

P.97

59

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 111

Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

ФОРМИРОВАНИЕ ОБЛАКА БЫСТРЫХ
ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ИНЖЕКЦИИ
МОЩНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО
ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВАКУУМ

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. № _____

Новосибирск

1975

ФОРМИРОВАНИЕ ОБЛАКА БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ИНЖЕКЦИИ
МОЩНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВАКУУМ

Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

А Н Н О Т А Ц И Я

Аналитически описана динамика формирования облака релятивистских электронов, возникающего вблизи анодной фольги сильноточного электронного ускорителя. Показано, что при определенных условиях плотность облака может на 2-3 порядка превосходить плотность исходного релятивистского пучка.

1. Введение

В настоящей работе показано, что при инжекции релятивистского электронного пучка в вакуум или в плазменный ступок можно при некоторых условиях получить облако релятивистских электронов с плотностью, во много раз превосходящей плотность исходного пучка. Обсуждаются физические эффекты, определяющие динамику формирования такого облака.

Сильноточные релятивистские электронные пучки обычно получают в т.н. "плоских" автоэмиссионных диодах, т.е. в диодах, где катод и анод представляют собой диски с радиусом R , значительно превосходящим межэлектродный зазор Δ . Если такой диод помещен в сильное однородное магнитное поле, перпендикулярное поверхностям электродов, то задача о движении электронов одномерна и очень проста^{х)}. При бесконечной эмиссионной способности катода (чему формально соответствует обращение в нуль электрического поля на его поверхности) плотность тока ускоренных электронов ограничивается эффектом пространственного заряда и в релятивистском случае определяется формулой
$$j_b = \gamma_0 m c^3 / 2 \pi e \Delta^2$$
; где m и e , соответственно, масса и заряд электрона, c - скорость света, а γ_0 представляет собой отношение энергии ускоренного электрона к $m c^2$. Ориентируясь на имеющиеся сейчас ускорители, будем считать $\gamma_0 < 10 + 20$. Для дальнейшего удобно ввести величину, определенную формулой:

$$n_{b0} = \frac{m c^2}{2 \pi e^2 \Delta^2} (\gamma_0 - 1), \quad (1)$$

которая равна плотности электронов в пучке при $\gamma_0 \gg 1$ и с точностью до численного коэффициента дает плотность пучка при $\gamma_0 \approx 1 \ll 1$.

х) Если внешнее магнитное поле мало или вовсе отсутствует, то нужно учитывать искривление траекторий электронов в собственном магнитном поле пучка; см /1/.

Если в качестве анода используется достаточно тонкая фольга, то электронный пучок практически без потерь вылетает во внешнее пространство. В соответствии с реальной ситуацией (см., например, /2/), мы будем считать, что фольга изготовлена из материала с большим атомным номером Z , причем $Z \gg \gamma_0$. При движении в таком веществе электрон относительно быстро рассеивается по углу и значительно медленнее теряет свою энергию: время рассеяния на угол порядка единицы примерно в Z/γ_0 раз меньше времени потери энергии. Ниже мы воспользуемся этим обстоятельством.

Рассмотрим, что произойдет с пучком ускоренных электронов, если он будет инжектирован в вакуум. Легко понять, что при плотности пучка, определяемой соотношением (1), электроны, удалившись от фольги на расстояние порядка Δ будут возвращены назад электрическим полем изображения. Поскольку фольга тонкая и рассеяние в ней мало, электроны проматят сквозь нее и попадут в диод. Здесь они почти достигнут поверхности катода, но не ударятся о нее, так как при двух-вперед и назад-пролетах через фольгу их продольный импульс несколько уменьшится, и они не смогут преодолеть потенциальный барьер на пути к катоду. Ясно, что далее этот процесс будет повторяться, причем в него будут вовлекаться новые электроны, эмиттированные с катода, т.е. вблизи фольги возникнет облако осциллирующих электронов с возрастающей во времени плотностью. Плотность облака будет расти до тех пор, пока пространственный заряд той части облака, которая находится внутри диода, не приведет к запирающему диодного тока. Ниже будет показано, что это происходит, когда плотность электронов в облаке на 2-3 порядка превышает плотность пучка.

Объем облака релятивистских электронов можно существенно увеличить, если с внешней стороны анодной фольги создать ступку достаточно плотной плазмы (рис. 1а) с длиной L ; значительно превышающей Δ . Плазма будет компенсировать пространственный заряд облака, и поэтому оно заполнит весь плазменный ступок, вплоть до его границы с вакуумом, от которой электроны будут по-прежнему отражаться за счет эффекта пространственного заряда. Граница между ступком и вакуумом не

обязательно должна быть резкой. Для дальнейшего существенно только, чтобы ширина переходной области была мала по сравнению с L .

Хотя наличие или отсутствие плазменного ступка не оказывает особенно существенного влияния на приводимые ниже рассуждения, для определенности мы будем всегда говорить о случае, когда ступок имеется.

Рассмотрим качественно динамику формирования облака. При этом время удобно измерять в числе N пролетов электронов через фольгу (при наличии нейтрализующего плазменного ступка длины $L \gg \Delta$ имеем $N \sim tc/L$). Очевидно, что за время порядка нескольких пролетов количество электронов в облаке становится значительно больше того их числа, которое инжектируется за время одного пролета, и изменения параметров облака становятся "медленными" (малыми за время одного пролета). Ниже мы будем заниматься именно этой областью времен ($N \gg 1$).

В дальнейшем можно выделить несколько характерных моментов времени. До момента $N \sim N_1 \equiv 1/\overline{\theta_0^2}$, где $\overline{\theta_0^2}$ - средний квадрат угла рассеяния электрона, падающего на фольгу перпендикулярно ее поверхности, вместе с накоплением частиц будет происходить размытие их углового распределения. При $N > N_1$ большая часть электронов облака будет входить в состав изотропного распределения, к которому будут медленно добавляться новые частицы за счет инжекции пучка. При $N \sim N_2 \equiv Z N_1 / \gamma_0 \gg N_1$ первые из инжектированных электронов замедлятся и поглотятся фольгой, а при $N \gg N_2$ в системе установится истинно стационарное состояние, когда прибыль электронов из пучка будет полностью компенсироваться поглощением замедленных электронов в фольге.

