой сумме неприводимых представлений группы Пуанкаре со спектром спинов $j+k, j+k-1, \ldots, |j-k|$. Наиболее известные примеры полей такого типа - векторное поле V_μ $(\mathcal{D}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ и симметричное тензорное поле $h_{\mu\nu}$ $(\mathcal{D}(1,1))$. Присутствие различных значений спина у полей типа $\psi^{(j,k)}_{M>0}$, приводит к ряду проблем, связанных с исключением лишних компонент.

В безмассовом случае соответствие между парой (j,k) и спиральностью устанавливается теоремой Вайнберга /4/: в предположении о положительности метрики, поле $\psi^{(j,k)}_{M=0}$ описывает безмассовую частицу со спиральностью $\lambda=k-j$ и обратно, безмассовая частица со спиральностью λ может описываться только полем $\psi^{(j,k)}_{M=0}$ с $k-j=\lambda$. В дальнейшем мы будем иметь дело как с неприводимыми, так и с приводимыми $(\psi^{(j,k)}_{M})$ квантовыми полями.

Приведем в заключение перестановочные соотношения пуанкаре-ковариантного квантового поля с генераторами группы Пуанкаре, т.е. инфинитезимальную запись трансформационных свойств поля $\psi^{(j,k)}_{M}$:

$$\left[J_{\mu\nu}, \psi^{(j,k)}_{M}(x)\right]=i\left(x_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}-x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\Sigma_{\mu\nu}\right)\psi^{(j,k)}_{M}(x), \quad (II.7)$$

$$\left[P_\mu, \psi^{(j,k)}_{M}(x)\right]=i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^{(j,k)}_{M}(x).$$

Итак, мы видим, что требование релятивистской инвариантности теории существенно ограничивает возможные типы полей, а также их свойства. Однако еще остается большая свобода, ограничить которую призваны другие симметрии в той или иной степени связанные с динамикой. Координаты пространства Минковского и лоренц-ковариантные поля $(\psi^{(j,k)}_{M})$ являются элементами того пространства, на котором действуют эти группы.

3. Конформная группа

Группы Лоренца и Пуанкаре являются точными группами симметрии квантовой теории поля. Большинство же остальных групп симметрии являются приближенными и становятся точными лишь в некоторых предельных условиях. В данной работе мы будем интересоваться принципиальной возможностью существования той или иной группы симметрии. Поэтому упомянутые выше предельные условия обсуждаются очень кратко.

Начнем с пространственно-временных групп. Поскольку квантовая теория поля должна быть релятивистски инвариантной, то любая пространственно-временная группа симметрии квантовой теории поля (приближенная или нет) должна содержать в качестве подгруппы группу Пуанкаре. В этом и следующем разделах мы рассмотрим возможные группы преобразований в пространстве Минковского, являющиеся расширениями группы Пуанкаре.

Возможную структуру таких групп подсказывают свойства уравнений, описывающих безмассовые поля. А именно, уравнения для безмассовых полей инвариантны относительно преобразований, которые образуют так называемые группу Вейля и конформную группу.

Конформная группа содержит (см.например /6,7/):

I) подгруппу Пуанкаре

$$x_\mu \to x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu}x_\nu + a_\mu,$$

2) специальные конформные преобразования

$$x_\mu \to x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{1 - 2(cx) + c^2 x^2},$$

и 3) дилатацию (растяжение)

$$x_\mu \to x'_\mu = \lambda x_\mu,$$

где c_μ и λ – параметры соответствующих преобразований. Группа Пуанкаре и дилатация образуют группу Вейля, которая в свою очередь является подгруппой конформной группы. Мы будем рассматривать конформную группу, параллельно формулируя результаты для группы Вейля.

Преобразования I5-параметрической конформной группы оставляют инвариантными световой конус $(x-y)^2 = 0$ и углы между мировыми линиями. Для преобразований группы Пуанкаре и дилатации это очевидно. Для специального конформного преобразования это свойство следует из формулы преобразования $(x-y)^2$:

$$(x-y)^2 \to (x'-y')^2 = \frac{(x-y)^2}{(1-2(cx)+c^2x^2)(1-2(cy)+c^2y^2)}.$$

Из этой формулы вытекает, что специальное конформное преобразование может менять знак $(x-y)^2$ и $x_0 - y_0$. Возникающие при этом трудности с причинностью в пространстве Минковского могут быть устранены переходом к бесконечнолистному накрывающему пространству /7-9/.

Выше мы рассмотрели непрерывные конформные преобразования. Наиболее важным дискретным конформным преобразованием является инверсия R относительно единичной гиперсферы

$$x_\mu \xrightarrow{R} x'_\mu = R x_\mu = \frac{x_\mu}{x^2} \qquad (3.I)$$

Используя R -преобразование, специальное конформное преобразование K можно представить в компактной форме:

$$x_\mu \xrightarrow{K} x'_\mu = K x_\mu = R P R x_\mu,$$

где P обозначает сдвиг $x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + c_\mu$. Из-за сложного вида нелинейного специального конформного преобразования часто значительно удобнее работать с R -преобразованием.

Рассмотрим алгебру конформной группы. Генераторы лоренцевских преобразований $J_{\mu\nu}$, сдвигов P_ρ, специальных конформных преобразований K_μ и дилатации D удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям /6/:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\tau}] = i(g_{\mu\tau} J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} J_{\mu\tau} - g_{\mu\rho} J_{\nu\tau} - g_{\nu\tau} J_{\mu\rho}),$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu), \qquad (3.I)$$

$$[J_{\mu\nu}, K_\rho] = i(g_{\mu\rho} K_\nu - g_{\nu\rho} K_\mu),$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [K_\mu, K_\nu] = 0,$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2i(g_{\mu\nu} D + J_{\mu\nu}),$$

$$[J_{\mu\nu}, D] = 0, \; [P_\mu, D] = iP_\mu, \; [K_\mu, D] = -iK_\mu.$$

Отметим, что конформная алгебра содержит две подалгебры изоморфные алгебре Пуанкаре – подалгебру с базисными элементами $J_{\mu\nu}$ и P_ρ и подалгебру $J_{\mu\nu}$, K_ρ. Т.к. $R J_{\mu\nu} R = J_{\mu\nu}$, $R P_\mu R = K_\mu$, то эти подалгебры связаны R -преобразованием.

Конформная группа имеет три оператора Казимира. Они имеют вид:

$$C_2 = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J_{\mu\nu} + K_\mu P_\mu - 4iD - D^2,$$

$$C_3 = \frac{1}{4}(W_\mu K_\mu + K_\mu W_\mu) - \frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} D J_{\mu\nu} J_{\rho\tau}, \quad (3.2)$$

$$C_4 = \frac{1}{4}\Big\{ K_\mu K_\mu P_\nu P_\nu - 4 K_\mu J_{\mu\nu} J_{\nu\rho} P_\rho -$$

$$- 4 K_\mu J_{\mu\nu} P_\nu (D + 6i) + \frac{3}{4}(J_{\mu\nu} J_{\mu\nu})^2 +$$

$$+ \frac{1}{16}(\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} J_{\mu\nu} J_{\rho\tau})^2 + J_{\mu\nu} J_{\mu\nu}(D^2 + 8iD - C_2 - 22) -$$

$$- D^4 - 16iD^3 + 80D^2 + 128iD + 36C_2 - 16iC_2 D - 2C_2 D^2,$$

где $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} P_\nu J_{\rho\tau}$. Таким образом, неприводимые представления конформной группы задаются тремя числами.

Классификация неприводимых представлений конформной группы – достаточно сложная задача. Очень полезным при этом оказывается локальный изоморфизм между конформной группой и группой $SO(2,4)$ /6/. В существовании этого изоморфизма можно

убедиться, переходя от $J_{\mu\nu}$, P_ρ, K_τ, D к комбинациям

$$L_{\mu\nu} = J_{\mu\nu},\ L_{5\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu),\ L_{6\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu),\ L_{56} = D.$$

Из соотношений (3.1) находим, что операторы L_{ab} (a, b = =0,1,2,3,5,6) удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры $SO(2,4)$:

$$[L_{ab}, L_{cd}] = i(g_{ad} L_{bc} + g_{bc} L_{ad} - g_{ac} L_{bd} - g_{bd} L_{ac}),$$

где $g_{ab} = diag(1,-1,-1,-1,-1,+1)$, что и доказывает локальный изоморфизм групп.

Локальный изоморфизм конформной группы и группы $SO(2,4)$ во-первых, дает возможность построить шестимерную модель пространства Минковского (модель Дирака /10/), в которой нелинейные конформные преобразования становятся линейными однородными преобразованиями и, во-вторых, что более важно, позволяет применять для классификации неприводимых представлений конформной группы методы, разработанные для псевдоортогональных и псевдоунитарных групп (группа $SO(2,4)$ локально изоморфна группе $SU(2,2)$).

Классификация неприводимых представлений конформной группы была проведена в работах /11-15/. Физически наиболее интересными, естественно, являются те представления, в которых $P^2 \geq 0$. Поскольку при дилатации $P^2 \to \lambda^{-2} P^2$, то все представления с $P^2 \geq 0$ разбиваются на два класса: безмассовые представления ($P^2 = 0$) и представления с непрерывным спектром масс (P^2 – произвольное положительное число).

Неприводимые унитарные безмассовые представления являются простейшими унитарными представлениями конформной группы. В этих представлениях операторы Казимира выражаются через единственное число q /13/:

$$C_2 = 3(q^2 - 1),$$

$$C_3 = \pm q(q^2 - 1), \quad (3.3)$$

$$C_4 = -\frac{3}{4}(q^2-1)^2$$

где q - может принимать значения $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots,$.

В безмассовых представлениях знак энергии $\varepsilon_0 = \frac{p_0}{|p_0|}$ является инвариантом. Тем самым, при каждом значении q существует четыре неэквивалентных представления (комбинации из знака p_0 и знака C_3 в (3.3)).

Унитарные неприводимые безмассовые представления конформной группы совпадают с неприводимыми унитарными безмассовыми представлениями группы Пуанкаре со спиральностью $\lambda = \pm q$ /I6/. Именно с этим обстоятельством связано то, что уравнения, описывающие безмассовые частицы, конформно-инвариантны.

Рассмотрим теперь неприводимые представления с $p^2 > 0$. В этих представлениях знак p_0 также является инвариантом, а операторы Казимира равны /I3/:

$$C_2 = \Lambda_m(\Lambda_m+4) + 2J_m(J_m+1) + 2K_m(K_m+1), \tag{3.4}$$

$$C_3 = -(\Lambda_m+2)(J_m-K_m)(J_m+K_m+1),$$

$$C_4 = \frac{1}{4}(\Lambda_m+2)^4 - (\Lambda_m+2)^2 - (\Lambda_m+2)\left[J_m(J_m+1) + K_m(K_m+1)\right] + 4J_m(J_m+1)K_m(K_m+1)$$

В унитарных неприводимых представлениях $J_m, K_m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots,$, а величина Λ_m может принимать вещественные значения, ограниченные неравенствами /I7/: $\Lambda_m \leq -(J_m+K_m+2)$ при $J_m \cdot K_m \neq 0$ (так называемые невырожденные представления) и $\Lambda_m < -(1+J_m+K_m)$ при $J_m \cdot K_m = 0$ (вырожденные представления). Отметим, что представления с $\Lambda_m = \frac{\ell}{n}$ (ℓ , n - целые числа) являются n -значными, а представления с иррациональными Λ_m - бесконечнозначными. Тем самым, универсальная накрывающая конформной группы бесконечнолистна /I7, 7-9/.

Перейдем к квантовым полям, преобразующимся по неприводимым унитарным представлениям конформной группы. Общая процедура построения произвольных конформно-ковариантных полей изложена в работах /6,I8/. Мы рассмотрим класс конформных полей, определяемых соотношениями:

$$\left[J_{\mu\nu}, \psi^{(j_1,j_2)d}(x)\right] = i\left(x_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Sigma_{\mu\nu}\right)\psi^{(j_1,j_2)d}(x),$$

$$\left[P_\mu, \psi^{(j_1,j_2)d}(x)\right] = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^{(j_1,j_2)d}(x), \tag{3.5}$$

$$\left[K_\mu, \psi^{(j_1,j_2)d}(x)\right] = i\left((x^2 g_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu)\frac{\partial}{\partial x^\nu} - 2x_\mu d + 2i x_\nu \Sigma_{\mu\nu}\right)\psi^{(j_1,j_2)d}(x),$$

$$\left[D, \psi^{(j_1,j_2)d}(x)\right] = -i\left(d + x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\psi^{(j_1,j_2)d}(x).$$

Индексы (j_1 , j_2) обозначают, что поле $\psi^{(j_1,j_2)d}(x)$ преобразуется по представлению $D(j_1, j_2)$ группы Лоренца; $\Sigma_{\mu\nu}$ - соответствующая спиновая матрица. Вещественное число d - так называемая масштабная размерность конформного поля $\psi^{(j_1,j_2)d}$.

Формулы (3.5) означают, что трансформационные свойства конформного поля задаются тремя числами j_1 , j_2 и d . Если смысл чисел j_1 и j_2 очевиден, то масштабная размерность d является новым квантовым числом, характеризующим конформно-ковариантные поля.

Какие значения могут принимать масштабная размерность d и j_1, j_2 для полей, представляющих физический интерес, т.е. для полей, преобразующихся по унитарным неприводимым представлениям конформной группы с $p^2 \geq 0$? Для ответа на этот вопрос необходимо установить соответствие между тройками чисел

j_1, j_2, d и $\mathcal{Y}_m$, K_m, Λ_m (и q при $P^2=0$).

Вычислим значения операторов Казимира для одночастичных состояний поля $\psi^{(j_1,j_2)d}(x)$, т.е.

$C_2\,\psi^{(j_1,j_2)d}(x)|0\rangle$, $C_3\,\psi^{(j_1,j_2)d}(x)|0\rangle$, $C_4\,\psi^{(j_1,j_2)d}(x)|0\rangle$,

где $|0\rangle$ – инвариантный вакуум. Используя формулы (3.2), (3.5) и трансляционную инвариантность C_2, C_3, C_4, находим /I9/:

$$
\begin{aligned}
C_2 &= (d-2)^2-4+\frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu},\\
C_3 &= \frac{i}{8}(d-2)\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\rho\tau},\\
C_4 &= \frac{1}{4}(d-2)^4-(d-2)^2+\frac{1}{16}(\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu})^2\\
&\quad+\frac{1}{64}(\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\rho\tau})^2-\frac{1}{4}(d-2)^2\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

где в левой и правой частях формул подразумевается действие на вектора $\psi^{(j_1,j_2)d}(x)|0\rangle$. Поскольку для спиновой матрицы

$$
\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}=4j_1(j_1+1)+4j_2(j_2+1),
$$

$$
\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\rho\tau}=8i\left[j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)\right],
$$

окончательно получаем /I7,20/:

$$
\begin{aligned}
C_2 &= (d-2)^2-4+2j_1(j_1+1)+2j_2(j_2+1),\\
C_3 &= -(d-2)\left[j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)\right],\\
C_4 &= \frac{1}{4}(d-2)^4-(d-2)^2-(d-2)^2\left[j_1(j_1+1)+\right.\\
&\quad\left.+j_2(j_2+1)\right]+4\,j_1(j_1+1)\cdot j_2(j_2+1).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Рассмотрим сначала представления с непрерывным спектром P^2. Сравнивая (3.4) и (3.7), находим

$$
j_1=\mathcal{Y}_m,\quad j_2=K_m,\quad d=-\Lambda_m
$$

В результате, в унитарных неприводимых представлениях конформной группы с непрерывным спектром масс имеем:

I) невырожденные представления:

$$
j_1, j_2=\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2},\dots,\qquad d=2+j_1+j_2+\rho,\ \ \rho\geqslant 0;
$$

2) вырожденные представления:

$$
j_1=0,\ \ j_2=j=0,\tfrac{1}{2},1,\dots,
$$

или

$$
j_2=0,\ \ j_1=j=0,\tfrac{1}{2},1,\dots,\qquad d=1+j+\rho',\ \ \rho'>0.
$$

Для безмассовых представлений из сопоставления формул (3.3) и (3.7) вытекает, что имеются следующие возможности:

$$
j_1=0,\ \ j_2=j=0,\tfrac{1}{2},1,\dots\ (\lambda=p=j)
$$

либо

$$
j_2=0,\ \ j_1=j=0,\tfrac{1}{2},1,\dots\ (\lambda=-p=-j)\qquad d=1+j.
$$

Таким образом, только те безмассовые поля, которые преобразуются по представлениям $\mathcal{D}(j,0)$ или $\mathcal{D}(0,j)$ группы Лоренца, являются конформными ковариантами (конечно, в предположении законов преобразования (3.5)). Этот результат может быть также получен из анализа уравнений для безмассовых полей /21/.

Размерность $d=1+j$ свободных безмассовых полей называется канонической и совпадает с физической размерностью полей.

Масштабные размерности полей, отличные от канонических и удовлетворяющие в теориях с положительной метрикой неравенствам $d(j)>1+j$, называются аномальными размерностями. Поля с аномальными размерностями, как видно из предыдущего, преобразуются по вырожденным и невырожденным бесконечнозначным представлениям конформной группы с непрерывным спектром p^2 $(0<p^2<\infty)$. Конформно-ковариантные сохраняющиеся тензоры, преобразующиеся по представлениям $\mathcal{D}(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ группы Лоренца, типа тока J_μ и тензора энергии-импульса, с размерностью $d=2+n$ преобразуются по невырожденным представлениям.

Отметим, что перечисленные выше неприводимые унитарные представления конформной группы являются также неприводимыми унитарными представлениями группы Вейля. Конформная группа имеет также бесконечно-компонентные неразложимые представления, рассмотренные в работах /22,23/.

Сформулируем теперь кратко основные свойства квантовых конформных полей.

Свободные конформные поля могут быть построены методом полностью аналогичным предложенному в работах Вайнберга /24,4/ методу построения свободных пуанкаре-ковариантных полей. Свободные безмассовые конформные поля просто совпадают с соответствующими свободными безмассовыми пуанкаре-ковариантными полями. Свободные конформные поля $\psi^{(j_1,j_2)d}(x)$ с непрерывным спектром p^2 являются обобщенными свободными полями и могут быть представлены в виде /17,19/:

$$\psi^{(j_1,j_2)d}(x)=\sum_{s=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\int_0^\infty dm^2(m^2)^{\frac{d-2}{2}}\psi^{(j_1,j_2)}_{m,s}(x),$$

где $\psi^{(j_1,j_2)}_{m,s}(x)$ – свободное релятивистское поле с массой m и спином s /25/. Явный вид конформных полей $\psi^{(j_1,j_2)d}(x)$ приведен в работах /17,19,26/.

Взаимодействующие конформные поля обнаруживают ряд интересных особенностей. Основное отличие от обычной релятивистски-инвариантной теории состоит в следующем. В теории взаимодействующих релятивистских полей $\psi_{m,s}(x)$ векторы $\psi_{m,s}(x)|0\rangle$ обязательно (в силу представления Лемана) содержат кроме массы m некоторый спектр масс, т.е. преобразуются по п р и в о д и м о м у представлению группы Пуанкаре. В теории же взаимодействующих конформных полей $\psi^{(j_1,j_2)d}$ векторы

$$\psi^{(j_1,j_2)d}(x)|0\rangle$$

образуют пространство н е п р и в о д и м о г о представления конформной группы (с размерностью d) /17,20/. Важно то, что этот результат является чисто кинематическим. Тем самым, в конформно-инвариантной теории свойства одночастичных состояний полностью фиксированы и не зависят от конкретной динамики.

Именно с этим обстоятельством связано то, что требование конформной инвариантности полностью фиксирует вид двух- и трех-точечных функций Грина (с точностью до произвольных констант) /27,28/. Это свойство конформно-инвариантной теории позволяет сформулировать бутстрапную программу вычисления аномальных размерностей /28-31/. Обсуждение бутстрапных уравнений, а также других применений конформной инвариантности в квантовой теории поля выходит за рамки данного обзора (см.32-33). Мы только подчеркнем, что, как мы уже видели, требование конформной инвариантности теории фиксирует значительную часть динамики.

В реальных теориях конформная инвариантность в силу конечности физических масс частиц является приближенной и становится точной лишь в пределе, когда можно пренебречь характерными массами.

4. Структура групп преобразований в пространстве Минковского

I. В предыдущем разделе мы видели, что инвариантность относительно конформной группы накладывает значительно более сильные ограничения на квантовую теорию, чем инвариантность относительно только группы Пуанкаре – подгруппы конформной группы. Было бы привлекательным найти такую группу преобразований в пространстве Минковского, которая в свою очередь содержала бы конформную группу в качестве подгруппы и фиксировала еще большую часть динамики. Независимо от этого представляет интерес вопрос: какие существуют пространственно-временные группы симметрии, более высокие чем конформная? (Подчеркнем, что мы имеем ввиду конечные непрерывные группы преобразований). Ответ на эти вопросы, как мы увидим, отрицательный. А именно – не существует конечных групп Ли преобразований в пространстве Минковского, содержащих в качестве подгруппы конформную группу и, тем самым, не существует конечных групп Ли пространственно-временных симметрий более высоких чем конформная /34/.

Докажем это утверждение. Как известно генераторы произвольной групп Ли преобразований координат пространства Минковского имеют вид

$$L_i(x) = i\, f_{i\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad (\mu = 0,1,2,3) \quad (4.1)$$

где функции $f_{i\mu}(x)$ определяются из закона преобразования координат; индекс i принимает значения I,2 ..., N (N – число параметров группы). В частности, для конформной группы:

$$J_{\mu\nu} = i\left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right), \quad P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (4.2)$$

$$K_\mu = i\left(x^2 g_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad D = i\, x_\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho}.$$

Покажем, что в пространстве Минковского невозможно реализовать алгебру конечной групп Ли, которая имеет генераторы вида (4.I) и содержит конформную группу в качестве подгруппы.

Предположим обратное. Рассмотрим для наглядности частный случай. Пусть в пространстве Минковского существует группа преобразований локально изоморфная группе $SO(p,q)$ $(p+q>6,\ p\geq 2,\ q\geq 4)$. Генераторы $\mathcal{L}_{AB}$ (A, B =0,I,2,3,5,6,7 ..., $p+q$) группы $SO(p,q)$ удовлетворяют стандартным перестановочным соотношениям

$$[\mathcal{L}_{AB}, \mathcal{L}_{CD}] = i(g_{AD}\mathcal{L}_{BC} + g_{BC}\mathcal{L}_{AD} - g_{AC}\mathcal{L}_{BD} - g_{BD}\mathcal{L}_{AC}) \quad (4.3)$$

где $g_{AB} = diag(1,-1,-1,-1,-1,1,\ldots)$. Алгебра $SO(p,q)$ содержит подалгебру $SO(2,4)$ (изоморфную конформной алгебре) с генераторами $L_{ab} = \mathcal{L}_{ab}$ (a, b = 0,I,2,3,5,6). Соответствие между генераторами L_{ab} и генераторами конформной группы приведено в разделе 3.

В силу соотношений (4.3) среди генераторов $\mathcal{L}_{AB}$ всегда существует по крайней мере один генератор Λ (например, $\mathcal{L}_{67}$), который коммутирует одновременно с $L_{\mu\nu}$ и $L_{5\mu}$, образующими алгебру SO (I,4). Найдем вид такого генератора. Из условия $[\Lambda, L_{\mu\nu}] = [\Lambda, J_{\mu\nu}] = 0$ вытекает

$$\Lambda(x) = i\,\Phi(x^2)\, x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (4.4)$$

где $\Phi(x^2)$ – произвольная скалярная функция x^2. Далее, из условия $[\Lambda, L_{5\mu}] = \frac{1}{2}[\Lambda, P_\mu + K_\mu] = 0$ учитывая (4.2) и (4.4), получаем уравнения на функцию Φ:

$$(1-x^2)\, g_{\mu\rho}\, \Phi(x^2) + 2x_\mu x_\rho\left[(1-x^2)\frac{\partial \Phi(x^2)}{\partial x^2} + \Phi(x^2)\right] = 0. \qquad \mu,\rho = 0,1,2,3. \quad (4.5)$$

Единственным несингулярным решением системы уравнений (4.5) является, как нетрудно видеть, Φ =0.

Таким образом, генератор $\Lambda(x)=0$, т.е. в пространстве Минковского не существует оператора вида (4.I), который коммутирует одновременно с $L_{\mu\nu}=J_{\mu\nu}$ и $L_{5\mu}=\frac{1}{2}(P_\mu+K_\mu)$. Следовательно, группа $SO(p,q)$ $(p+q>6,\ p\geq 2,\ q\geq 4)$ не может быть реализована как группа преобразований пространства Минковского.

Аналогичным образом можно показать, что и группа $SU(p,q)$ $(p+q>4,\ p\geq 2,\ q\geq 2)$ не может быть реализована как группа преобразований пространства Минковского. Для этого необходимо учесть, что алгебра SO (2,4) изоморфна алгебре SU (2.2), а алгебра SO (I,4), которую образуют генераторы $J_{\mu\nu}$ и $\frac{1}{2}(P_\mu+K_\mu)$, - алгебре унитарной симплектической группы USp (2,2).

Доказательство, приведенное выше, обобщается на произвольную конечную группу Ли, содержащую конформную подгруппу. Действительно, любая конечная группа Ли локально изоморфна некоторой линейной группе /35/. Для линейных же групп, как можно показать, всегда существует по крайней мере один генератор, который не принадлежит подалгебре SO (2,4) ($\sim SU$ (2,2)) и коммутирует с генераторами $L_{\mu\nu}$ и $L_{5\mu}$ подгруппы SO (I,4) ($\sim USp$ (2,2)) (где $SO(1,4)\subset SO(2,4)$). Но, как мы видели, такой генератор не может быть реализован в пространстве Минковского, следовательно, рассматриваемая группа не может быть реализована как группа преобразований пространства Минковского.

Таким образом, в пространстве Минковского не существует конечных групп Ли преобразований координат, содержащих конформную группу в качестве подгруппы. Тем самым, не существует пространственно-временных симметрий более высоких чем конформная. Подчеркнем, что важную роль в выводе этого утверждения играет требование инвариантности относительно преобразований Лоренца.

2. Кроме конформной группы в пространстве Минковского существует еще одна группа, содержащая группу Пуанкаре в качестве подгруппы. Это группа всех линейных преобразований координат (аффинная группа):

$$x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu + b_\mu . \qquad (4.6)$$

20-параметрическая аффинная группа является полупрямым произведением группы $L(4,E)$ и группы сдвигов. Алгебра аффинной группы состоит из генераторов $J_{\mu\nu}$ лоренцевских преобразований, генераторов $R_{\mu\nu}$ $(R_{\mu\nu}=R_{\nu\mu},\ R_{\mu\mu}=0)$ собственно-линейных преобразований, генератора D дилатации и генераторов P_ρ сдвигов. Генераторы $J_{\mu\nu}$, P_ρ и D удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры Вейля (см. раздел 3). Остальные же перестановочные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
&[R_{\mu\nu}, R_{\rho\tau}] = i(g_{\mu\tau}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\tau} + g_{\mu\rho}J_{\nu\tau} + g_{\nu\tau}J_{\mu\rho}),\\
&[R_{\mu\nu}, D] = 0, \qquad\qquad (4.8)\\
&[J_{\mu\nu}, R_{\rho\tau}] = i(g_{\mu\rho}R_{\nu\tau} + g_{\mu\tau}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\tau} - g_{\nu\tau}R_{\mu\rho}),\\
&[R_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\mu\rho}P_\nu + g_{\nu\rho}P_\mu - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}P_\rho).
\end{aligned}$$

Отметим, что преобразования Лоренца и собственно-линейные преобразования образуют специальную линейную группу $SL(4,E)$, локально изоморфную группе SO (3,3).

Аффинная группа и конформная группа, действуя в одном и том же пространстве (пространстве Минковского), имеют одинаковые подгруппы - группу Вейля. Однако на этом их сходство, по-видимому, кончается. Конформная группа кроме группы Вейля содержит нелинейные специальные конформные преобразования, а аффинная группа - линейные собственно-линейные преобразования. Это отличие приводит к существенной разнице при рассмотрении этих групп как групп симметрии. Если конформная группа имеет представления с фиксированной массой $(M^2=P^2=0)$, то аффинная группа в силу соотношения $[R_{\mu\nu}, P^2] = 4i(P_\mu P_\nu - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} P^2)$ обладает представлениями только с непрерывным спектром масс. В результате, в то время как конформная симметрия, являясь приближенной для реальных частиц, становится точной в пределе, когда можно пренебречь характерными массами, аффинная симметрия (симметрия относительно собственно-линейных преобразований) остается приближенной при любых соотношениях между характерными импульсами и массами. Этим же свойством обладает и любая конечная группа Ли преобразований в пространстве Минковского, содержащая аффинную группу в качестве подгруппы.