Наибольший практический интерес представляет рассмотрение следующих двух отрезков времени: $N_1 \ll N \ll N_2$, когда происходит накопление почти моноэнергетических электронов с изотропной функцией распределения, и $N \gg N_2$ когда функция распределения становится существенно немонаэнергетической и начинается поглощение электронов в фольге (более ранние

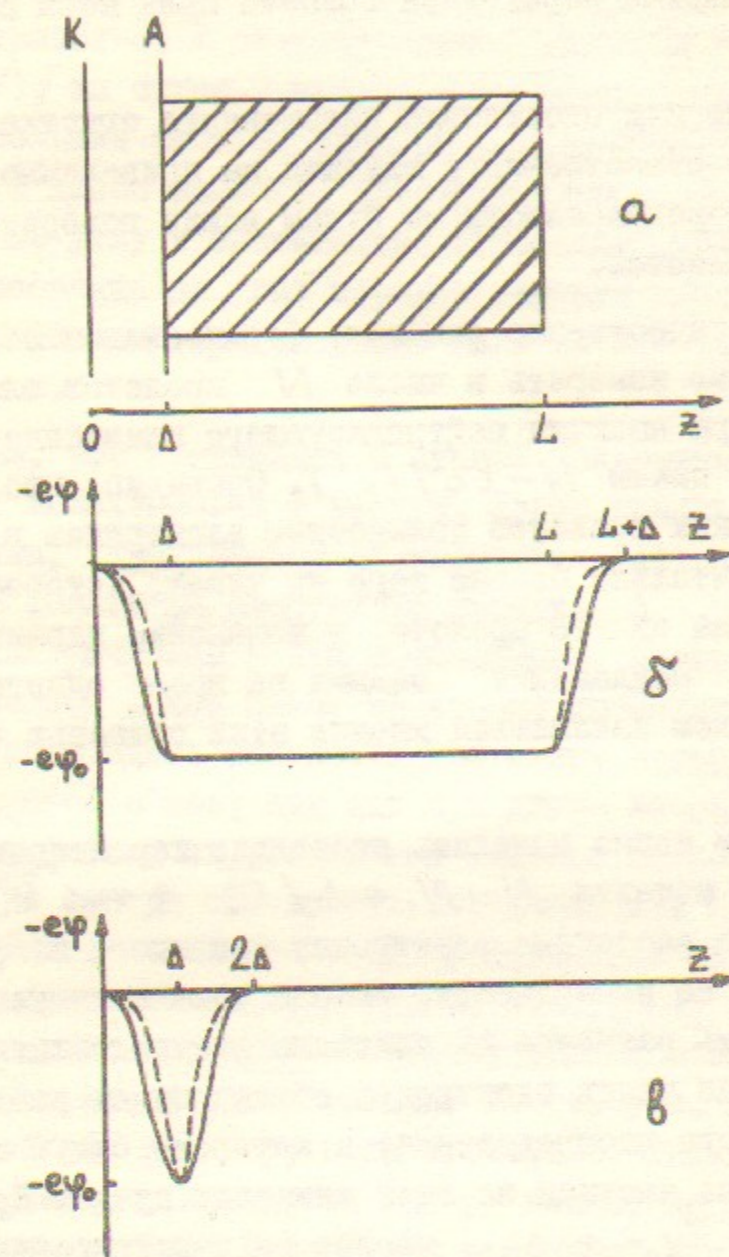


Рис.1. Геометрия задачи:

- а) К - катод; А - анодная фольга; область, занятая плазмой, заштрихована;
 б), в) форма "потенциальной ямы"; удерживающей осциллирующие электроны при наличии и в отсутствие плазменного сгустка; соответственно, в два последовательных момента времени t_1 (сплошная линия) и t_2 (пунктир); $t_2 > t_1$.

промежутки времени, $N < N_1$, представляют меньший интерес, т.к. число накопленных электронов еще относительно мало). Задача о динамике накопления быстрых электронов, по существу, состоит в том, чтобы выяснить, как электроны, имеющие функцию распределения одного из двух указанных выше типов, влияют на распределение электрического поля внутри диода и тем самым на ток инжекции (который и определяет скорость накопления).

На возможность появления осциллирующих около фольги электронов было указано в работе /3/, где обсуждался вопрос о том, как связанное с наличием этих электронов изменение электрического поля в диоде может влиять на ускорение ионов к катоду. В этой работе был рассмотрен нерелятивистский случай, $\gamma_0 - 1 \leq 1$, причем функция распределения электронов задавалась более или менее произвольно, без учета ограничений, связанных со спецификой рассеяния в фольге. Возможность использования плазменного сгустка для накопления электронов не обсуждалась.

II. Основные уравнения

Поместим начало системы координат на катоде и направим ось z от катода к фольге перпендикулярно поверхности катода. Функция распределения электронов f зависит от продольной (p_z) и поперечной (p_\perp) составляющих импульса, координаты z и времени t : $f = f(p_z, p_\perp, z, t)$. Записанное в этих переменных кинетическое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial p_z} = St f,$$

где $\varphi = \varphi(z)$ - потенциал электрического поля;
 v_z - z - составляющая скорости электронов; $St f$ - интеграл столкновений, который отличен от нуля только внутри фольги. В интересующем нас диапазоне энергий электронов (не более 5-10 МэВ) главными процессами в фольге являются упругое рассеяние на ядрах и торможение на атомных электронах.

Тормозное излучение и образование пар при $\gamma_0 \approx 10-20$ несущественны. Соответственно, для интеграла столкновений можно записать следующее выражение (см./4/):

$$Stf = \left[\frac{\nu(p)}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \mu(p) f \right] h(z).$$

Здесь мы пользуемся сферической системой координат p и θ в пространстве импульсов, причем угол θ отсчитывается от оси z . Через $\nu(p)$ обозначена частота упругих столкновений, а $\mu(p)$ — энергия, которую электрон теряет на единице пути в фольге. Функция $h(z)$ равна нулю вне фольги и единице внутри нее. В дальнейшем нам понадобятся выражения для среднего квадрата угла рассеяния $\overline{\theta_0^2}(p)$ и величины потери энергии электроном $\delta\varepsilon(p)$, характеризующих прохождение электрона через фольгу в направлении, перпендикулярном ее плоскости:

$$\delta\varepsilon(p) = \mu(p)l, \quad \overline{\theta_0^2}(p) = \frac{4\nu(p)l}{v},$$

где l — толщина фольги. Применительно к тонкой фольге для функций $\overline{\theta_0^2}(p)$ и $\delta\varepsilon(p)$ может быть написано явное выражение (см., напр., /5/):

$$\overline{\theta_0^2}(p) = 4\pi l N_0 Z^2 \frac{e^4}{p^2 v^2} \Lambda_1,$$

$$\delta\varepsilon(p) = 2\pi l N_0 Z \frac{e^4}{mv^2} \Lambda_2,$$

где N_0 — число атомов в единице объема, Z — атомный номер материала фольги, Λ_1 и Λ_2 — известные логарифмические множители, которые с интересующей нас точностью можно считать не зависящими от энергии. Отношение $\overline{\theta_0^2}(p) \varepsilon / \delta\varepsilon(p)$, характеризующее насколько рассеяние по углу идет быстрее чем потеря энергии, при этом равно

$$\overline{\theta_0^2}(p) \frac{\varepsilon}{\delta\varepsilon(p)} = 2\alpha \frac{Z}{\gamma\beta^2},$$

где $\beta = v/c$, $\alpha = \Lambda_1 / \Lambda_2$ — множитель порядка единицы.

Движение в стационарном потенциале $\varphi(z)$ сохраняет значение полной энергии $\varepsilon - e\varphi(z)$ ($\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$) и поперечной составляющей импульса p_1 . Однако, нам будет удобнее в качестве интегралов движения выбрать модуль импульса p и угол θ , которыми электрон обладает у поверхности фольги, при $z = \Delta$. Через эти величины можно выразить p_1 , p_z и v_z в произвольной точке z :

$$\begin{aligned} p_1 &= p \sin\theta, \\ p_z &= (p_*^2 - p^2 \sin^2\theta)^{1/2}, \\ v_z &= c (p_*^2 - p^2 \sin^2\theta)^{1/2} (p_*^2 + m^2 c^2)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $p_* = [2me\varphi(z) + e^2\varphi^2(z)/c^2]^{1/2}$ (нуль отсчета потенциала выбран на катоде, потенциал анода будем обозначать через φ_0).

Как отмечалось во Введении, при $N \gg 1$ изменения функции распределения являются "медленными", т.е. малыми за время пролета электрона между точками поворота. Источником этих медленных изменений являются; во-первых, инжекция частиц с катода, приводящая к росту числа осциллирующих электронов и; во-вторых, рассеяние частиц в фольге, вызывающее деформацию углового распределения и торможение частиц.

Ввиду "медленности" изменения f , можно утверждать, что в каждый момент времени f является функцией интегралов движения (см., напр., /6/), т.е. $f = f(p, \theta, t)$, причем медленное изменение f во времени описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[\int_{z_1}^{z_2} (Stf) \frac{dz}{v_z(p, \theta, z)} \right] \left[\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{v_z(p, \theta, z)} \right]^{-1}, \quad (3)$$

где v_z определяется из формулы (2); а $z_{1,2}(p, \theta)$ — левая и правая точки поворота в потенциале $\varphi(z)$ (см. рис. 1б). В рассматриваемых нами условиях, когда $L \gg \Delta$; $\varphi = \varphi_0$ почти во всей области движения, за исключением узких областей шириной $\sim \Delta$ вблизи ее границ, т.е. $v_z(p, \theta, z) = v_z(p, \theta, \Delta)$. Далее, учитывая, что функция $h(z)$ отлична от нуля только внутри фольги, где φ ; разумеется, тоже равно φ_0 , получаем окончательно из (3):

$$L \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4} v_{\theta_0}^2(p) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \delta \varepsilon(\rho) \rho^2 f. \quad (4)$$

Для учета инжекции частиц с катода в правую часть этого уравнения следует добавить источник вида

$$\frac{j_b}{e} \frac{1}{2\pi \rho^2 \sin \theta} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\theta), \quad (5)$$

где $j_b = j_b(t)$ — плотность эмиссионного тока; ρ_0 — импульс электронов пучка у фольги.

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Если бы мы рассматривали задачу в отсутствие нейтрализующего плазменного ступка, и потенциал $\varphi(z)$ имел бы вид, изображенный на рис. 1в; то надо было бы учитывать тот факт, что при накоплении частиц потенциал медленно меняется во времени. Вместе с φ меняется со временем и полная энергия частиц, осциллирующих между точками поворота, причем это изменение, вообще говоря, не мало. Для описания соответствующей задачи от переменных z и p_z следует перейти к переменным действие — угол. Поскольку действие I является адиабатическим инвариантом (в рассматриваемом контексте — просто интегралом движения), то функция распределения

может быть представлена в виде: $f = f(I, p_\perp, t)$. Временная эволюция f в этом случае описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Stf) d\psi,$$

где через ψ обозначена угловая переменная; канонически сопряженная с I .

Таким образом, задача о накоплении осциллирующих электронов в системе, где область, прилегающая к фольге не занята плазмой, несколько отличается от задачи с нейтрализующим плазменным ступком^{х)}. С другой стороны, при определении установившегося состояния (а именно это состояние и представляет наибольший практический интерес) наличие или отсутствие плазмы несущественно.