Итак, суммируя результаты этого раздела, мы видим, что число возможных точных конечных групп Ли симметрий в пространстве Минковского ограничено и исчерпывается группами Пуанкаре, Вейля и конформной группой[x] (в работе /36/ приведено другое доказательство этого факта). Отсюда, в частности, следует, что число глобальных сохраняющихся величин, имеющих пространственно-временную природу, конечно.

3. Все рассмотренные выше конечные непрерывные группы преобразований в пространстве Минковского являются подгруппами бесконечной группы общих преобразований координат

$$x_\mu \to x'_\mu = f_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3),$$

где $f_\mu(x)$ - произвольные функции координат. Физический смысл группы общих преобразований координат выявляется в общей теории относительности, основанной на этой группе.

Как известно, существует глубокое различие между конечными и бесконечными группами симметрии. Однако, как мы увидим, бесконечная группа общих преобразований координат в некотором смысле сводится к двум своим конечным подгруппам - аффинной и конформной группам.

---

x) Аналогичные результаты справедливы и для пространства-времени произвольной размерности $(\geqslant 2)$.

Группа общих преобразований координат является бесконечнопараметрической. Параметрами этой группы можно считать коэффициенты разложений функций $f_\mu(x)$ в бесконечные ряды по степеням координат. Алгебра группы общих преобразований координат содержит бесконечно число генераторов вида

$$L_\mu^{n;\, n_0, n_1, n_2, n_3} = i\, x_0^{n_0} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3). \tag{4.9}$$

Алгебра генераторов $L_\mu^{n;\, n_0, n_1, n_2, n_3}$ содержит две замкнутые подалгебры: алгебру конформной группы с генераторами $J_{\mu\nu}$, P_ρ, K_τ, D (см.(4.2)) и алгебру аффинной группы с генераторами $J_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, P_ρ, D, где генератор $R_{\mu\nu}$ собственно-линейных преобразований имеет вид:

$$R_{\mu\nu} = i\left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} + x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\left(x_\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)\right). \tag{4.10}$$

Алгебры аффинной и конформной групп имеют общие подалгебры - - алгебры Вейля, однако остальные генераторы отличаются. В результате аффинная и конформная алгебры не коммутируют между собой.

Рассмотрим минимальную алгебру, которая содержала бы аффинную и конформную алгебры в качестве подалгебр. Такая алгебра, кроме генераторов $J_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, P_ρ, K_τ и D должна содержать всевозможные коммутаторы этих генераторов между собой, а также всевозможные повторные коммутаторы. Оказывается, что искомая алгебра является бесконечной и совпадает с алгеброй группы общих преобразований координат. Иначе говоря, любой генератор $L_\mu^{n;\, n_0, n_1, n_2, n_3}$ группы общих преобразований координат представим в виде линейной комбинации повторных коммутаторов генераторов аффинной и конформной групп /37/.

Для доказательства этой теоремы необходимо показать, что повторные коммутаторы генераторов и их линейные комбинации исчерпывают все генераторы вида (4.9). Рассмотрим последовательно генераторы $L_\mu^{n;\dots}$ с $n = 0, 1, 2, \dots$. Генераторы сдвигов $P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ дают все генераторы $L_\mu^{n;\dots}$ с $n = 0$.

Далее, генераторы лоренцевских преобразований $\mathcal{J}_{\mu\nu} = i(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu})$, собственно-линейных преобразований $R_{\mu\nu} = i(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} + x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x_\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho}))$ и генераторы дилатации $\mathcal{D} = i x_\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho}$ исчерпывают все $L_\mu^{nj\ldots}$ с n =I. Генераторы специальных конформных преобразований $K_\mu = i(x^2 g_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu)\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ принадлежат к $L_\mu^{2j\ldots}$. Покажем, что все генераторы $L_\mu^{nj\ldots}$ с n =2 содержатся в замыкающей алгебре. Рассмотрим коммутатор $R_{\mu\mu}$ с K_ν $\mu \neq \nu$:

$$\left[R_{\mu\mu}, K_\nu\right] = -2 x_\mu^2 \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Мы получили генератор $i x_\mu^2 \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ $(\mu \neq \nu)$.
Далее

$$\left[R_{\nu\mu}, i x_\mu^2 \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right] = 2 x_\mu x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\mu^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad (4.\text{II})$$

Сравнивая (4.II) с K_μ, мы видим, что замыкающая алгебра содержит генераторы $i x_\mu x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ и $i x_\mu^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Наконец, генератор $i x_\mu x_\nu \frac{\partial}{\partial x^z}$ $(\mu \neq \nu \neq z)$ возникает в коммутаторе

$$\left[R_{\mu\nu}, i x_\rho x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right] = x_\mu x_\rho \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

Итак, все генераторы $L_\mu^{nj\ldots}$ с n =2 исчерпаны.

Коммутируя между собой генераторы вида $L_\mu^{2j\ldots}$, мы придем к генераторам $L_\mu^{3j\ldots}$, например

$$\left[i x_\mu^2 \frac{\partial}{\partial x^\nu}, i x_\nu^2 \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right] = -2 x_\mu^2 x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Мы видим, что последовательное коммутирование повторных коммутаторов приводит к генераторам $L_\mu^{nj\ldots}$ со все более высокими n. Поэтому утверждение теоремы становится естественным. Строгое доказательство может быть дано методом математической индукции /37/.

Итак, алгебра группы общих преобразований координат является замыканием алгебр аффинной и конформной групп. Тем самым, любая теория инвариантная одновременно относительно аффинной и конформной групп, будет инвариантна и относительно группы общих преобразований координат. Поскольку трансформационные свойства любой величины относительно бесконечной общековариантной группы определяются ее трансформационными свойствами относительно существенно более простых конечномерных аффинной и конформной групп, то возникает возможность построить теорию тяготения Эйнштейна на основе совместных нелинейных реализаций этих групп /38/.

Отметим тесную связь рассмотренной теоремы с содержащимся в п.I этого раздела результатом о несуществовании конечной группы преобразований пространства Минковского, содержащей конформную подгруппу. Действительно, добавление к конформной алгебре любого генератора вида (4.9), отличного от $\mathcal{J}_{\mu\nu}$, P_μ, K_ρ, $\mathcal{D}$, немедленно приводит к бесконечной алгебре группы общих преобразований координат. Отсюда следует, что структура бесконечной группы общих преобразований координат существенно отличается от структуры групп Ли (например, $SO(p,q)$, $SU(p,q)$) в формальном пределе бесконечного числа параметров $(p, q \to \infty)$.

5. Группы внутренней симметрии

I. Значительное расширение класса возможных групп симметрии возникает при рассмотрении групп преобразований, не затрагивающих координат пространства Минковского, - групп внутренней симметрии. Простейший пример группы внутренней симметрии - группа градиентных преобразований:

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = e^{i\alpha} \varphi(x) \qquad (5.\text{I})$$

где $\varphi(x)$ - комплексное поле, α - произвольная постоянная. Группа градиентных преобразований - это однопараметрическая унитарная группа U(I) и поле $\varphi(x)$ в (5.I) преобразуется по унитарному (однорядному) представлению этой группы.

Более сложными группами внутренней симметрии являются группы $SU(2)$ и $SU(3)$. В этих случаях поле преобразуется по некоторому n-рядному неприводимому представлению этих групп

$$\varphi_i(x) \to \varphi_i'(x) = U_{ik}\, \varphi_k(x)$$

где индекс i пробегает значения $1,\dots, n$; U_{ik} – n-рядная унитарная матрица.

В общем случае группой внутренней симметрии может быть любая непрерывная группа. При этом квантовые поля будут преобразовываться по некоторому представлению группы G:

$$\varphi_\alpha(x) \xrightarrow{G} \varphi_\alpha'(x) = S_{\alpha\beta}\, \varphi_\beta(x).$$

Основное ограничение, накладываемое на группы внутренней симметрии в рамках обычных аксиом квантовой теории поля /3/, состоит в положительности метрики пространства состояний. Оно приводит к необходимости рассматривать только унитарные представления. В сочетании с требованием конечности числа полей (частиц) в мультиплетах получаем, что группы внутренней симметрии должны быть компактными[x)].

Таким образом, класс групп симметрии пополняется компактными группами Ли.

Отметим существенную разницу между пространственно-временными группами симметрии и группами внутренней симметрии: в то время как группы внутренней симметрии должны быть компактными, все рассмотренные нами пространственно-временные группы некомпактны, хотя в обоих случаях мы имеем дело с конечнокомпонентными полями. Это различие связано с тем, что в случае пространственно-временных групп координаты пространства Минковского, от которых зависит поле, являются дополнительными индексами, нумерующими вектора пространства представления, что и дает возможность реализовать бесконечномерные унитарные представления конечнокомпонентными полями.

---

x) Только компактные группы имеют нетривиальные конечномерные унитарные представления (см.например статью К.Фронсдела в /39/).

Как мы видели в предыдущем разделе, размерность (число параметров) пространственно-временных групп симметрии ограничена. Для групп внутренней симметрии такого ограничения не возникает. Дело в том, что группы внутренних симметрий (например, $SU(n)$) можно представлять себе как группы преобразований некоторых абстрактных пространств (n-мерного комплексного пространства в случае группы $SU(n)$). Координаты этих пространств никак не связаны с координатами пространства Минковского и никакие физические соображения не ограничивают число таких координат. В результате допустимы произвольные (компактные) группы преобразований[x)]. Структура же пространства Минковского строго фиксирована, что и приводит к рассмотренным выше ограничениям. Подчеркнем, что упомянутые выше абстрактные пространства (и их координаты) являются полностью фиктивными. Наблюдаемыми (физическими) являются только координаты пространства Минковского и квантовые поля, преобразующиеся по тем или иным представлениям различных групп.

Мы не будем здесь рассматривать различные группы внутренней симметрии (наиболее популярными среди них являются унитарные группы $SU(3)$, $SU(4)$ и $SU(6)$) и их приложений, в частности, в физике адронов, поскольку существуют подробные обзоры и монографии по этим вопросам /39,40,41/. Отметим только, что большинство групп внутренней симметрии являются нарушенными.

2. Группы внутренней симметрии приводят к классификации элементарных частиц по внутренним квантовым числам типа заряда изоспина, странности, унитарного спина. В то же время, такая важнейшая характеристика частиц как масса полностью остается за рамками групп внутренней симметрии. Поэтому было бы привлекательным найти такую группу симметрии, которая бы одновременно давала классификацию частиц по внутренним квантовым числам и по массам. Поскольку понятие массы частиц в рамках квантовой теории поля связано с инвариантом P^2 группы Пуанкаре, то искомая группа должна быть нетривиальным объединением групп внутренней симметрии и группы Пуанкаре. Такая группа была бы

---

x) Однако, если фиксировать число полей, входящих в теорию, то ограничения на возможные группы симметрии возникают. Например, в случае трех полей максимальной группой симметрии будет $U(3)$

одновременно и нетривиальной релятивизацией групп внутренней симметрии. Тривиальное решение - прямое произведение группы внутренней симметрии и группы Пуанкаре - дает одинаковые массы частиц в мультиплетах групп внутренней симметрии.

Решение этой задачи дает теорема О'Раферти /42/.

Пусть G - алгебра произвольной конечной групп Ли, содержащая $\alpha)$ алгебру Пуанкаре в качестве подалгебры и $\beta)$ набор генераторов, например, группы внутренней симметрии. Тогда, если оператор квадрата импульса $P^2 = P_\mu P_\mu$ и любая его степень являются самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве H представления алгебры G, и если спектр оператора P^2 в H содержит дискретную точку m^2, то пространство H_m, принадлежащее собственному значению m^2, замкнуто и инвариантно относительно операторов, представляющих в H алгебру G.

Мы не будем приводить здесь доказательство этой теоремы и перейдем прямо к следствиям.

Из теоремы О'Раферти вытекает, что в предположении о конечности искомой группы Ли, положительности метрики (пространство состояний является гильбертовым), дискретности собственных значений P^2, соответствующих массам частиц и о наблюдаемости P^2 (условие самосопряженности P^2) спектр масс внутри мультиплетов групп внутренней симметрии либо состоит из одной точки, либо непрерывен.

Таким образом, никакая конечная группа Ли симметрии не дает возможность объяснить наблюдаемый спектр масс частиц.

Далее, если потребовать чтобы в мультиплетах групп внутренней симметрии масса принимала лишь конечное число значений, то искомая группа сводится к прямому произведению группы Пуанкаре и группы внутренней симметрии. К такому же результату приводят и некоторые динамические предположения /43/.

Подчеркнем, что в доказательстве теоремы О'Раферти важнейшую роль играет требование релятивистской инвариантности. Именно свойства структуры алгебры Пуанкаре приводят к справедливости этой теоремы.

Итак, мы видим, что попытка объединения групп внутренней симметрии с пространственно-временными группами симметрии не приводит к новому типу групп. Группы внутренней симметрии и пространственно-временные группы действуют совершенно независимо: пространства, в которых действуют эти группы, не связаны - преобразование в одном из них не индуцирует преобразований в другом пространстве; квантовые поля, преобразуются по прямому произведению представлений групп внутренней симметрии и пространственно-временных групп.

Важно отметить, что мы ограничивались только конечными группами Ли. Если рассматривать бесконечные группы или группы, не являющиеся группами Ли, то возникают новые возможности.

3. Одним из наиболее известных классов бесконечных групп Ли является класс локальных групп внутренней симметрии. В группах внутренней симметрии, рассмотренных выше, параметры группы являются величинами одинаковыми во всех точках пространства Минковского. В локальных же группах, реализующих идею близкодействия теории поля, параметры группы являются функциями координат (см.например /44,45/). Подобным же образом могут быть рассмотрены локальные пространственно-временные группы /44,45/.

В локальных группах возникает определенная взаимосвязь между пространством Минковского и пространством, в котором действует рассматриваемая группа. Эта взаимосвязь описывается понятием расслоенного пространства, которое приводит к красивой геометрической интерпретации локальных групп (см.например /45/).

Локальным калибровочным группам и теориям, инвариантным относительно этих групп, посвящена обширная литература (см. например /44-51/), к которой мы и отсылаем читателя.

6. Группы преобразований со спинорными генераторами

Все рассмотренные в предыдущих разделах группы преобразований являются группами Ли. Соответствующие алгебры являются алгебрами Ли, т.е. бинарная операция в алгебрах - коммутатор двух операторов. Это связано с тем, что параметры групп Ли являются коммутирующими числами. По отношению к группе Лоренца параметры групп Ли имеют тензорную природу, т.е. могут быть скалярами, векторами, тензорами и т.п. В результате мультиплеты групп симметрии содержат либо поля с одним и тем же значением спина, либо поля с одинаковой статистикой, т.е. либо поля с целыми, либо с полуцелыми значениями спина.