III. Динамика накопления при упругом рассеянии

Ниже мы рассмотрим динамику накопления электронов на временах $N_1 \ll N \ll N_2$; когда можно пренебречь размытием частиц по энергии и считать их функции распределения моноэнергетичной. Как указывалось во Введении, она "медленно" меняется во времени, поэтому для ее нахождения можно воспользоваться уравнением (4) (с источником (5)); пренебрегая зависимостью f и j_b от t ($\partial f / \partial t = 0$) и опуская член, описывающий потери энергии:

$$\frac{v_{\theta_0}^2(p)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} = - \frac{2j_b}{\pi e v \rho^2 \sin \theta} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\theta). \quad (6)$$

Решая это уравнение, получаем

х) Вообще говоря, не вполне стационарен потенциал и в задаче с плазменным ступком, но здесь изменения φ происходят лишь в узких по сравнению со всем масштабом задачи областях, и фактически условие сохранения адиабатического инварианта I совпадает с законом сохранения энергии (с точностью до малых порядка Δ/L). Поэтому ниже, рассматривая задачу с плазменным ступком длины $L \gg \Delta$, мы будем пользоваться относительно простым уравнением (4).

$$f(\rho, \theta) = \frac{n_0}{4\pi\rho^2} \left(1 + \frac{8n_b}{n_0\theta_0^2} \left| \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| \right) \delta(\rho - \rho_0), \quad (7)$$

где $\overline{\theta_0^2} = \overline{\theta_0^2}(\rho_0)$, $n_b = j_b / ev_0$ — плотность пучка у фольги, n_0 — константа интегрирования, выбранная так, чтобы она равнялась плотности частиц изотропной части f у фольги. Слабую зависимость f от времени теперь можно учесть, полагая $n_0 = n_0(t)$ и $n_b = n_b(t)$.

Уравнение (6) представляет собой условие постоянства потока частиц по углу. Второе слагаемое в (7) и есть решение, в котором поток по углу не зависит от θ и равен j_b / e . Очевидно, оно правильно описывает функцию распределения при $\theta \ll 1$, а в области $\theta \gtrsim 1$ оно мало и поэтому несущественно. Поскольку частицы пучка попадают в плазменный сгусток, испытав минимум одно рассеяние в фольге, то при $\theta \lesssim (\overline{\theta_0^2})^{1/2}$ в формальном решении (7) следует заменить $|\ln \operatorname{tg}(\theta/2)|$ на величину порядка $|\ln(\overline{\theta_0^2})^{1/2}|$. С учетом этих замечаний вид угловой части функции распределения $g(\theta)$ ($g(\theta)$ — множитель в круглых скобках в формуле (7)) приведен на рис. 2. Логарифмическими "пичками" на функции распределения (рис. 2) заведомо можно пренебречь, если имеет место соотношение

$$n_0 \gg \frac{n_b}{\theta_0^2} \left| \ln \overline{\theta_0^2} \right|,$$

справедливость которого мы будем предполагать. Заметим, что это довольно мягкое условие, т.к. на рассматриваемых временах автоматически выполняется неравенство

$$n_0 \gg \frac{n_b}{\theta_0^2} \quad (8)$$

В самом деле, облако состоит из электронов, испущенных катодом за время t , т.е. $n_0 L \sim n_b c t$; но на рассматриваемой стадии процесса $t \gg L / c \overline{\theta_0^2}$, что и дает выписанное неравенство.

Через функцию (7) определяется плотность электронов в произвольной точке z :

$$n(z) = n_0 \frac{\rho \varepsilon}{\rho_0 \varepsilon_0} = \frac{[2me\varphi(z) + e^2\psi^2(z)/c^2]^{1/2} [e\varphi(z) + mc^2]}{\rho_0 \varepsilon_0} n_0 \quad (9)$$

(мы пренебрегли неизотропным слагаемым в (7)). Поскольку в ускоряющем промежутке, кроме облака осциллирующих электронов, есть еще эмиттированные с катода электроны пучка, плотность которых равна

$$n_b(z) = \frac{j_b}{ev(z)}, \quad (10)$$

уравнение Пуассона имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 4\pi e [n(z) + n_b(z)]. \quad (11)$$

Удобно от потенциала φ перейти к переменной γ : $\gamma^{-1} = e\varphi / mc^2$. Воспользовавшись (9) и (10), получим

$$\frac{d^2\gamma}{dz^2} = \frac{4\pi n_0 e^2}{mc^2 \gamma_0 \sqrt{\gamma_0^2 - 1}} \left(\varkappa \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \gamma \sqrt{\gamma^2 - 1} \right),$$

где $\varkappa = (\gamma_0^2 - 1)n_b/n_0$. Результат интегрирования этого уравнения с граничным условием $d\gamma/dz = 0$ при $z = 0$, что соответствует обращению в нуль напряженности электрического поля у поверхности катода, выглядит следующим образом:

$$\frac{n_0}{n_b} = \frac{3}{4} \gamma_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1}} R^2(\gamma_0, \frac{n_b}{n_0}), \quad (12)$$

где через R обозначен определенный интеграл

$$R(\gamma_0, \frac{n_b}{n_0}) = \int_0^{\sqrt{\gamma_0^2 - 1}} \left[\frac{x}{(x^2 + 1)(3\varkappa + x^2)} \right]^{1/2} dx \quad (13)$$

а n_b определяется формулой (1).

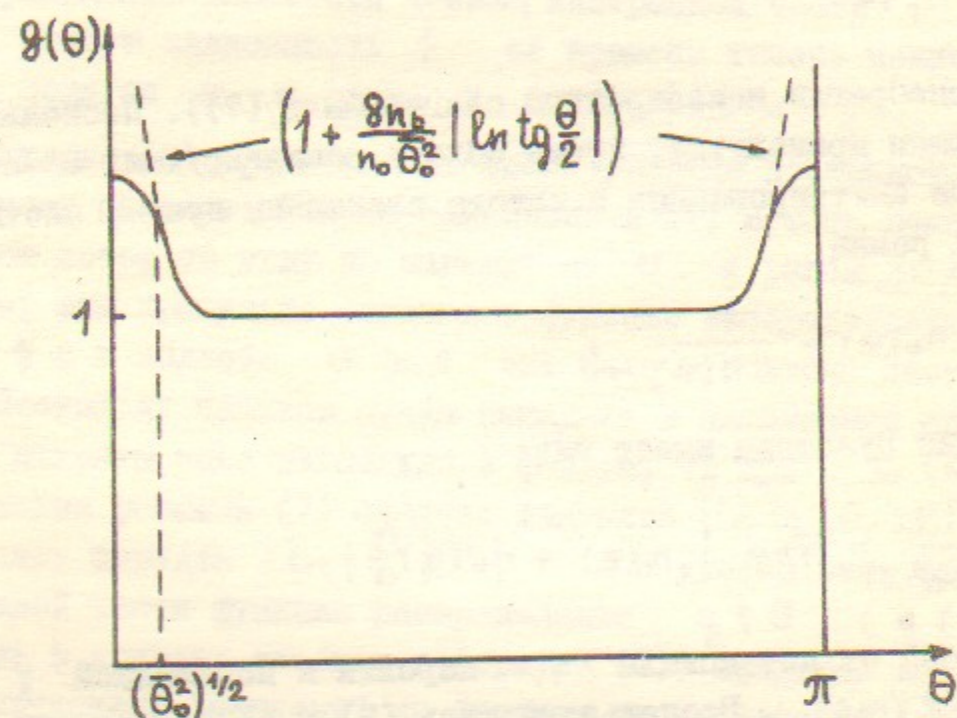


Рис.2.

Угловая часть функции распределения $g(\theta)$. Высота "пиков" в областях $\theta \sim (\bar{\theta}_0^2)^{1/2}$, $\pi - \theta \sim (\bar{\theta}_0^2)^{1/2}$ приблизительно равна $1 + n_b |\ln \bar{\theta}_0^2| / n_0 \bar{\theta}_0^2$.

К соотношению (12) нужно добавить уравнение, выражающее условие сохранения числа частиц. Поскольку область плазмы за фольгой настолько велика, что основная доля быстрых электронов содержится в ней, а не в диодном промежутке, то это уравнение имеет вид:

$$L \frac{dn_0}{dt} = n_b v_0, \quad (14)$$

v_0 — скорость электронов пучка у фольги. Определяя зависимость плотности пучка от плотности облака $n_b(n_0)$ из (12) и подставляя ее в (14), можно найти функцию $n_0(t)$ и, тем самым, решить задачу о динамике накопления электронов при упругом рассеянии. Однако, в общем случае эти вычисления невозможно предельно в аналитическом виде, поэтому мы получим решение в релятивистском пределе $\gamma_0 \gg 1$, причем будем рассматривать начальную стадию процесса, когда плотность облака не слишком велика, так что $n_b/n_0 \approx \gamma_0^{-2}$. Вместе с условием (8) это означает, что $\bar{\theta}_0^2 \gg \gamma_0^{-2}$. Тогда в подынтегральном выражении (13) можно пренебречь единицей по сравнению с x^2 и заменить верхний предел интегрирования бесконечностью, что в результате дает:

$$n_b = 3K^4 \frac{n_{b0}^2}{n_0}, \quad (15)$$

где $K = K(1/\sqrt{2})$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Теперь, решая (14), находим:

$$n_0(t) = K^2 n_{b0} \sqrt{6 \frac{c}{L} t}, \quad (16)$$

$$n_b(t) = 3K^2 n_{b0} \sqrt{\frac{L}{6ct}}$$

Эти выражения справедливы пока $n_b/n_0 \approx \gamma_0^{-2}$ и теряют силу при

$$t \sim t_n \approx \frac{L}{c} \gamma_0^2. \quad (17)$$

В дальнейшем плотность облака продолжает расти, а ток эмиссии падать до тех пор, пока диод не заперется, т.е. плотность пучка не обратится в нуль. Условие запирания получается из соотношения (12), в котором надо положить $n_b = 0$, и в предельных случаях имеет вид:

$$n_0 = 6 n_{b0} \quad \text{при} \quad \gamma_0 - 1 \ll 1,$$

$$n_0 = 3 K^2 \gamma_0 n_{b0} = 10,3 \gamma_0 n_{b0} \quad \text{при} \quad \gamma_0 \gg 1,$$

где K — то же, что и в (15). Для промежуточных значений зависимость $n_0(\gamma_0)$ приведена на рис.3.

Легко видеть, что конечная плотность облака при $\gamma_0 \gg 1$ ненамного превышает значение плотности при $t \sim t_n$ (формула (16)), поэтому оценка (17) дает время накопления электронов в системе.

Для справедливости приведенного рассмотрения эффекты, связанные с торможением пучка в фольге должны быть несущественны во все время накопления. За это время функция распределения облака "размоется" по энергии на величину $\Delta \varepsilon \sim \delta \varepsilon(\rho_0) \gamma_0^2$. Это означает, что в точках с потенциалом $\varphi \ll \varphi_* \sim \Delta \varepsilon / e$ плотность осциллирующих электронов будет заметно отличаться от того, что получается, если считать $f \sim \delta(\rho - \rho_0)$, а при $\varphi \gg \varphi_*$ отличие пренебрежимо мало. С другой стороны, основной вклад в интеграл (13) при $\gamma_0 \gg 1$; $n_b/n_0 \approx \gamma_0^{-2}$ дает область, в которой $\varphi \sim \varphi_0 \sqrt{n_b/n_0}$ (это область минимальной плотности заряда, где $n_b(z) \sim n(z)$). Таким образом, влиянием потерь энергии можно пренебречь, если к концу процесса накопления $\varphi_0 \sqrt{n_b/n_0} \approx \Delta \varepsilon / e$; что дает условие

$$\frac{\delta \varepsilon(\rho_0)}{\varepsilon_0} \lesssim \gamma_0^{-3}$$

В противном случае диод переходит в стационарный режим работы, описанный в следующем разделе, до того как плотность облака достигнет своей максимальной величины.