Как легко видеть неиспользованной осталась возможность, когда параметры преобразуются по спинорным представлениям группы Лоренца. Однако в этом случае возникает существенное отличие от групп и алгебр Ли. Действительно, генераторы преобразований со спинорными параметрами являются спинорами по отношению к группе Лоренца. Следовательно, для сохранения правильной связи спина и статистики, соответствующая алгебра должна содержать антикоммутаторы спинорных генераторов между собой, что означает выход за рамки алгебр Ли.

Очевидно, что преобразования со спинорными параметрами не могут быть преобразованиями координат пространства Минковского. Эти преобразования действуют в "пространстве" квантовых полей и в этом отношении похожи на преобразования групп внутренней симметрии.

Далее, поскольку при инфинитезимальном преобразовании со спинорным параметром ε $\delta\varphi \sim \varepsilon\psi$, то поля φ и ψ описываются различными статистиками. Тем самым, неприводимые представления групп, включающих преобразования со спинорными параметрами, содержат поля как с целыми, так и с полуцелыми спинами. Таким образом, группы преобразований со спинорными параметрами (генераторами) приводят к целому ряду новых возможностей.

Рассмотрим группу, содержащую подгруппу Пуанкаре и преобразование с параметрами, являющимся простейшим лоренцевским спинором. Алгебра такой группы состоит из генераторов лоренцевских преобразований, сдвигов и спинорного генератора Q , т.е. является расширением алгебры Пуанкаре спинорным генератором Q .

Найдем вид возможных простейших спинорных расширений алгебры Пуанкаре. Для этой цели удобно использовать спинорные обозначения, рассмотренные в разделе 2. В этих обозначениях генераторы лоренцевских преобразований записываются в виде двух симметричных спин-тензоров $\mathcal{J}_{AB}$ и $\mathcal{J}_{\dot A\dot B}$, преобразующихся соответственно по представлениям $\mathcal{D}(1,0)$ и $\mathcal{D}(0,1)$ группы Лоренца, генератор сдвигов - в виде $P_{A\dot B}$ (представление $\mathcal{D}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$), а спинорные генераторы - в виде пары двухкомпонентных спиноров - спинора Q_A , преобразующегося по представлению $\mathcal{D}(\frac{1}{2},0)$ и сопряженного спинора $\bar{Q}_{\dot B}$ (представление $\mathcal{D}(0,\frac{1}{2})$). Базис в пространстве представления выберем так, чтобы $\bar{\mathcal{J}}_{\dot A\dot B} = \mathcal{J}^{+}_{AB}$ и $\bar{Q}_{\dot A} = (Q_A)^{+}$, где + обозначает эрмитово сопряжение. Соответствие между тензорной и спинорной формами записи дается формулами: для генераторов лоренцевских преобразований

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left\{ (\sigma_\mu)_{A\dot C}(\sigma_\nu)_{B\dot C}\mathcal{J}_{AB} + (\sigma_\mu)_{A\dot C}(\sigma_\nu)_{A\dot D}\bar{\mathcal{J}}_{\dot C\dot D} \right\},$$

$$\mathcal{J}_{AB} = \frac{1}{2}(\sigma_\mu)_{A\dot E}(\sigma_\nu)_{B\dot E}\mathcal{J}_{\mu\nu}, \qquad (6.1)$$

$$\bar{\mathcal{J}}_{\dot C\dot D} = \frac{1}{2}(\sigma_\mu)_{N\dot C}(\sigma_\nu)_{N\dot D}\mathcal{J}_{\mu\nu}.$$

Для генераторов сдвигов

$$P_\mu = \frac{1}{2}(\sigma_\mu)_{A\dot B}P_{A\dot B} \quad , \quad P_{A\dot B} = (\sigma_\mu)_{A\dot B}P_\mu, \qquad (6.2)$$

где $\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_i)$ - матрицы Паули. По повторяющимся векторным индексам производится обычное фейнмановское суммирование, а по повторяющимся спинорным индексам (здесь и далее) - спинорное суммирование - $\xi_A\eta_A = \xi_A\epsilon_{AB}\eta_B \equiv \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$.

Итак, рассмотрим структуру алгебры $S^{(\frac{1}{2})}$, содержащей генераторы Y_{AB}, $\overline{Y}_{\dot{A}\dot{B}}$, $P_{A\dot{B}}$, Q_A и $\overline{Q}_{\dot{B}}$. Генераторы Y_{AB}, $\overline{Y}_{\dot{C}\dot{D}}$ и $P_{A\dot{B}}$ удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям алгебры Пуанкаре, записанным в спинорной форме. Перестановочные соотношения спинорных генераторов Q_A и $\overline{Q}_{\dot{B}}$ с генераторами лоренцевских преобразований однозначно фиксированы трансформационными свойствами $Q\ (\overline{Q})$ относительно группы Лоренца и имеют вид:

$$[Y_{AB}, Q_C] = i(\epsilon_{AC} Q_B + \epsilon_{BC} Q_A),$$
$$[\overline{Y}_{\dot{A}\dot{B}}, \overline{Q}_{\dot{C}}] = i(\epsilon_{\dot{A}\dot{C}} \overline{Q}_{\dot{B}} + \epsilon_{\dot{B}\dot{C}} \overline{Q}_{\dot{A}}),$$
$$[Y_{AB}, \overline{Q}_{\dot{C}}] = 0, \quad [\overline{Y}_{\dot{A}\dot{B}}, Q_C] = 0. \tag{6.3}$$

Таким образом, остается найти перестановочные соотношения генератора сдвигов P с Q и $\overline{Q}$ и спинорных генераторов между собой. Для сохранения правильной связи спина и статистики необходимо рассматривать, как мы уже отмечали, антикоммутаторы спинорных генераторов.

Возможный вид этих перестановочных соотношений может быть написан из соображений лоренцинвариантности. Использование спинорной формы записи позволяет сделать это почти автоматически (что и является основным преимуществом спинорных обозначений). Для искомых перестановочных соотношений имеем:

$$[P_{A\dot{B}}, Q_C] = a_1 \epsilon_{AC} \overline{Q}_{\dot{B}},$$
$$[P_{A\dot{B}}, \overline{Q}_{\dot{C}}] = a_2 \epsilon_{\dot{B}\dot{C}} Q_A, \tag{6.4}$$

и

$$Q_A \overline{Q}_{\dot{B}} + \overline{Q}_{\dot{B}} Q_A = b P_{A\dot{B}},$$
$$Q_A Q_B + Q_B Q_A = c_1 Y_{AB}, \tag{6.5}$$
$$\overline{Q}_{\dot{A}} \overline{Q}_{\dot{B}} + \overline{Q}_{\dot{B}} \overline{Q}_{\dot{A}} = c_2 \overline{Y}_{\dot{A}\dot{B}}$$

где a_1, a_2, b, c_1, c_2 - произвольные константы.

Дальнейшие ограничения на вид алгебр (6.4) - (6.5)(т.е. на возможные значения констант a_1, a_2, b, c_1, c_2) дают обобщенные тождества Якоби, которым должны удовлетворять генераторы Y, $\overline{Y}$, P, Q и $\overline{Q}$. Обобщенные тождества Якоби являются модификацией обычных тождеств Якоби на случай алгебр, содержащих антикоммутаторы, и имеют вид /51/:

$$(-1)^{g(x_1)g(x_3)}[X_1,[X_2,X_3]] + (-1)^{g(x_2)g(x_1)}[X_2,[X_3,X_1]] + \tag{6.6}$$
$$+ (-1)^{g(x_3)g(x_2)}[X_3,[X_1,X_2]] = 0$$

где X_1, X_2, X_3 - любые три генератора рассматриваемой алгебры;

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - (-1)^{g(x_1)g(x_2)} X_2 X_1 ;$$

для тензорных генераторов X $g(x) = 0$ $(g(Y,P) = 0)$ и $g(x) = 1$ для спинорных генераторов X $(g(Q,\overline{Q}) = 1)$.

Рассмотрим тождества (6.6) для всевозможных троек генераторов Y, $\overline{Y}$, P, Q и $\overline{Q}$. Генераторы Y, $\overline{Y}$ и P группы Пуанкаре естественно удовлетворяют этим тождествам. Ограничения на a_1, a_2, b, c_1, c_2 могут возникнуть только в тождествах (6.6) для троек, содержащих спинорные генераторы. Нетрудно проверить, что тождества (6.6) для троек $(Y, Y, Q(\overline{Q}))$, $(Y, P, Q(\overline{Q}))$, $(Y(\overline{Y}), Q(\overline{Q}), Q(\overline{Q}))$ и $(Q(\overline{Q}), Q(\overline{Q}), Q(\overline{Q}))$ выполняются тождественно и таких ограничений не дают[x)]. Из обобщенных тождеств Якоби для P, P и $Q(\overline{Q})$ находим $a_1 a_2 = 0$. Далее, из тождеств (6.6) для троек (P, Q, Q) и (P, $\overline{Q}$, $\overline{Q}$) получаем соответственно $c_1 = a_1 b$ и $c_2 = a_2 b$. Наконец, для генераторов P, Q и $\overline{Q}$ тождества (6.6) дают $a_2 c_1 = 0$ и $a_1 c_2 = 0$. Приведенными соот-

x) Обобщенные тождества Якоби, содержащие генераторы лоренцевских преобразований, не дают ограничений по очевидной причине - все требования, связанные с лоренц-инвариантностью, уже учтены в формулах (6.3) - (6.5).

ношениями исчерпываются ограничения на константы a_1, a_2, b, c_1, c_2, вытекающие из групповых соображений.

Таким образом, существует два типа алгебр $S^{(\frac{1}{2})}$:

$$\mathrm{I}\quad [P_{A\dot{B}}, Q_C] = a\,\epsilon_{AC}\bar{Q}_{\dot{B}}\ ,\quad [P_{A\dot{B}}, \bar{Q}_{\dot{C}}] = 0\ , \tag{6.7a}$$

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = b P_{A\dot{B}}, \{Q_A, Q_B\} = ab\, Y_{AB}\,, \{\bar{Q}_{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 0$$

$$\mathrm{II}\quad [P_{A\dot{B}}, Q_C] = 0\ ,\quad [P_{A\dot{B}}, \bar{Q}_{\dot{C}}] = a\,\epsilon_{\dot{B}\dot{C}} Q_A\,, \tag{6.7б}$$

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = b P_{A\dot{B}}, \{Q_A, Q_B\} = 0, \{\bar{Q}_{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = ab\,\bar{Y}_{\dot{A}\dot{B}}$$

где a и b – произвольные числа.

Подчеркнем, что перестановочные соотношения (6.7) вместе с соотношениями (6.3) и перестановочными соотношениями для Y_{AB}, $\bar{Y}_{\dot{A}\dot{B}}$ и $P_{A\dot{B}}$ дают вид всех возможных расширений алгебры Пуанкаре, спинорными генераторами Q_A и $\bar{Q}_{\dot{B}}$. Алгебры типа (6.7) называются алгебрами суперсимметрии и впервые были рассмотрены в работах /52-56/.

Алгебры суперсимметрии не являются алгебрами Ли, т.к. кроме коммутаторов они содержат антикоммутаторы. Однако их можно рассматривать как такое обобщение алгебр Ли, в котором соответствующие группы имеют своими параметрами не обычные (коммутирующие) числа, а элементы алгебры Грассмана /57,51/. При этом параметры преобразований с тензорными генераторами являются коммутирующими величинами (четными элементами алгебры Грассмана), а параметры преобразований со спинорными генераторами – полностью антикоммутирующими величинами (нечетными элементами алгебры Грассмана). Общая теория такого типа алгебр рассматривалась в работах /51,58/.

Интересная особенность алгебр суперсимметрии состоит в том, что генераторы сдвигов (импульс) и лоренцевских преобразований (моменты) являются билинейными комбинациями спинорных генераторов.

Не все алгебры вида (6.7) представляют одинаковый физический интерес. Во-первых, поскольку при эрмитовом сопряжении $Q_A \leftrightarrow \bar{Q}_{\dot{B}}$, $Y_{AB} \to \bar{Y}_{\dot{A}\dot{B}}$, $\bar{Y}_{\dot{A}\dot{B}} \to Y_{AB}$ алгебры $S^{(\frac{1}{2})}_{\mathrm{I,II}}$ при $a \neq 0$ не инвариантны относительно эрмитова сопряжения ($S^{(\frac{1}{2})}_{\mathrm{I}} \leftrightarrow S^{(\frac{1}{2})}_{\mathrm{II}}$). Тем самым, алгебры $S^{(\frac{1}{2})}_{\mathrm{I,II}}$ при $a \neq 0$ не имеют эрмитовых представлений, а следовательно, соответствующие группы не имеют унитарных представлений. Во-вторых, поскольку для алгебры $S^{(\frac{1}{2})}_{\mathrm{I}}$ $[P^2, Q_A] = \frac{1}{2} a\, P_{A\dot{B}}\bar{Q}_{\dot{B}}$, а для алгебры $S^{(\frac{1}{2})}_{\mathrm{II}}$ $[P^2, \bar{Q}_{\dot{B}}] = -\frac{1}{2} a\, P_{C\dot{B}} Q_C$, то в неприводимых представлениях этих алгебр при $a \neq 0$ спектр оператора P^2 является непрерывным. Таким образом, только алгебра $S^{(\frac{1}{2})}$ при $a = 0$, которая имеет эрмитовы представления и в которой оператор P^2 является инвариантом, может рассматриваться как алгебра симметрии теорий, описывающих взаимодействие частиц.

Модели теории поля, инвариантные относительно группы с алгеброй $S^{(\frac{1}{2})}$ $(a=0)$ рассматривались в работах /52,54, 59-63/. Наиболее интересные особенности этих моделей состоят в существовании большого числа сокращений расходимостей и в появлении спинорных калибровочных полей /59-63/ (см.также обзоры /64-67/).

7. Общая структура спинорных расширений алгебры Пуанкаре

В предыдущем разделе мы нашли вид расширений алгебры Пуанкаре, спинорными генераторами, преобразующимися по двурядным представлениям группы Лоренца (представлениям $\mathcal{D}(\frac{1}{2},0)$ и $\mathcal{D}(0,\frac{1}{2})$).

В этом разделе мы рассмотрим возможные нетривиальные расширения алгебры Пуанкаре произвольными спинорными генераторами, т.е. алгебры S, состоящие из генераторов лоренцевских преобразований $\mathcal{Y}_{AB}$, $\bar{\mathcal{Y}}_{\dot{A}\dot{B}}$, сдвигов $P_{A\dot{B}}$ и спинорных генераторов $Q^{(j,k)}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2k}}$, преобразующихся по неприводимым представлениям $\mathcal{D}(j,k)$ группы Лоренца ($j+k$ – полуцелое). Расширение алгебры Пуанкаре мы называем нетривиальным, если хотя бы один из коммутаторов $[P,Q]$ или антикоммутаторов $\{Q,Q\}$ отличен от нуля.

Генераторы $\mathcal{Y}_{AB}$, $\bar{\mathcal{Y}}_{\dot{A}\dot{B}}$ и $P_{A\dot{B}}$ образуют алгебру Пуанкаре со стандартными перестановочными соотношениями. Перестановочные соотношения спинорного генератора $Q^{(j,k)}$ с $\mathcal{Y}$ и $\bar{\mathcal{Y}}$ фиксированы трансформационными свойствами $Q^{(j,k)}$:

$$\left[\mathcal{Y}_{AC},\, Q^{(j,k)}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2k}}\right]= i \underset{A_1,\dots,A_{2j}}{Sym}\, \epsilon_{AA_1} Q^{(j,k)}_{CA_2\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2k}},$$

$$\left[\bar{\mathcal{Y}}_{\dot{B}\dot{C}},\, Q^{(j,k)}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2k}}\right]= i \underset{\dot{B}_1,\dots,\dot{B}_{2k}}{Sym}\, \epsilon_{\dot{B}\dot{B}_1} Q^{(j,k)}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{C}\dot{B}_2\cdots\dot{B}_{2k}},$$

где Sym обозначает симметризацию по соответствующим индексам.

Для нахождения вида коммутаторов $[P,Q]$ и антикоммутаторов $\{Q,Q\}$ воспользуемся, как в предыдущем разделе, трансформационными свойствами генераторов $\mathcal{Y}$, $\bar{\mathcal{Y}}$, P и Q и обобщенными тождествами Якоби (6.6).

Рассмотрим алгебру S, содержащую единственный спинорный генератор $Q^{(j,k)}$. Из формул для разложения тензорных произведений представлений группы Лоренца, а именно $\mathcal{D}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes\mathcal{D}(j,k)=\sum\limits_{+,-}\oplus\mathcal{D}(j\pm\frac{1}{2},k\pm\frac{1}{2})$ и $\mathcal{D}(j,k)\otimes\mathcal{D}(j,k)=\mathcal{D}(2j,2k)\oplus\dots\oplus\mathcal{D}(0,0)$ вытекает, что коммутатор $[P,Q^{(j,k)}]$ равен нулю, а антикоммутатор $\{Q,Q\}$ может быть пропорционален только генератору $\mathcal{Y}$. Однако, из тождеств (6.6) для P, Q, Q следует, что соответствующий коэффициент пропорциональности равен нулю.

Таким образом, не существует нетривиальных алгебр S, содержащих единственный спинорный генератор.

Рассмотрим алгебру S, содержащую два спинорных генератора $Q^{(j,k)}$ и $\tilde{Q}^{(\tilde{j},\tilde{k})}$. Из разложений $\mathcal{D}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes\mathcal{D}(j,k)=\sum\limits_{+,-}\oplus\mathcal{D}(j\pm\frac{1}{2},k\pm\frac{1}{2})$ и $\mathcal{D}(j,k)\otimes\mathcal{D}(\tilde{j},\tilde{k})=\mathcal{D}(j+\tilde{j},k+\tilde{k})\oplus\dots\oplus\mathcal{D}(|j-\tilde{j}|,|k-\tilde{k}|)$ следует, что имеется две возможности. Первая возможность:

$$j-\tilde{j}=0,\ |k-\tilde{k}|=1\ (\text{либо } |j-\tilde{j}|=1,\ k-\tilde{k}=0).$$

При этом $[P,Q]=0$, $[P,\tilde{Q}]=0$; а антикоммутаторы $\{Q,Q\}$, $\{\tilde{Q},\tilde{Q}\}$, $\{Q,\tilde{Q}\}$ могут быть пропорциональны генераторам $\mathcal{Y}(\bar{\mathcal{Y}})$. Однако, в силу обобщенных тождеств Якоби для $P, Q(\tilde{Q}), Q(\tilde{Q})$, соответствующие коэффициенты пропорциональности равны нулю и, тем самым, первая возможность соответствует тривиальной алгебре S. Вторая возможность: $|j-\tilde{j}|=\frac{1}{2}$, $|k-\tilde{k}|=\frac{1}{2}$. В этом случае возможны следующие перестановочные соотношения: $[P,Q]\sim\tilde{Q}$, $[P,\tilde{Q}]\sim Q$, $\{Q,\tilde{Q}\}\sim P$, $\{Q,Q\}\sim\mathcal{Y}(\bar{\mathcal{Y}})$, $\{\tilde{Q},\tilde{Q}\}\sim\mathcal{Y}(\bar{\mathcal{Y}})$.

Все алгебры S этого типа можно разбить на два класса: к первому классу отнесем алгебры $S^{(j,k)}_{I}$, содержащие спинорные генераторы $Q^{(j,k)}$ и $\tilde{Q}^{(j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}$ (или что эквивалентно $Q^{(j,k)}$ и $\tilde{Q}^{(j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}$); ко второму классу – алгебры $S^{(j,k)}_{II}$, содержащие спинорные генераторы $Q^{(j,k)}$ и $\tilde{Q}^{(j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}$. Этими двумя классами исчерпываются нетривиальные алгебры S, содержащие два спинорных генератора. Из свойств алгебр S_I и S_{II} отметим, что в общем случае они не инвариантны относительно пространственного отражения.

Для физических приложений наибольший интерес представляют эрмитовы представления алгебр (унитарные представления групп). Поскольку при эрмитовом сопряжении представление $\mathcal{D}(j,k)$ группы Лоренца переходит в представление $\mathcal{D}(k,j)$, то алгебра S может иметь эрмитовы представления лишь при условии, что она вместе с генератором $Q^{(j,k)}$ содержит генератор $\tilde{Q}^{(k,j)}$. Этому требованию, как нетрудно видеть, удовлетворяет только алгебра $S^{(j,k)}_{I}$ с $j-k=\frac{1}{2}$. (случай $j-k=-\frac{1}{2}$ эквивалентен ему и соответствует паре $Q^{(j,k)}$ и $\tilde{Q}^{(j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}$).

Найдем перестановочные соотношения для алгебры $S^{(j)} \equiv S_I^{(j,j-\frac{1}{2})}$ при $j>\frac{1}{2}$. (Случай $j=\frac{1}{2}$ рассмотрен в предыдущем разделе). Требование лоренц-инвариантности фиксирует вид этих перестановочных соотношений с точностью до произвольных констант:

$$\left[P_{A\dot B},\ Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}}\right] = a_1 \underset{A_1,\dots,A_{2j}}{\mathrm{Sym}}\ \epsilon_{AA_1}\ \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_2\cdots A_{2j}\dot B\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}},$$

$$\left[P_{A\dot B},\ \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots \dot B_{2j}}\right] = a_2 \underset{\dot B_1,\dots,\dot B_{2j}}{\mathrm{Sym}}\ \epsilon_{\dot B\dot B_1}\ Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{AA_1\cdots A_{2j-1}\dot B_2\cdots \dot B_{2j}},$$

$$\left\{Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}},\ \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{C_1\cdots C_{2j-1}\dot D_1\cdots \dot D_{2j}}\right\} = b \underset{A,\dot B,C,\dot D}{\mathrm{Sym}}\ \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j-1}C_{2j-1}}\ \times$$

$$\times\ \epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}}\ P_{A_{2j}\dot D_{2j}},$$

$$\left\{Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}},\ Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{C_1\cdots C_{2j}\dot D_1\cdots \dot D_{2j-1}}\right\} = c_1 \underset{A,\dot B,C,\dot D}{\mathrm{Sym}}\ \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j}C_{2j}}\ \times$$

$$\times\ \epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j-2}\dot D_{2j-2}}\ \overline{Y}_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}} + d_1 \underset{A,\dot B,C,\dot D}{\mathrm{Sym}}\ \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j-1}C_{2j-1}}\ \times$$

$$\times\ \epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}}\ Y_{A_{2j}C_{2j}},$$

$$\left\{\overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots \dot B_{2j}},\ \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{C_1\cdots C_{2j-1}\dot D_1\cdots \dot D_{2j}}\right\} = c_2 \underset{A,\dot B,C,\dot D}{\mathrm{Sym}}\ \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j-1}C_{2j-1}}\ \times$$

$$\times\ \epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}}\ \overline{Y}_{\dot B_{2j}\dot D_{2j}} + d_2 \underset{A,\dot B,C,\dot D}{\mathrm{Sym}}\ \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j-2}C_{2j-2}}\ \times$$

$$\times\ \epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j}\dot D_{2j}}\ Y_{A_{2j-1}C_{2j-1}}.$$

Обобщенные тождества Якоби (6.6) дают ограничения на возможные значения $a_1, a_2, b, c_1, d_1, c_2, d_2$, а именно ($j>\frac{1}{2}$):

$$a_1a_2=0,\quad a_1b=0,\quad a_2b=0,\quad c_1=d_1=c_2=d_2=0.$$

Таким образом, возможны три следующих типа алгебр $S^{(j)}$ при $j>\frac{1}{2}$ (при $j=\frac{1}{2}$ см. (6.7)) /68/:

$$\mathrm{I}\quad \left[P_{A\dot B},\ Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}}\right] = a \underset{A_1,\dots,A_{2j}}{\mathrm{Sym}}\ \epsilon_{AA_1}\ \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_2\cdots A_{2j}\dot B\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}} \qquad (7.1)$$

$$[P,\overline{Q}]=0,\ \{Q,\overline{Q}\}=0,\ \{Q,Q\}=0,\ \{\overline{Q},\overline{Q}\}=0$$

$$\mathrm{II}\quad \left[P_{A\dot B},\ \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots \dot B_{2j}}\right] = a \underset{\dot B_1,\dots,\dot B_{2j}}{\mathrm{Sym}}\ \epsilon_{\dot B\dot B_1}\ Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{AA_1\cdots A_{2j-1}\dot B_2\cdots \dot B_{2j}} \qquad (7.2)$$

$$[P,Q]=0,\ \{Q,\overline{Q}\}=0,\ \{Q,Q\}=0,\ \{\overline{Q},\overline{Q}\}=0$$

$$\mathrm{III}\quad [P,Q]=0,\ [P,\overline{Q}]=0,\ \{Q,Q\}=0,\ \{\overline{Q},\overline{Q}\}=0 \qquad (7.3)$$

$$\left\{Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}},\ \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{C_1\cdots C_{2j-1}\dot D_1\cdots \dot D_{2j}}\right\} = b \underset{A,\dot B,C,\dot D}{\mathrm{Sym}}\ \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j-1}C_{2j-1}}\ \times$$

$$\times\ \epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}}\ P_{A_{2j}\dot D_{2j}}.$$

Заметим, что в то время как при $j=\frac{1}{2}$ ($a\neq 0$) билинейными комбинациями спинорных генераторов являются и $P_{A\dot B}$ и Y_{AB} ($\overline{Y}_{\dot A\dot B}$), в случае $j>\frac{1}{2}$ только генераторы сдвигов $P_{A\dot B}$ имеют вид билинейных комбинаций спинорных генераторов (алгебра S_{III}). Это различие связано с появлением при $j>\frac{1}{2}$ в антикоммутаторах $\{Q,Q\}$ и $\{\overline{Q},\overline{Q}\}$ членов с коэффициентами d_1 и d_2, что приводит в силу тождеств (6.6) для $Q(\overline{Q})$, $Q(\overline{Q})$ и $Q(\overline{Q})$ к обращению в нуль c_1, c_2 и d_1, d_2.

Из общих свойств алгебр $S^{(j)}$ отметим, что алгебры $S_I^{(j)}$ и $S_{II}^{(j)}$ не инвариантны относительно пространственного отражения. При пространственном отражении $S_I^{(j)} \leftrightarrow S_{II}^{(j)}$. Тем самым в теориях, инвариантных относительно групп с алгебрами $S_{I,II}^{(j)}$ четность не сохраняется. Более важно, что алгебры $S_I^{(j)}$ и $S_{II}^{(j)}$ не инвариантны относительно эрмитова сопряжения (при этом $S_I^{(j)} \leftrightarrow S_{II}^{(j)}$) и, следовательно, не имеют эрмитовых представлений (соответствующие группы – унитарных представлений). Кроме того, для алгебр $S_{I}^{(\frac{1}{2})}$ и $S_{II}^{(\frac{1}{2})}$ оператор P^2 не является инвариантом и принимает непрерывный спектр значений.

Таким образом, только алгебры $S_{III}^{(\frac{1}{2})}$ $\left(S^{(\frac{1}{2})}(a=0) \right)$ представляют интерес как алгебры симметрии теорий, описывающих взаимодействие частиц.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены алгебры S, содержащие более двух спинорных генераторов, а также алгебры, содержащие спинорные генераторы, преобразующиеся по приводимым представлениям группы Лоренца (например, представлениям $(\mathcal{D}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))^n \otimes \mathcal{D}(\frac{1}{2},0)$). Отметим, что алгебры, содержащие нечетное число спинорных генераторов, не имеют эрмитовых представлений.

8. Спинорные расширения алгебры Вейля и конформной алгебры

Метод нахождения спинорных расширений, использованный в предыдущем разделе, применим ко всем пространственно-временным группам.

I. Группа Вейля. Рассмотрим отдельно расширения алгебры Вейля, спинорными генераторами преобразующимися α) по представлениям $\mathcal{D}(\frac{1}{2},0)$ и $\mathcal{D}(0,\frac{1}{2})$ группы Лоренца, и β) по произвольным спинорным представлениям.

α). Генераторы $\mathcal{Y}_{AB}, \bar{\mathcal{Y}}_{\dot{A}\dot{B}}, P_{A\dot{B}}$ и $\mathcal{D}$ алгебры Вейля удовлетворяют стандартным перестановочным соотношениям. Перестановочные соотношения спинорных генераторов Q_A и $\bar{Q}_{\dot{B}}$ с генераторами $\mathcal{Y}_{AB}$, $\bar{\mathcal{Y}}_{\dot{A}\dot{B}}$, $P_{A\dot{B}}$ даются формулами (6.3) и (6.4), а антикоммутаторы спинорных генераторов между собой – формулами (6.5). Наконец, перестановочные соотношения генератора дилатации $\mathcal{D}$ и спинорных генераторов имеют вид:

$$[\mathcal{D}, Q_A] = f_1 Q_A, \quad [\mathcal{D}, \bar{Q}_{\dot{A}}] = f_2 \bar{Q}_{\dot{A}} \qquad (8.1)$$

где f_1 и f_2 – произвольные константы.