Мы рассмотрели процесс накопления электронов в облаке при $\overline{\theta_0^2} \gg \gamma_0^{-2}$. Полученная оценка времени накопления t_n , как и должно быть, соответствует числу пролетов $N \gg N_1$. Если же выполняется обратное неравенство $\overline{\theta_0^2} \ll \gamma_0^{-2}$ (по-прежнему $\gamma_0 \gg 1$), то уже при $N \sim N_1$ плотность облака достигает такого значения, что диод запирается, и для описания динамики накопления в этом случае нужно решать гораздо более сложную задачу о работе диода при $N \lesssim N_1$, решение которой не удастся получить в аналитическом виде.

Следует отметить, что обстоятельство, что на стадии $1 \ll N \ll N_1$ частоты осцилляции всех накопленных электронов очень близки (поскольку еще не произошло углового рассеяния). Такая система может представлять интерес с точки зрения генерации ВЧ-колебаний.

IV. Учет потерь энергии в фольге

При $N \gg N_2$ рассматриваемая задача становится стационарной, причем основная доля осциллирующих электронов распределена изотропно. Уравнение для изотропной части f получится, если проинтегрировать (4) (с источником (5)) по полному телесному углу:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \delta \varepsilon \rho^2 f = - \frac{j_b}{4\pi e} \delta(\rho - \rho_0),$$

откуда находим

$$f(\rho) = \begin{cases} \frac{j_b}{4\pi e \rho^2 \delta \varepsilon} & \text{при } \rho \leq \rho_0, \\ 0 & \text{при } \rho > \rho_0. \end{cases} \quad (18)$$

Ниже мы ограничимся рассмотрением релятивистского случая, $\gamma \gg 1$.

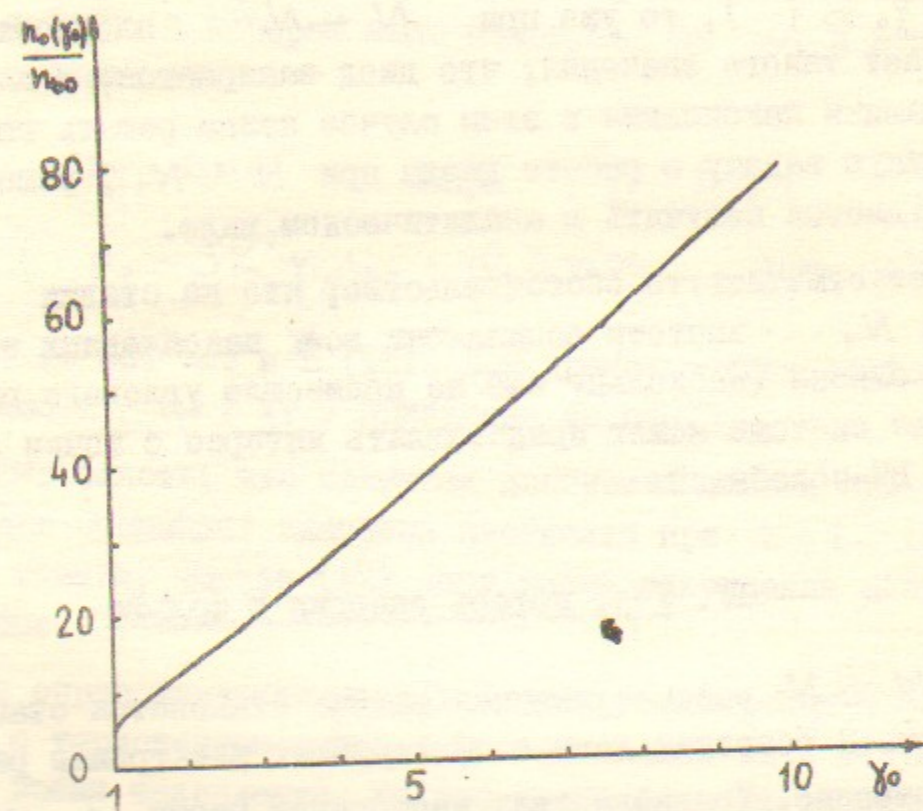


Рис.3. Зависимость плотности электронного облака от γ_0 .

Интегрируя $f(p)$, получаем связь между плотностью облака и плотностью пучка у фольги:

$$n_0 = n_b \frac{\epsilon_0}{\delta\epsilon} \gg n_b$$

($\delta\epsilon$ при $\gamma_0 \gg 1$ не зависит от p). Вне фольги выражения для плотности облака (которые определяются по функции (18)) в зависимости от безразмерного потенциала x ($x = \varphi/\varphi_0$) понадобятся нам в следующих областях (рядом приведены соответствующие выражения для плотности пучка):

$$n(x) = \frac{1}{3} n_0 \left(2 \frac{x}{\gamma_0}\right)^{3/2}, \quad n_b(x) = \frac{n_b}{\sqrt{2x\gamma_0}} \quad \text{при } x \ll \gamma_0^{-1} \quad (19)$$

$$n(x) = \frac{1}{3} n_0 x^3, \quad n_b(x) = n_b \quad \text{при } \gamma_0^{-1} \ll x \ll 1 \quad (20)$$

Зная функции $n(x)$ и $n_b(x)$, интегрированием уравнения Пуассона (II), можно получить соотношение для нахождения зависимости $n_0(\gamma_0, \delta\epsilon/\epsilon_0)$. Очевидно, оно имеет вид:

$$\int_0^1 G(x) dx = \frac{2}{\sqrt{n_b n_0}}, \quad (21)$$

где

$$G(x) = \left\{ \int_0^x [n(\zeta) + n_b(\zeta)] d\zeta \right\}^{-1/2}. \quad (22)$$

Предположим, что основной вклад в интеграл (21) вносит нерелятивистская область $x \ll \gamma_0^{-1}$. Тогда при вычислении $G(x)$ можно пользоваться формулами (19), что дает

$$G(x) = \left(\frac{4}{15} \sqrt{2} n_0 \gamma_0^{-3/2} x^{5/2} + \sqrt{2} n_b \gamma_0^{-1/2} x^{1/2} \right)^{-1/2}. \quad (23)$$

Эта функция достигает максимума при $x \sim (\gamma_0 \delta\epsilon/\epsilon_0)^{1/2}$ и для справедливости высказанного предположения необходимо, чтобы

$$\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_0} \ll \gamma_0^{-3}, \quad (24)$$

что выполняется при используемых в экспериментах значениях γ_0 для фольг толщиной в несколько десятков микрон. Подставляя (23) в (21) и проводя интегрирование, найдем значение стационарной плотности облака

$$n_0 = \frac{15^{3/4}}{64} B^2 \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right) \gamma_0^{5/4} \left(\frac{\varepsilon_0}{\delta \varepsilon} \right)^{1/4} n_{b0} = 12,1 \gamma_0^{5/4} \left(\frac{\varepsilon_0}{\delta \varepsilon} \right)^{1/4} n_{b0}, \quad (25)$$

где $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера. Плотность пучка при этом равна

$$n_b = 12,1 \gamma_0^{5/4} \left(\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{3/4} n_{b0} \quad (26)$$

В область потенциалов $x \sim (\gamma_0 \delta \varepsilon / \varepsilon_0)^{1/2}$ попадает частица, импульс которой у фольги лежит в узком слое $\rho_0 > \rho \gtrsim \rho_0 [1 - (\gamma_0 \delta \varepsilon / \varepsilon_0)^{1/2}]$, т.е. ток через диод в рассмотренном случае определяется значением $f(\rho)$ у своей верхней границы. Это означает, что формула (26) для плотности пучка (но не (25)) начинает "работать" гораздо раньше момента времени $N \sim N_2$, а именно: когда облако, запирающее диод на стадии упругого рассеяния "сползет" по энергии на величину $\Delta \varepsilon \gtrsim \varepsilon_0 (\gamma_0 \delta \varepsilon / \varepsilon_0)^{1/2}$, что произойдет при $N \gtrsim (\gamma_0 \varepsilon_0 / \delta \varepsilon)^{1/2}$.

В обратном пределе $\delta \varepsilon / \varepsilon_0 \gg \gamma_0^{-3}$ (но, разумеется, $\delta \varepsilon / \varepsilon_0 \ll 1$) основной вклад в интеграл (21) вносит область $\gamma_0^{-1} \ll x \ll 1$, и для вычисления $G(x)$ надо воспользоваться формулами (20). Приведем результат в этом случае:

$$n_0 = \frac{1}{3 \cdot 12^{2/3}} B^2 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\varepsilon_0}{\delta \varepsilon} \right)^{2/3} n_{b0} = 4,5 \left(\frac{\varepsilon_0}{\delta \varepsilon} \right)^{2/3} n_{b0}. \quad (27)$$

Остановимся теперь на условиях применимости результатов, полученных в этом разделе. С самого начала мы предположили, что функция распределения изотропна. Такая функция соответствует равному нулю потоку частиц по углу. Очевидно, это не так при $\rho \approx \rho_0$, $\theta \ll 1$, где постоянно действующий источник частиц (пучок) приводит к тому, что поток частиц в этой области $\sim j_b / e$. Это означает, что к функции (18) необходимо добавить неизотропное слагаемое $\sim (n_b / \rho_0^2 \bar{\theta}_0^2) \delta(\rho - \rho_0) |\ln \theta|$ (см. формулу (7) и касающиеся нее оговорки). Имея в виду получить оценки сверху, заменим $|\ln \theta|$ его максимальным значением $\sim |\ln \bar{\theta}_0^2|$. Вычисляя вклад от такой добавки $n_1(x)$ в плотность частиц, найдем

$$n_1(x) \sim \left(\frac{n_b}{\bar{\theta}_0^2} |\ln \bar{\theta}_0^2| \right) x^{1/2} \gamma_0^{-3/2} \quad \text{при } x \ll \gamma_0^{-1}, \quad (28)$$

$$n_1(x) \sim \left(\frac{n_b}{\bar{\theta}_0^2} |\ln \bar{\theta}_0^2| \right) x^2 \quad \text{при } x \gg \gamma_0^{-1} \quad (29)$$

В случае $\delta \varepsilon / \varepsilon_0 \ll \gamma_0^{-3}$, как следует из (19), сумма плотностей изотропной части облака и пучка минимальна в точке $x_* \sim (\gamma_0 \delta \varepsilon / \varepsilon_0)^{1/2}$ и равна там по порядку величины $n_* \sim n_b (\delta \varepsilon / \varepsilon_0)^{-1/4} \gamma_0^{-3/4}$. Если вклад неизотропной части в этой области много меньше n_* , то при $x < x_*$ он пренебрежим по сравнению с плотностью пучка; а при $x \gg x_*$ по сравнению с плотностью изотропной части облака. Условие $n_1(x_*) \ll n_*$ (где $n_1(x)$ нужно взять из (28)) дает

$$\frac{\bar{\theta}_0^2}{|\ln \bar{\theta}_0^2|} \gg \left(\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_0 \gamma_0} \right)^{1/2}$$

Вместе с (24) это означает, что величина $\delta \varepsilon / \varepsilon_0$ должна быть заключена в пределах

$$Q^2 \ll \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_0} \gamma_0^3 \ll 1, \quad (30)$$

где $Q = |\ln \bar{\theta}_0^2| \gamma_0^2 / Z$.

Для случая $\delta\varepsilon/\varepsilon_0 \gg \gamma_0^{-3}$ те же рассуждения приводят к требованию

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \gamma_0^3 \gg \max\{1, Q^3\}. \quad (31)$$

Выполнение неравенств (30) и (31) является необходимым условием справедливости формул (25) и (27); соответственно. Эти неравенства ограничивают область значений параметров $\delta\varepsilon/\varepsilon_0$, Z , γ_0 , достаточно широкую с точки зрения эксперимента. В случае, когда они не выполняются, при вычислении величины n_0 необходимо принимать во внимание вклад неизотропной части облака в плотность заряда. Оценки, проведенные в этом случае приводят к следующим результатам:

$$n_0 \sim \frac{n_{b0} \gamma_0^2}{Q^{1/2}} \quad \text{при} \quad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \gamma_0^3 \ll Q^2, \quad Q \ll 1,$$

$$n_0 \sim \frac{n_{b0} \gamma_0^2}{Q} \quad \text{при} \quad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \gamma_0^3 \ll Q, \quad 1 \ll Q,$$

$$n_0 \sim \frac{n_{b0} \gamma_0^2}{Q} \left(\frac{\varepsilon_0}{\delta\varepsilon}\right)^{1/2} \quad \text{при} \quad Q \ll \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \gamma_0^3 \ll Q^3.$$

У. Заключение

Для иллюстрации возможного значения полученных результатов рассмотрим следующий численный пример; достаточно близкий к реальности. Пусть пучок с $\gamma_0 = 4$ (т.е. с кинетической энергией 1,5 МэВ) генерируется в диоде с межэлектродным зазором 1 см и сквозь титановую фольгу толщиной $5 \cdot 10^{-3}$ см инжектируется в плазменный столб длиной 10 см. При указанных параметрах фольги и пучка находим, что

$$\theta_0^2 \approx 10^{-4}, \quad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx 10^{-2}$$

(полагаем $\Lambda_1 \approx \Lambda_2 \approx 10$). В этом случае численно

$$\delta\varepsilon/\varepsilon_0 \sim \gamma_0^{-3} \sim \gamma_0 / Z^2, \quad \text{так что для оценки установив-$$

шейся плотности облака можно пользоваться соотношением (25), которое дает:

$$n_0 \sim 200 n_{b0} \sim 4 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$$

Плотность плазменного облака n_p , естественно, должна быть много больше n_0 , скажем, $n_p \sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Установившаяся плотность электронного пучка n_b оценивается по формуле (26) и оказывается порядка n_{b0} . Соответственно, время накопления по порядку величины равно $(L/c) \times n_0/n_b \sim 100 L/c \sim 3 \cdot 10^{-8}$ сек. Плотность энергии в облаке релятивистских электронов будет $W \sim (\gamma_0 - 1) n_0 m c^2 / 2 \sim 50 \text{ Дж/см}^3$, а газокINETическое давление, равное одной трети от плотности энергии, составит $\sim 15 \text{ Дж/см}^3$. Чтобы обеспечить поперечное удержание такого облака, потребуется магнитное поле с $H > 70$ кгс.

За время накопления на единице площади фольги выделится энергия примерно равная $W \cdot L \sim 5 \cdot 10^2 \text{ Дж/см}^2$, что приведет к тому, что фольга испарится и начнет расширяться со скоростью $\sim 5 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$, т.е. за время накопления расширится лишь на 0,2 мм. Под действием газокINETического давления релятивистских электронов будет также происходить продольное расширение ступки нейтрализующей плазмы. Скорость расширения v_p можно найти из оценки

$$v_p \sim \sqrt{\frac{W}{3n_p M}}$$

где M — масса ионов в нейтрализующем ступке. Для аргоновой плазмы с $n_p \sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$ при указанной выше плотности релятивистских электронов $v_p \sim 2 \cdot 10^7 \text{ см/сек}$, и за время накопления плазменный ступок расширится незначительно^{х)}.

х) Заметим, что, вообще говоря, в точке $z = L$ плазменный ступок можно ограничить еще одной фольгой, и тогда плазма вовсе не будет расширяться. В этом случае во все оценки, проведенные в нашей работе, следует подставлять суммарную толщину обеих фольг.

Итак, при вполне реальных условиях можно создать объект — ступок плотной плазмы с осциллирующими внутри него релятивистскими электронами — с очень высокой плотностью энергии.* Среди многих интересных свойств, которыми обладает такой объект, наиболее существенное, возможно, состоит в том, что он может высвободить накопленную энергию за очень малое время, порядка $2L/c \sim 10^{-9}$ сек. При этом плотность потока энергии в рассмотренном выше численном примере составила бы $8 \cdot 10^{11}$ вт/см² по всей площади ступка. Обсуждение вопроса о конкретных схемах, позволяющих осуществить выделение энергии за столь малое время, выходит за рамки настоящей статьи.

Рассмотренная в разделах III и IV модель подразумевает, что в диоде отсутствует нейтрализующий ионный фон. Это предположение справедливо в течение первых 20-30 нсек работы диода. После этого ионы анодной плазмы, ускоряемые электрическим полем в направлении катода, заполняют весь диодный промежуток и наше рассмотрение теряет силу. Задача об осциллирующих электронах при наличии ионной нейтрализации будет рассмотрена отдельно.

* Полная энергия при легко реализуемой площади поперечного сечения ступка $S = 100$ см² может достигать сотен килоджоулей.

Л и т е р а т у р а

1. G. Yonas, K. R. Prestwich, J. W. Poukey, J. R. Freeman. Phys. Rev. Lett., 30, 164 (1973).
2. Ю. И. Абрашитов, В. С. Койдан, В. В. Конюхов, В. М. Лагунов, В. Н. Лукьянов, К. И. Меклер, Д. Д. Рюттов. ЖЭТФ, 66, 1324 (1974).
3. J. M. Creedon, I. D. Smith, D. S. Prono. Phys. Rev. Lett., 35, 91, July 1975; D. S. Prono, J. M. Creedon, I. Smith, N. Bergstrom. J. Appl. Phys., 46, 3310, August 1975.
4. Б. А. Трубников. В сб. Вопросы теории плазмы, I, Госатомиздат, 1963, стр. 98.
5. Экспериментальная ядерная физика, под ред. Э. Сегре, I, ИИЛ, 1955, стр. 143.
6. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев. В сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 2, Изд. АН СССР, 1958, стр. 330.

Работа поступила - 22 сентября 1975 г.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 3.XII-1975г. МН 03251
Усл. 1,5 печ.л.; тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № III.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вт