Обобщенные тождества Якоби дают ряд ограничений на константы $a_1, a_2, b, c_1, c_2, f_1, f_2$. Из тождеств (6.6) для генераторов $\mathcal{Y}$, $\bar{\mathcal{Y}}$, P, Q и $\bar{Q}$ получаем, естественно формулы (6.7). Для того, чтобы получить ограничения на f_1 и f_2 необходимо рассмотреть, учитывая (6.7), тождества (6.6) для троек генераторов, содержащих $\mathcal{D}$ и $Q(\bar{Q})$. Нетрудно проверить, что тождества (6.6) для троек генераторов ($\mathcal{D}$, $\mathcal{Y}(\bar{\mathcal{Y}})$, $Q(\bar{Q})$) и ($\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$, $Q(\bar{Q})$) никаких ограничений на f_1 и f_2 не дают. Для троек ($\mathcal{D}$, P, $\bar{Q}$) и ($\mathcal{D}$, $\bar{Q}$, $\bar{Q}$) в случае (6.7а) обобщенные тождества Якоби выполняются тождественно, в случаях же (6.7б) они дают соответственно $a(f_1 - f_2 - i) = 0$ и $f_2 ab = 0$. Далее, для троек ($\mathcal{D}$, P, Q) и ($\mathcal{D}$, Q, Q) тождества (6.6) в случае (6.7а) дают $a(f_2 - f_1 - i) = 0$ и $f_1 ab = 0$, в случаях же (6.7б) никаких ограничений не возникает. И наконец, обобщенные тождества Якоби для $\mathcal{D}$, Q, $\bar{Q}$ в обоих случаях дают $b(f_1 + f_2 - i) = 0$.

В результате получаем, что имеется шесть следующих типов расширений алгебры Вейля генераторами Q_A и $\bar{Q}_{\dot{B}}$ (мы не выписываем одинаковые во всех случаях перестановочные соотношения для $\mathcal{Y}$, $\bar{\mathcal{Y}}$, P, $\mathcal{D}$ и соотношения (6,3)):

I. $$[P_{A\dot{B}}, Q_C] = a\,\epsilon_{AC}\bar{Q}_{\dot{B}}, \quad [P_{A\dot{B}}, \bar{Q}_{\dot{C}}] = 0$$

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = b P_{A\dot{B}}, \quad \{Q_A, Q_B\} = ab\,\mathcal{Y}_{AB}, \quad \{\bar{Q}_{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 0,$$

$$[\mathcal{D}, Q_A] = 0, \quad [\mathcal{D}, \bar{Q}_{\dot{B}}] = i\,\bar{Q}_{\dot{B}}.$$

2. $$[P_{A\dot{B}}, Q_C] = 0, \quad [P_{A\dot{B}}, \bar{Q}_{\dot{C}}] = a\,\epsilon_{\dot{B}\dot{C}}Q_A,$$

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = b P_{A\dot{B}}, \quad \{Q_A, Q_B\} = 0, \quad \{\bar{Q}_{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = ab\,\bar{\mathcal{Y}}_{\dot{A}\dot{B}}$$

$$[\mathcal{D}, Q_A] = i\,Q_A, \quad [\mathcal{D}, \bar{Q}_{\dot{B}}] = 0$$

3. $$[P_{A\dot B}, Q_C] = a\,\epsilon_{AC}\bar Q_{\dot B}, \quad [P, \bar Q] = 0,$$

$$\{Q, \bar Q\} = 0, \quad \{Q, Q\} = 0, \quad \{\bar Q, \bar Q\} = 0$$

$$[\mathcal{D}, Q_A] = if Q_A, \quad [\mathcal{D}, \bar Q_{\dot A}] = i(1+f)\bar Q_{\dot A}.$$

4. $$[P, Q] = 0, \quad [P_{A\dot B}, \bar Q_{\dot C}] = a\,\epsilon_{\dot B\dot C} Q_A,$$

$$\{Q, \bar Q\} = 0, \quad \{Q, Q\} = 0, \quad \{\bar Q, \bar Q\} = 0$$

$$[\mathcal{D}, Q_A] = i(1+f) Q_A, \quad [\mathcal{D}, \bar Q_{\dot B}] = if \bar Q_{\dot B}.$$

5. $$[P, Q] = 0, \quad [P, \bar Q] = 0,$$

$$\{Q_A, \bar Q_{\dot B}\} = b P_{A\dot B}, \quad \{Q, Q\} = 0, \quad \{\bar Q, \bar Q\} = 0,$$

$$[\mathcal{D}, Q_A] = if Q_A, \quad [\mathcal{D}, \bar Q_{\dot A}] = i(1-f)\bar Q_{\dot A}.$$

6. $$[P, Q] = 0, \quad [P, \bar Q] = 0,$$

$$\{Q, \bar Q\} = 0, \quad \{Q, Q\} = 0, \quad \{\bar Q, \bar Q\} = 0$$

$$[\mathcal{D}, Q_A] = if Q_A, \quad [\mathcal{D}, \bar Q_{\dot A}] = id\, \bar Q_{\dot A},$$

где a, b, f и d – произвольные числа.

Отметим, что только алгебры пятого типа при $f = \frac{1}{2}$ и шестого типа при $f = d$ инвариантны относительно эрмитова сопряжения и, следовательно, обладают эрмитовыми представлениями.

β) Аналогичным образом могут быть рассмотрены расширения алгебры Вейля произвольными спинорными генераторами. В этом случае имеется четыре типа алгебр:

I. Перестановочные соотношения (7.I) плюс

$$[\mathcal{D}, Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}}] = if\, Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}},$$

$$[\mathcal{D}, \bar Q^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots \dot B_{2j}}] = i(1+f)\, \bar Q^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots \dot B_{2j}}.$$

2. Соотношения (7.2) и

$$[\mathcal{D}, Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{\cdots}] = i(1+f)\, Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{\cdots},$$

$$[\mathcal{D}, \bar Q^{(j-\frac{1}{2},j)}_{\cdots}] = if\, \bar Q^{(j-\frac{1}{2},j)}_{\cdots}.$$

3. Перестановочные соотношения (7.3) и

$$[\mathcal{D}, Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{\cdots}] = if\, Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{\cdots},$$

$$[\mathcal{D}, \bar Q^{(j-\frac{1}{2},j)}_{\cdots}] = i(1-f)\, \bar Q^{(j-\frac{1}{2},j)}_{\cdots}.$$

4. $$[P, Q^{(j,j-\frac{1}{2})}] = 0, \quad [P, \bar Q^{(j-\frac{1}{2},j)}] = 0,$$

$$\{Q, \bar Q\} = 0, \quad \{Q, Q\} = 0, \quad \{\bar Q, \bar Q\} = 0,$$

$$[\mathcal{D}, Q] = if\, Q, \quad [\mathcal{D}, \bar Q] = id\, \bar Q,$$

где f и d - произвольные константы. Алгебры типов (3-6) для $j=\frac{1}{2}$ являются частными случаями алгебр (I-4) для произвольного j. Так же, как и при $j=\frac{1}{2}$ эрмитовыми представлениями обладают только алгебры третьего ($f=\frac{1}{2}$) и четвертого ($f=d$) типов.

Приведенными алгебрами исчерпываются нетривиальные расширения алгебры Вейля парой произвольных спинорных генераторов, преобразующихся по сопряженным представлениям группы Лоренца.

2. Конформная группа. Алгебра конформной группы состоит из генераторов Y_{AB}, $\overline{Y}_{\dot{A}\dot{B}}$, $P_{A\dot{B}}$, $\mathcal{D}$ и генератора специального конформного преобразования $K_{A\dot{B}}$, удовлетворяющих перестановочным соотношениям (3.2). Рассмотрим расширение алгебры (3.2) спинорными генераторами Q_A и $\overline{Q}_{\dot{B}}$. Общий вид перестановочных соотношений спинорных генераторов с Y_{AB}, $\overline{Y}_{\dot{A}\dot{B}}$, $P_{A\dot{B}}$ и $\mathcal{D}$ вытекает из соображений лоренц-инвариантности и дается формулами (6.3), (6.4) и (8.I). Из этих же соображений вытекает вид коммутаторов $K_{A\dot{B}}$ с Q и $\overline{Q}$:

$$[K_{A\dot{B}}, Q_C]=g_1\epsilon_{AC}\overline{Q}_{\dot{B}}, \quad [K_{A\dot{B}}, \overline{Q}_{\dot{C}}]=g_2\epsilon_{\dot{B}\dot{C}}Q_A \tag{8.2}$$

и антикоммутаторов спинорных генераторов между собой:

$$\{Q_A, Q_B\}=c_1 Y_{AB}, \quad \{\overline{Q}_{\dot{A}}, \overline{Q}_{\dot{B}}\}=c_2\overline{Y}_{\dot{A}\dot{B}},$$
$$\{Q_A, \overline{Q}_{\dot{B}}\}=b P_{A\dot{B}}+\rho K_{A\dot{B}}, \tag{8.3}$$

где $g_1, g_2, c_1, c_2, b, \rho$ - произвольные константы.

Воспользуемся теперь, как и в предыдущих разделах, обобщенными тождествами Якоби.

Найдем возможные значения констант b и ρ. Учитывая соотношения $[\mathcal{D}, P_{A\dot{B}}]=iP_{A\dot{B}}$ и $[\mathcal{D}, K_{A\dot{B}}]=-iK_{A\dot{B}}$ из тождеств (6.6) для $\mathcal{D}$, Q, $\overline{Q}$, получаем систему уравнений: $b(f_1+f_2-i)=0$ и $\rho(f_1+f_2+i)=0$. Таким образом, имеется три возможности: α) $b\neq 0$, $\rho=0$ $f_1+f_2=i$, β) $b=0$, $\rho\neq 0$, $f_1+f_2=-i$ и γ) $b=\rho=0$, f_1 и f_2 - произвольные числа.

Далее из тождеств (6.6) для $P_{A\dot{B}}$, $K_{A\dot{B}}$ и Q_A находим $f_1+f_2=0$, $g_1a_2-4+8if_1=0$, $a_1g_2-4-8if_1=0$. Эти уравнения совместимы, как легко видеть, только с возможностью γ). Наконец, поскольку генераторы Y, $\overline{Y}$ и K образуют алгебру Пуанкаре, расширение алгебры Y, $\overline{Y}$, K генераторами Q и $\overline{Q}$ имеет такой же вид, что и расширения алгебры Y, $\overline{Y}$, P. В частности, $g_1g_2=0$.

В результате получаем, что имеется две возможности:

I. $$[P_{A\dot{B}}, Q_C]=a\epsilon_{AC}\overline{Q}_{\dot{B}}, \quad [P, \overline{Q}]=0,$$
$$[K, Q]=0, \quad [K_{A\dot{B}}, \overline{Q}_{\dot{C}}]=\frac{8}{a}\epsilon_{\dot{B}\dot{C}}Q_A,$$
$$[\mathcal{D}, Q_A]=-\frac{i}{2}Q_A, \quad [\mathcal{D}, \overline{Q}_{\dot{B}}]=\frac{i}{2}\overline{Q}_{\dot{B}},$$
$$\{Q, \overline{Q}\}=0, \quad \{Q, Q\}=0, \quad \{\overline{Q}, \overline{Q}\}=0.$$

2. $$[P, Q]=0, \quad [P_{A\dot{B}}, \overline{Q}_{\dot{C}}]=a\epsilon_{\dot{B}\dot{C}}Q_A,$$
$$[K_{A\dot{B}}, Q_C]=\frac{8}{a}\epsilon_{AC}\overline{Q}_{\dot{B}}, \quad [K, \overline{Q}]=0,$$
$$[\mathcal{D}, Q_A]=\frac{i}{2}Q_A, \quad [\mathcal{D}, \overline{Q}_{\dot{B}}]=-\frac{i}{2}\overline{Q}_{\dot{B}},$$
$$\{Q, \overline{Q}\}=0, \quad \{Q, Q\}=0, \quad \{\overline{Q}, \overline{Q}\}=0.$$

Две возможности, полностью аналогичные приведенным, имеются и при расширении конформной алгебры двумя произвольными спинорными генераторами (а именно $Q^{(j,j-\frac{1}{2})}$ и $\overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}$). Однако эти алгебры, как легко видеть, не инвариантны относительно эрмитова сопряжения и, следовательно, не имеют эрмитовых представлений.

Эрмитовыми представлениями обладают расширения конформной алгебры двумя парами спинорных генераторов $Q_1^{(j,j-\frac{1}{2})}$, $\overline{Q}_1^{(j-\frac{1}{2},j)}$ и $Q_2^{(j,j-\frac{1}{2})}$, $\overline{Q}_2^{(j-\frac{1}{2},j)}$. Общий вид таких расширений конформной алгебры нетрудно получить, используя результаты предыдущих разделов. В простейшем случае $j=\frac{1}{2}$ имеем /36/:

$$[P_{A\dot B}, Q_C^{(1)}]=0\,, \quad [P_{A\dot B}, Q_{\dot C}^{(1)}]=0\,,$$

$$[P_{A\dot B}, Q_C^{(2)}]=2i\,\epsilon_{AC}\,\overline{Q}_{\dot B}^{(1)}, [P_{A\dot B}, \overline{Q}_{\dot C}^{(2)}]=2i\,\epsilon_{\dot B\dot C}\,Q_A^{(1)},$$

$$[K_{A\dot B}, Q_C^{(1)}]=2i\,\epsilon_{AC}\,\overline{Q}_{\dot B}^{(2)}, [K_{A\dot B}, \overline{Q}_{\dot C}^{(1)}]=2i\,\epsilon_{\dot B\dot C}\,Q_A^{(1)},$$

$$[K_{A\dot B}, Q_C^{(2)}]=0\,, \quad [K_{A\dot B}, \overline{Q}_{\dot C}^{(2)}]=0\,,$$

$$[\mathcal{D}, Q_A^{(1)}]=-\frac{i}{2}Q_A^{(1)}, [\mathcal{D}, \overline{Q}_{\dot A}^{(1)}]=-\frac{i}{2}\overline{Q}_{\dot A}^{(1)},$$

$$[\mathcal{D}, Q_A^{(2)}]=\frac{i}{2}Q_A^{(2)}, [\mathcal{D}, \overline{Q}_{\dot A}^{(2)}]=\frac{i}{2}\overline{Q}_{\dot A}^{(2)},$$

$$\{Q_A^{(1)}, \overline{Q}_{\dot B}^{(1)}\}=P_{A\dot B}\,, \{Q_A^{(1)}, Q_B^{(1)}\}=0\,, \{\overline{Q}_{\dot A}^{(1)}, \overline{Q}_{\dot B}^{(1)}\}=0,$$

$$\{Q_A^{(2)}, \overline{Q}_{\dot B}^{(2)}\}=K_{A\dot B}, \{Q_A^{(2)}, Q_B^{(2)}\}=0, \{\overline{Q}_{\dot A}^{(2)}, \overline{Q}_{\dot B}^{(2)}\}=0,$$

$$\{Q_A^{(1)}, Q_B^{(2)}\}=\epsilon_{AB}\mathcal{D}-J_{AB},$$

$$\{\overline{Q}_{\dot A}^{(1)}, \overline{Q}_{\dot B}^{(2)}\}=\epsilon_{\dot A\dot B}\mathcal{D}-J_{\dot A\dot B},$$

$$\{Q_A^{(1)}, \overline{Q}_{\dot B}^{(2)}\}=0\,,$$

плюс соотношения (6.3) и перестановочные соотношения генераторов конформной группы.

Для получения этого и других спинорных расширений конформной алгебры удобно использовать конформный спинорный анализ, который позволяет учитывать требования конформной инвариантности почти автоматически.

3. Поскольку группами Пуанкаре, Вейля и конформной группой исчерпываются возможные пространственно-временные группы симметрии (раздел 4), то, тем самым, в разделах 6-8 рассмотрены все возможные алгебры суперсимметрии.

9. Объединение групп суперсимметрии и внутренней симметрии

Методом, многократно использованным в предыдущих разделах, могут быть рассмотрены и группы симметрии, содержащие кроме пространственно-временных преобразований и суперпреобразований (преобразований со спинорными генераторами), также преобразования групп внутренней симметрии. Соответствующие алгебры для случая групп Пуанкаре и конформной группы и спинорных генераторов, преобразующихся по представлениям $\mathcal{D}(\frac{1}{2},0)$ и $\mathcal{D}(0,\frac{1}{2})$ группы Лоренца рассмотрены в работе /36/. В случае группы Пуанкаре и произвольных спинорных генераторов искомая алгебра имеет вид:

$$[P_{A\dot B}, Q^{(j,j-\frac{1}{2})\alpha}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}}]=0, \quad [P_{A\dot B}, \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)\alpha}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots \dot B_{2j}}]=0,$$

$$[Q^{(j,j-\frac{1}{2})\alpha}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}}, B_i]=-\sum_\beta \overline{S}_i^{\alpha\beta}\, Q^{(j,j-\frac{1}{2})\beta}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}},$$

$$[\overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)\alpha}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots \dot B_{2j}}, B_i]=\sum_\beta S_i^{\alpha\beta}\, \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)\beta}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots \dot B_{2j}},$$

$$\{Q^{(j,j-\frac{1}{2})\alpha}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots \dot B_{2j-1}}, \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)\beta}_{C_1\cdots C_{2j-1}\dot{\mathcal{D}}_1\cdots \dot{\mathcal{D}}_{2j}}\}=$$

$$= \delta^{\alpha\beta} \operatorname*{Sym}_{A,\dot{B},C,\dot{D}} \epsilon_{A_1C_1} \cdots \epsilon_{A_{2j-1}C_{2j-1}} \epsilon_{\dot{B}_1\dot{D}_1} \cdots \epsilon_{\dot{B}_{2j-1}\dot{D}_{2j-1}} P_{A_{2j}\dot{D}_{2j}},$$

$$\left\{ Q^{(j,j-\frac{1}{2})\alpha}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j-1}},\ Q^{(j,j-\frac{1}{2})\beta}_{C_1\cdots C_{2j}\dot{D}_1\cdots\dot{D}_{2j-1}} \right\} =$$

$$= Z^{\alpha\beta} \operatorname*{Sym}_{A,\dot{B},C,\dot{D}} \epsilon_{A_1C_1} \cdots \epsilon_{A_{2j}C_{2j}} \epsilon_{\dot{B}_1\dot{D}_1} \cdots \epsilon_{\dot{B}_{2j-1}\dot{D}_{2j-1}},$$

$$\left\{ \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)\alpha}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j}},\ \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)\beta}_{C_1\cdots C_{2j-1}\dot{D}_1\cdots\dot{D}_{2j}} \right\} =$$

$$= Z^{\alpha\beta} \operatorname*{Sym}_{A,\dot{B},C,\dot{D}} \epsilon_{A_1C_1} \cdots \epsilon_{A_{2j-1}C_{2j-1}} \epsilon_{\dot{B}_1\dot{D}_1} \cdots \epsilon_{\dot{B}_{2j}\dot{D}_{2j}},$$

$$[P_{A\dot{B}}, B_i] = 0, \quad [\mathcal{Y}_{AB}, B_i] = 0, \quad [\overline{\mathcal{Y}}_{\dot{A}\dot{B}}, B_i] = 0,$$

$$[B_i, B_k] = \sum_e C_{ike} B_e,$$

где B_i – генераторы группы внутренней симметрии; спинорные генераторы $Q\,(\overline{Q})$ преобразуются по произвольному (n-рядному) представлению группы внутренней симметрии (т.е. индекс α принимает значения $\alpha = 1, \ldots, n$), $S_i^{\alpha\beta}$ – матрицы n-рядного эрмитова представления группы внутренней симметрии, C_{ike} – структурные константы этой группы, $Z^{\alpha\beta}$ – величина, коммутирующая со всеми генераторами рассматриваемой группы.

10. Реализация групп суперсимметрии как групп преобразований суперпространств

Знания перестановочных соотношений для генераторов групп суперсимметрии, рассмотренных в предыдущих разделах, вполне достаточно для построения неприводимых представлений и их классификации, для построения квантовых полей, ковариантных относительно группы суперсимметрии и т.п. Однако, как известно, изучение группы симметрии упрощается и все формулы становятся значительно более наглядными, если данную группу симметрии можно представить как группу преобразований некоторого пространства. В случае групп суперсимметрии только пространственно-временные подгруппы (группы Пуанкаре, Вейля и конформная группа) являются группами преобразований (координат пространства Минковского), а суперпреобразования – это преобразования квантовых полей, не затрагивающие координат. Таким образом, необходимо найти расширение пространства Минковского, которое позволяло бы представить и суперпреобразования как преобразования некоторых координат.

Роль такого расширения пространства Минковского играет с у п е р п р о с т р а н с т в о – пространство, часть координат которого являются координатами пространства Минковского, а остальные координаты – полностью антикоммутирующие спиноры. Подчеркнем, что только часть координат суперпространства, а именно координаты пространства Минковского, имеют физический смысл, остальные же координаты являются фиктивными и все физические величины от них не зависят.

Рассмотрим для определенности алгебру $S^{(\frac{1}{2})}(a=0)$ – – расширение алгебры Пуанкаре, спинорными генераторами Q_A и $\overline{Q}_{\dot{B}}$ ($b=2$):

$$[P_{A\dot{B}}, Q_C] = 0, \quad [P_{A\dot{B}}, \overline{Q}_{\dot{C}}] = 0 \tag{10.1}$$

$$\{Q_A, \overline{Q}_{\dot{B}}\} = 2P_{A\dot{B}}, \quad \{Q_A, Q_B\} = 0, \quad \{\overline{Q}_{\dot{A}}, \overline{Q}_{\dot{B}}\} = 0$$

плюс соотношения (6.3) и перестановочные соотношения для генераторов группы Пуанкаре.

Соответствующее суперпространство - это восьмимерное пространство с координатами $x_{A\dot{B}}$ и θ_A, $\bar{\theta}_{\dot{B}}$, где $x_{A\dot{B}} = (\sigma_\mu)_{A\dot{B}}\, x_\mu$ - координаты пространства Минковского, θ и $\bar{\theta}$ - постоянные полностью антикоммутирующие двухкомпонентные спиноры /69,70/. Алгебра (I0.I) является алгеброй группы преобразований суперпространства, содержащей

I) Преобразования Лоренца

$$x_\mu \to x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu, \quad \theta_A \to \theta'_A = S^{(\frac{1}{2},0)}_{AB}\theta_B, \quad \bar{\theta}_{\dot{A}} \to \bar{\theta}'_{\dot{A}} = S^{(0,\frac{1}{2})}_{\dot{A}\dot{B}}\bar{\theta}_{\dot{B}},$$

где $S^{(\frac{1}{2},0)}$ и $S^{(0,\frac{1}{2})}$ двурядные представления группы Лоренца,

2) Сдвиги

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + a_\mu, \quad \theta_A \to \theta'_A = \theta_A, \quad \bar{\theta}_{\dot{A}} \to \bar{\theta}'_{\dot{A}} = \bar{\theta}_{\dot{A}},$$

3) Суперпреобразования

$$\theta_A \to \theta'_A = \theta_A + \xi_A, \quad \bar{\theta}_{\dot{A}} \to \bar{\theta}'_{\dot{A}} = \bar{\theta}_{\dot{A}} + \bar{\xi}_{\dot{A}},$$

$$x_{A\dot{B}} \to x'_{A\dot{B}} = x_{A\dot{B}} - i\,\xi_A \bar{\theta}_{\dot{B}} + i\,\theta_A \bar{\xi}_{\dot{B}}.$$

Соответствующие генераторы имеют вид

$$J_{\mu\nu} = i\Big(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big) + \frac{i}{4}\theta_A[\sigma_\mu,\sigma_\nu]_{AB}\frac{\partial}{\partial\theta^B} - \frac{i}{4}\bar{\theta}_{\dot{A}}[\sigma_\mu,\sigma_\nu]^+_{\dot{A}\dot{B}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{B}}}, \qquad (I0.2)$$

$$P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial\theta^A} - i\,\bar{\theta}_{\dot{B}}\partial_{A\dot{B}}, \quad \bar{Q}_{\dot{A}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{A}}} - i\,\theta_B\partial_{B\dot{A}},$$

где $\partial_{A\dot{B}} = (\sigma_\mu)_{A\dot{B}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Нетрудно убедиться, что генераторы $J_{\mu\nu}$, P_μ, Q_A, $\bar{Q}_{\dot{B}}$, заданные формулами (I0.2) действительно удовлетворяют перестановочным соотношениям (I0.I).

Подчеркнем существенное отличие суперпреобразований от преобразований групп внутренней симметрии. В то время как преобразования групп внутренней симметрии не задевают пространственно-временных координат, суперпреобразования являются одновременными преобразованиями нефизических спинорных координат θ и $\bar{\theta}$ и координат пространства Минковского.

Отметим, что преобразования рассмотренной группы суперсимметрии оставляют инвариантной дифференциальную форму

$$(dx_\mu + i\,\bar{\theta}\sigma_\mu d\theta - i\,\theta\sigma_\mu d\bar{\theta})^2.$$

Формализм суперпространства дает возможность компактно записывать величины, ковариантные относительно группы суперсимметрии. Для этого вводится понятие суперполя $\psi(x,\theta,\bar{\theta})$ - - операторозначной функции координат x_μ, θ и $\bar{\theta}$ /69-7I/. Закон преобразования суперполя относительно группы суперсимметрии задается по аналогии с обычными полями:

$$\mathcal{U}\,\psi(x,\theta,\bar{\theta})\,\mathcal{U}^{-1} = \psi'(x,\theta,\bar{\theta}) = \psi(x',\theta',\bar{\theta}'). \qquad (I0.3)$$

Суперполе $\psi(x,\theta,\bar{\theta})$ может иметь также лоренцевские (спинорные или тензорные) индексы, тогда в правой части (I0.3) при преобразованиях Лоренца возникает соответствующая матрица. Поскольку суперпреобразования не затрагивают лоренцевских индексов, для суперполя с любыми индексами при суперпреобразованиях имеем:

$$\mathcal{U}(\xi)\,\psi_{\dots}(x,\theta,\bar{\theta})\,\mathcal{U}^{-1}(\xi) = \psi_{\dots}(x_{A\dot{B}} - i\xi_A\bar{\theta}_{\dot{B}} + i\theta_A\bar{\xi}_{\dot{B}},\ \theta_A + \xi_A,\ \bar{\theta}_{\dot{A}} + \bar{\xi}_{\dot{A}}). \qquad (I0.4)$$

При инфинитезимальных суперпреобразованиях

$$\delta \psi_{\dots}(x,\theta,\bar\theta) = \xi_A \left(\frac{\partial}{\partial\theta^A} - i\bar\theta_{\dot B}\,\partial_{A\dot B}\right)\psi_{\dots}(x,\theta,\bar\theta) + \tag{10.5}$$
$$+ \bar\xi_{\dot A}\left(\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot A}} + i\,\theta_B\,\partial_{B\dot A}\right)\psi_{\dots}(x,\theta,\bar\theta).$$

Легко видеть, что производные $\frac{\partial}{\partial\theta}$ и $\frac{\partial}{\partial\bar\theta}$ не ковариантны относительно суперпреобразований. Из формулы (10.5) следует, что ковариантные производные имеют вид:

$$\mathcal{D}_A = \frac{\partial}{\partial\theta^A} + i\,\bar\theta_{\dot B}\,\partial_{A\dot B}\,, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot B} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot B}} - i\,\theta_A\,\partial_{A\dot B}\,.$$

Перестановочные соотношения для $\mathcal{D}_A$ и $\bar{\mathcal{D}}_{\dot B}$ совпадают с перестановочными соотношениями для Q_A и $\bar Q_{\dot B}$ с точностью до общего знака. Понятие ковариантной производной оказывается очень полезным при рассмотрении неприводимых суперполей, построении суперсимметричных лагранжианов и т.д. /69-73/.

Суперполе эквивалентно некоторому мультиплету обычных полей. Покажем это на примере суперполя $\psi(x,\theta)$, независящего от координаты $\bar\theta$. Разлагая $\psi(x,\theta)$ в степенной ряд по θ и учитывая, что квадрат каждой компоненты спинора θ обращается в нуль (т.к. $\theta_A\theta_B + \theta_B\theta_A = 0$), для скалярного суперполя получаем:

$$\psi(x,\theta) = \psi^{(1)}(x) + \theta_A\,\psi_A^{(2)}(x) + \theta_A\,\varepsilon_{AB}\,\theta_B\,\psi^{(3)}(x). \tag{10.6}$$

Таким образом, скалярное суперполе эквивалентно мультиплету из двух обычных скалярных полей ($\psi^{(1)}(x)$ и $\psi^{(3)}(x)$) и одного обычного спинорного поля ($\psi_A^{(2)}(x)$). Для суперполя $\psi^{(j,0)}_{A_1\dots A_{2j}}(x,\theta)$, преобразующегося по представлению $\mathcal{D}(j,0)$ группы Лоренца, находим:

$$\psi^{(j,0)}_{A_1\dots A_{2j}}(x,\theta) = \psi^{(1)}_{A_1\dots A_{2j}}(x) + \theta_{A_1}\,\psi^{(2)}_{A_2\dots A_{2j}}(x) + \tag{10.7}$$
$$+ \theta_A\,\psi^{(3)}_{AA_1\dots A_{2j}}(x) + \theta_B\,\varepsilon_{BC}\,\theta_C\,\psi^{(4)}_{A_1\dots A_{2j}}(x).$$

Следовательно, суперполе $\psi^{(j,0)}_{A_1\dots A_{2j}}(x,\theta)$ эквивалентно мультиплету обычных полей, состоящему из полей $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(4)}$, преобразующихся по представлениям $\mathcal{D}(j,0)$ группы Лоренца, и полей $\psi^{(2)}$ и $\psi^{(3)}$, преобразующихся соответственно по представлениям $\mathcal{D}(j-\frac{1}{2},0)$ и $\mathcal{D}(j+\frac{1}{2},0)$.

Аналогичным образом суперполе $\psi^{(0,j)}(x,\bar\theta)$, преобразующееся по представлению $\mathcal{D}(0,j)$ группы Лоренца, является мультиплетом обычных полей, преобразующихся по представлениям $\mathcal{D}(0,j-\frac{1}{2})$, $\mathcal{D}(0,j)$ и $\mathcal{D}(0,j+\frac{1}{2})$. Можно показать, что суперполя $\psi^{(j,0)}(x,\theta)$ и $\psi^{(0,j)}(x,\bar\theta)$ образуют полный набор неприводимых суперполей. Неприводимые суперполя классифицируются по значениям величины $Y=j$ – суперспина, который может принимать значения $0, \frac{1}{2}, 1, \dots,$ /74,65/. Обычный спин не является инвариантной характеристикой суперполя и для суперполя с суперспином Y, как видно из (10.7), принимает значения

$$Y-\frac{1}{2}\,, \quad Y\,, \quad Y+\frac{1}{2}.$$

Формализм суперпространства и суперполей может быть построен и для расширений алгебры Пуанкаре произвольными спинорными генераторами (алгебра $S^{(j)}_{III}$) /75/. Суперпространство в этом случае – это $4+4j(2j+1)$ – мерное пространство с координатами $x_{A\dot B}$ и $\theta_{A_1\dots A_{2j}\dot B_1\dots\dot B_{2j-1}}$, $\bar\theta_{C_1\dots C_{2j-1}\dot D_1\dots\dot D_{2j}}$, где θ и $\bar\theta$ полностью антикоммутирующие спиноры. Алгебра $S^{(j)}_{III}$ может быть реализована как алгебра группы преобразований суперпространства, содержащей подгруппу Пуанкаре и суперпреобразования

$$\theta \to \theta' = \theta + \xi\,, \quad \bar\theta \to \bar\theta' = \bar\theta + \bar\xi\,,$$

$$x_{A\dot B} \to x'_{A\dot B} = x_{A\dot B} - i\,\xi_{AA_2\dots A_{2j}\dot B_1\dots\dot B_{2j-1}}\,\bar\theta_{A_2\dots A_{2j}\dot B\dot B_1\dots\dot B_{2j-1}} +$$
$$+ i\,\theta_{AA_2\dots A_{2j}\dot B_1\dots\dot B_{2j-1}}\,\bar\xi_{A_2\dots A_{2j}\dot B\dot B_1\dots\dot B_{2j-1}}.$$

Аналогично случаю $j=\frac{1}{2}$ вводятся суперполя и показывается, что они эквивалентны мультиплетам обычных полей. Как и при $j=\frac{1}{2}$ неприводимыми являются суперполя $\psi^{(Y,0)}(x,\theta)$ и $\psi^{(0,Y)}(x,\bar{\theta})$. Разлагая суперполя $\psi^{(Y,0)}(x,\theta)$ и $\psi^{(0,Y)}(x,\bar{\theta})$ в полиномы степени $2j(2j+1)$ по степеням соответственно θ и $\bar{\theta}$, убеждаемся, что эти суперполя эквивалентны набору обычных полей со спектром спинов /75/

$$Y-j(4j-1),\ Y-j(4j-1)+\frac{1}{2},\ldots,Y-\frac{1}{2},\ Y,\ Y+\frac{1}{2},\ldots,\ Y+j(4j-1)-\frac{1}{2},\ Y+j(4j-1).$$

Наконец, для группы, рассмотренной в разделе 9, соответствующие спинорные координаты имеют кроме лоренцевских индексов также индексы α, относящиеся к группе внутренней симметрии. Неприводимые суперполя с суперспином Y эквивалентны набору обычных полей с различными внутренними квантовыми числами и спектром спинов

$$n(Y-j(4j-1)),\ n(Y-j(4j-1))+\frac{1}{2},\ldots,Y-\frac{1}{2},\ Y,\ Y+\frac{1}{2},\ldots,n(Y+j(4j-1))-\frac{1}{2},\ n(Y+j(4j-1)),$$

где n - размерность представления группы внутренней симметрии, по которому преобразуются спинорные генераторы Q и $\bar{Q}$.

Аналогичным образом, и спинорные расширения группы Вейля и конформной группы могут быть представлены в виде групп преобразований соответствующих суперпространств.

II. Расширения алгебры Пуанкаре тензорными генераторами

Преобразования обычных групп внутренней симметрии являются, как мы видели, преобразованиями со скалярными (по отношению к группе Лоренца) параметрами. Суперпреобразования можно рассматривать как преобразования внутренней симметрии со спинорными параметрами. В рамках такого подхода естественно рассмотреть также преобразования внутренней симметрии с векторными, тензорными параметрами, т.е. расширения алгебры Пуанкаре генераторами, являющимися тензорами различного ранга.

Начнем с расширения алгебры Пуанкаре векторным генератором $V_{A\dot{B}} = (\sigma_\mu)_{A\dot{B}} V_\mu$. Из соображений лоренц-инвариантности имеем

$$[P_{A\dot{B}}, V_{C\dot{D}}] = a(\epsilon_{AC}\bar{\gamma}_{\dot{B}\dot{D}} + \epsilon_{\dot{B}\dot{D}}\gamma_{AC}),$$
$$[V_{A\dot{B}}, V_{C\dot{D}}] = b(\epsilon_{AC}\bar{\gamma}_{\dot{B}\dot{D}} + \epsilon_{\dot{B}\dot{D}}\gamma_{AC}),$$

где a и b - произвольные константы. Используя тождества Якоби для P, P и V, находим $a=0$, а из тождеств Якоби для P, V, V получаем $b=0$.

Таким образом, расширение алгебры Пуанкаре векторным генератором является тривиальным. Тривиальными являются, как нетрудно проверить, и расширения алгебры Пуанкаре произвольными тензорными генераторами. Однако, если рассмотреть расширения алгебры Пуанкаре векторным и скалярным генераторами и тензорным $T_{\mu\nu}$ ($T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}$, $T_{\mu\mu}=0$) и скалярным генераторами, то получим нетривиальные алгебры: в первом случае - алгебру, изоморфную конформной алгебре, во втором - алгебру, изоморфную аффинной алгебре. Тем самым, свойства таких расширений тесно связаны со структурой конформной и аффинной групп. В частности, мультиплеты являются бесконечнокомпонентными.

Приведенными алгебрами исчерпываются возможные расширения алгебры Пуанкаре тензорными генераторами /36/.

I2. Заключение

Итак, мы видим, что существует лишь ограниченное число различных типов симметрии. В заключении нам хотелось бы обратить внимание на тот факт, что основной причиной существования этих ограничений является релятивистская инвариантность квантовой теории поля.

Автор глубоко благодарен Ю.Б.Румеру за многочисленные обсуждения.

Литература

1. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
2. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я., Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958.
3. Стритер Р., Вайтман А., PCT, спин и статистика и все такое, "Наука", 1966.
4. Weinberg S., Phys. Rev.B, 1964,v.134,p.882.
5. Fulton T., Rohrlich R., Witten L., Rev.Mod.Phys., 1962, v.34,p.442.
6. Mack G., Salam A., Ann.Phys.(USA), 1969,v.53,p.174.
7. Tjoe-hian Go, preprint Aachen, 1974.
8. Schroer B., Swieca J.A. Phys.Rev.D,1974,v.10,p.480.
9. Luscher M., Mack G., preprint Bern, 1974.
10. Dirac P.A.M., Ann. Math., 1936,v.37,p.429.
11. Esteve A., Sona P.G., Nuovo Cimento, 1964,v.32,p.473.
12. Kihlberg A., Muller V.F., Halbwachs F., Commun.Math.Phys., 1966,v.3,p.194.
13. Tsu Yao, J.Math.Phys., 1967,v.8,p.1931; 1968,v.9,p.1615; 1971,v.12,p.315.
14. Лезнов А.Н., Федосеев И.А., ТМФ, 1970, т.5, С.181.
15. Macfadyen N.M., J.Math.Phys.,1971,v.12,p.1436; 1973,v.14, p.57,638; Nuovo Cimento A,1972,v.10,p.268.
16. Mack G., Todorov I.T., J.Math.Phys., 1969,v.10,p.2078.
17. Конопельченко Б.Г., Пальчик М.Я. Ядерная физика, 1974, т.19, с.203. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 98-73, 1973.
18. Flato M., Simon J., Sternheimer, Ann.Phys.(USA), 1970, v.61,p.78.
19. Конопельченко Б.Г., Пальчик М.Я., препринт ИЯФ СО АН СССР, 19-73, 1973.
20. Конопельченко Б.Г., Пальчик М.Я., Докл. АН СССР, 1974, т.214, с.1052.
21. Bracken A.J.,,Lett.Nuovo Cimento,1971,v.2,p.574; 1973, v.7,p.321.
22. Ferrara S., Gatto R., Grillo A.F., Springer Tracts in Modern Physics, 1973,v.67.
23. Ferrara S., Gatto R., Grillo A.F., Ann.Phys.(USA),1973, v.76,p.161.
24. Weinberg S., Phys.Rev.B,1964,v.133,p.1318.
25. Wu K.T., Phys.Rev., 1967,v.156,p.1385.
26. Ruhl W., Commun.Math.Phys.,1973,v.30,p.287;1974,v.34,p.149.
27. Поляков А.М., Письма в ЖЭТФ, 1970, т.12, с.538.
28. Migdal A.A., Phys.Lett.B, 1971,v.37,p.386.
29. Mack G., Symanzik K., Commun.Math.Phys.,1972,v.27,p.247.
30. Mack G., preprint Bern, 1973.
31. Fradkin E.S., Palchik M.Ya.,preprint PhIAN No 115,1974.
32. Mack G., Lecture notes in physics, v.17,p.300,1973.
33. Todorov I.T., CERN preprint TH-1697, 1973.
34. Konopel'chenko B.G.,preprint IYaF SO AN,74-59,1974.

35. Понтрягин Л.С., Непрерывные группы. "Наука", 1973.

36. Haag R., Lopuszanski J.T., Sohnius M., Nucl.Phys.,B, 1974,v.88,p.257.

37. Ogievetsky V.I., Lett.Nuovo Cimento,1973,v.8,p.988.

38. Борисов А.Б., Огиевецкий В.И., ТМФ, 1974, т.21, с.329.

39. Теория групп и элементарные частицы. Сборник статей "Мир", 1967.

40. Нгуен Ван Хьеу. Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц, Атомиздат, 1967.

41. Румер Ю.Б., Фет А.И., Теория унитарной симметрии, "Наука", 1970.

42. O'Raifeartaigh L., Phys.Rev.Letters,1965,v.14,p.575; Phys.Rev.B,1965,v.139,p.1052.

43. Coleman S., Mandula J., Phys.Rev.,1967,v.159,p.1251.

44. Элементарные частицы и компенсирующие поля, Сборник статей "Мир", 1964.

45. Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля, Атомиздат, 1972.

46. G.'t Hooft, Veltman M., Report CERN 73-9,1973.

47. Abers E.S., Lee B.W., Phys.Reports, 1973,v.9,p.1.

48. Fradkin E.S., Tyutin I.V., Riv.Nuovo Cimento,1974,v.4,p.1.

49. Славнов А.А., ЭЧАЯ, 1974, т.5, с.755

50. Costa G., Tonin M.,Riv.Nuovo Cimento, 1975,v.5,p.29.

51. Березин Ф.А., Кац Г.И. Математический сборник. Новая серия, 1970, т.82, с.343.

52. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П., Письма в ЖЭТФ, 1971, т.13, с. 452.

53. Лихтман Е.П., Краткие сообщения по физике, 1971, т.5, с. 33.

54. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. Сборник "Проблемы теоретической физики" памяти И.Е.Тамма "Наука", 1972 , с.37.

55. Акулов В.П., Волков Д.В. Письма в ЖЭТФ, 1972, т.16, с.621; ТМФ, 1974, т.18, с.39.

56. Wess J., Zumino B., Nucl.Phys.B, 1974,v.70,p.39.

57. Березин Ф.А., Метод вторичного квантования. "Наука",1965.

58. Corwin L., Ne'eman Y., Sternberg S., Rev.Mod.Phys.,1975, v.47,p.573.

59. Wess J., Zumino B., Phys.Lett.B,1974,v.49,p.52.

60. Iliopoulos J., Zumino B., Nucl.Phys.B,1974,v.76,p.310.

61. Wess J., Zumino B., Nucl.Phys.B,1974,v.78,p.1.

62. Salam A., Strathdee J., Phys.Lett.B,1974,v.51,p.353.

63. Ferrara S., Zumino B., Nucl.Phys.B,1974,v.79,p.413.

64. Zumino B., In Proc.17 Intern. Conf. High-Energy Phys., London,1974.

65. Конопельченко Б.Г. Суперсимметрия, препринт ИЯФ СО АН СССР, 74-96, 1974.

66. O'Raifeartaigh L., Lecture Notes on Supersymmetry, preprint Dublin,1975.

67. Мезинческу Л., Огиевецкий В.И., УФН (в печати).

68. Конопельченко Б.Г., Письма в ЖЭТФ, 1975, т.21, с.612.

69. Salam A., Strathdee J., Nucl.Phys.B,1974,v.76,p.477.

70. Ferrara S., Wess J., Zumino B.,Phys.Lett.B,1974,v.51,p.239.

71. Salam A., Strathdee J., Phys.Rev.D,1975,v.11,p.1521.

72. Capper D.M., Nuovo Cimento A, 1975,v.25,p.259.

73. Fujikawa K., Lang W., Nucl.Phys.B,1975,v.88,p.61;p.77.

74. Salam A., Strathdee J., Nucl.Phys.B,1974,v.80,p.499.

75. Конопельченко Б.Г. Ядерная физика, 1976, т.23, № 3.

Работа поступила - 28 июля 1975 г.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 5.XI-1975 г. МН 03214
Усл. 3,0 уч.-изд.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 101

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР