8

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 14

М.П.Рютова

КВАДРУПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ЛЕНГМЮРОВСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

Новосибирск

1975

КВАДРУПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ ЛОКАЛИЗОВАННОГО

ЛЕНГМЮРОВСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

М.П.Рютова

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что вокруг трехмерного локализованного ленгмюровского возмущения на расстояниях, много больших, чем размер возмущения, возникает статическое электрическое поле, имеющее квадрупольный характер. Найден квадрупольный момент, соответствующий этому "дальнодействующему" полю.

В настоящей работе исследуется вопрос о структуре электрического поля локализованного ленгмюровского возмущения в электронной[I)] плазме. Ранее /I/ этот вопрос был выяснен в одномерном случае, причем было показано, что на больших расстояниях от области локализации возмущения имеется статическое электрическое поле, спадающее при удалении от области возмущения лишь степенным образом ($\sim 1/x^2$). Соответствующее электрическое поле было названо в работе /I/ дальнодействующим. В настоящей работе удалось найти дальнодействующее электрическое поле в трехмерном случае. При этом оказалось, что поле имеет квадрупольный характер и является статистическим.

Как и в /I/, мы рассмотрим экспоненциально убывающие на бесконечности возмущения, которые можно характеризовать единственным пространственным масштабом L , много бо́льшим, чем дебаевский радиус ($L \gg v_T/\omega_p$). Характерное время расплывания такого возмущения τ из-за малости групповой скорости ленгмюровских колебаний велико по сравнению со временем пролета электрона через возмущение $\tau \sim \omega_p L^2/v_T^2 \gg L/v_T$.

Дальнодействующее поле обязано своим происхождением силе высокочастотного давления (пропорциональной квадрату амплитуды электрического поля), которая искажает функцию распределения электронов, пролетающих через область возмущения. Эти искажения переносятся с тепловой скоростью электронов на большие расстояния, что и приводит в области $|\vec{r}| \gg L$ к появлению электрического поля. Наша задача состоит в отыскании этого поля на расстояниях, больших по сравнению с L . Вместе с тем мы будем считать эти расстояния $\lesssim v_T \tau$. Поскольку электроны пролетают их за время, много меньшее, чем время перестройки ленгмюровского возмущения, то искажения функции распределения на таких расстояниях являются квазистатическими. Именно это обстоятельство дает возможность решить задачу до конца. Искомый эффект возникает во втором приближении по амплитуде ленгмюровского возмущения.

Исходными уравнениями являются уравнения для функции распределения электронов f и уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{e\vec{E}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad , \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi \tag{I}$$

I) Считается, что бесконечно тяжелые ионы образуют однородный нейтрализующий фон.

$$\Delta\varphi = 4\pi e\left[\int f\, d^3v - n_0\right] \qquad (2)$$

Здесь n_0 – плотность нейтрализующего фона, e и m – заряд и масса электрона.

Воспользуемся методом последовательных приближений и положим:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots$$

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$$

Здесь $f_0 = n_0 (2\pi T/m)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right)$, а

$$\vec{E}_1 = \vec{\mathcal{E}} e^{-i\omega_p t} + \vec{\mathcal{E}}^* e^{i\omega_p t} = -\nabla\varphi e^{-i\omega_p t} - \nabla\varphi^* e^{i\omega_p t}, \qquad (3)$$

φ – медленно меняющаяся функция времени, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = i\frac{3T}{2m\omega_p}\Delta\varphi \qquad (4)$$

В линейном приближении для функции распределения получим следующее выражение:

$$f_1(\vec{r},\vec{v},t) = \frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial\vec{v}} e^{-i\omega_p t}\left[\frac{i}{\omega_p}\vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{\omega_p^2}\frac{d\vec{\mathcal{E}}}{dt} - \frac{1}{\omega_p^3}\frac{d^2\vec{\mathcal{E}}}{dt^2} - \frac{1}{\omega_p^4}\frac{d^3\vec{\mathcal{E}}}{dt^3} + \cdots\right] + \text{к.с.}, \qquad (5)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + (\vec{v}\nabla)$. Выражение (5) получено итерациями по $1/\omega_p$, причем удержано нужное для отыскания дальнодействующего электрического поля число членов разложения.

Во втором приближении по амплитуде поля система уравнений (I)-(2) имеет вид:

$$\frac{df_2}{dt} - \frac{e}{m}\vec{E}_2\frac{\partial f_0}{\partial\vec{v}} = \frac{e}{m}\vec{E}_1\frac{\partial f_1}{\partial\vec{v}} = \qquad (6)$$

$$= \frac{e^2}{m^2\omega_p^2}\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}\left[\left(\mathcal{E}_\alpha^*\frac{d\mathcal{E}_\beta}{dt} + \mathcal{E}_\alpha\frac{d\mathcal{E}_\beta^*}{dt}\right) - \frac{i}{\omega_p}\left(\mathcal{E}_\alpha^*\frac{d^2\mathcal{E}_\beta}{dt^2} - \mathcal{E}_\alpha\frac{d^2\mathcal{E}_\beta^*}{dt^2}\right) - \frac{1}{\omega_p^2}\left(\mathcal{E}_\alpha^*\frac{d^3\mathcal{E}_\beta}{dt^3} + \mathcal{E}_\alpha\frac{d^3\mathcal{E}_\beta^*}{dt^3}\right)\right]\right\}$$

$$\operatorname{div}\vec{E}_2 = -4\pi e\int f_2\, d^3v \qquad (7)$$

В правой части уравнения (6) оставлены только члены, медленно меняющиеся со временем; члены, содержащие множители $\exp(\pm 2i\omega_p t)$ ввиду их экспоненциально малого вклада в функцию f_2 в области $|\vec{r}| \gg L$ ($\vec{r}$ – расстояния от области локализации возмущения), опущены.

Представим $\vec{E}_2$ в виде $\vec{E}_2 = -\nabla\Phi_2$ и выделим в правой части уравнения (6) члены, имеющие вид полной производной по времени. В результате получим:

$$\frac{df_2}{dt} + \frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial\vec{v}}\nabla\Phi_2 = \frac{e^2}{m^2\omega_p^2}\left\{\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_\alpha\partial v_\beta}\frac{d}{dt}\left[\mathcal{E}_\alpha^*\mathcal{E}_\beta - \frac{i}{\omega_p}\left(\mathcal{E}_\alpha^*\frac{d\mathcal{E}_\beta}{dt} - \mathcal{E}_\beta\frac{d\mathcal{E}_\alpha^*}{dt}\right) - \frac{1}{\omega_p^2}\left(\mathcal{E}_\alpha^*\frac{d^2\mathcal{E}_\beta}{dt^2} + \mathcal{E}_\beta\frac{d^2\mathcal{E}_\alpha}{dt^2}\right) + \frac{1}{\omega_p^2}\frac{d\mathcal{E}_\alpha}{dt}\frac{d\mathcal{E}_\beta^*}{dt}\right] - \frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}\frac{d}{dt}\left[\frac{2i}{\omega_p}\left(\mathcal{E}_\alpha^*\nabla_\alpha\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha\nabla_\alpha\mathcal{E}_\beta^*\right) + \frac{3}{\omega_p^2}\left(\mathcal{E}_\alpha^*\nabla_\alpha\frac{d\mathcal{E}_\beta}{dt} + \mathcal{E}_\alpha\nabla_\alpha\frac{d\mathcal{E}_\beta^*}{dt}\right)\right] - \frac{mf_0}{T}(\vec{v}\nabla)\left[|\mathcal{E}|^2 - \frac{3T}{m\omega_p^2}|\operatorname{div}\vec{\mathcal{E}}|^2 + \frac{3}{\omega_p^2}\left|\frac{d\vec{\mathcal{E}}}{dt}\right|^2\right] + \frac{3T}{m\omega_p^2}\frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}\nabla_\alpha\left[\nabla_\gamma\mathcal{E}_\gamma^*\nabla_\alpha\mathcal{E}_\beta + \nabla_\gamma\mathcal{E}_\gamma\nabla_\alpha\mathcal{E}_\beta^*\right]\right\} \qquad (8)$$

(напомним, что $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)$). При получении (8) мы воспользовались уравнением (4).

В работе /I/ нами было отмечено общее свойство системы уравнений (7) и (8), состоящее в том, что, если в правой части уравнения (8) стоит некоторая функция, имеющая вид полной производной по времени $dF(\vec{r},\vec{v},t)/dt$, причем

$$\int F(\vec{r},\vec{v},t)\, d^3v = 0, \qquad (9)$$

то эта система имеет решение $f_2 = F$, $\vec{E}_2 = 0$. В силу этого свойства слагаемые, являющиеся полными производными по времени и удовлетворяющие условию (9) не вносят вклада в возмущение функции распределения при больших $|\vec{r}|$ и в интересующей нас задаче могут быть опущены. Таким образом, уравнение (8) можно свести к виду:

$$\frac{df_2}{dt} + \frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}\nabla\Phi_2 = \frac{e^2}{m^2\omega_p^2}\Big\{-\frac{1}{\omega_p^2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}(\vec{v}\nabla)\big[\mathcal{E}_\alpha^*(\vec{v}\nabla)^2\mathcal{E}_\beta +$$

$$+\mathcal{E}_\beta(\vec{v}\nabla)^2\mathcal{E}_\alpha^* - (\vec{v}\nabla)\mathcal{E}_\alpha^*(\vec{v}\nabla)\mathcal{E}_\beta\big] - \frac{3}{\omega_p^2}\frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}(\vec{v}\nabla)\cdot$$

$$\cdot\big[\mathcal{E}_\alpha^*\nabla_\alpha(\vec{v}\nabla)\mathcal{E}_\beta + \mathcal{E}_\alpha\nabla_\alpha(\vec{v}\nabla)\mathcal{E}_\beta^*\big] - \frac{mf_0}{T}(\vec{v}\nabla)\Big[|\vec{\mathcal{E}}|^2 + \qquad (10)$$

$$+\frac{3}{\omega_p^2}|(\vec{v}\nabla)\vec{\mathcal{E}}|^2 - \frac{3T}{m\omega_p^2}|\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{E}}|^2\Big] + \frac{3T}{m\omega_p^2}\frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}\nabla_\alpha\big[\nabla_\gamma\mathcal{E}_\gamma^*\nabla_\alpha\mathcal{E}_\beta + \nabla_\gamma\mathcal{E}_\gamma\nabla_\alpha\mathcal{E}_\beta^*\big]\Big\}$$

После несложных преобразований это уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)f_2 + \frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}\nabla\Phi_2 = \frac{1}{m}\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}\nabla U + \frac{1}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}\nabla_\alpha Q_{\alpha\beta} \qquad (11)$$

где

$$U = \frac{e^2}{m^2\omega_p^2}\Big[|\vec{\mathcal{E}}|^2 + \frac{3T}{m\omega_p^2}|\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{E}}|^2 - \frac{1}{\omega_p^2}(\vec{v}\nabla)^2|\vec{\mathcal{E}}|^2 + \frac{3}{\omega_p^2}|(\vec{v}\nabla)\vec{\mathcal{E}}|^2\Big],$$

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{3e^2T}{m^2\omega_p^4}\big[\nabla_\gamma\mathcal{E}_\gamma^*\nabla_\alpha\mathcal{E}_\beta + \nabla_\gamma\mathcal{E}_\gamma\nabla_\alpha\mathcal{E}_\beta^* - 2\delta_{\alpha\beta}|\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{E}}|^2\big]$$

Таким образом, в рассматриваемой нами сейчас трехмерной задаче имеется принципиальное отличие от одномерной, заключающееся в том, что в высокочастотной силе появляется непотенциальная часть (последнее слагаемое в правой части уравнения (11)), тогда как в одномерном случае, очевидно, сила является потенциальной и правая часть уравнения (11) сводится просто к виду $\frac{1}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}\,\partial U(x)/\partial x$. Поэтому в одномерном случае происходила компенсация правой части уравнения (11) и слагаемого $\frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}\nabla\Phi_2$ в левой части этого уравнения, так что эффективная высокочастотная сила была много меньше, чем просто $-\partial U/\partial x$ 2). Наличие

2). Фактически эффективная в.ч. сила равнялась $-\partial U_{eff}/\partial x$, где $U_{eff} = U - e\Phi_2$ отличен от нуля лишь во втором приближении по параметру r_D/L.

непотенциального слагаемого в правой части уравнения (11) в трехмерном случае исключает возможность такой компенсации и эффект появляется в более низком порядке по r_D/L.

Для определения дальнодействующей части высокочастотного потенциала с нужной точностью достаточно решить уравнение (11) относительно f_2, опустив производную по времени в его левой части (последнее возможно потому, что мы ищем электрическое поле на расстояниях $\lesssim v_T\tau$, где функция распределения, как уже отмечалось выше, является квазистатической). В результате интегрирования этого уравнения по траекториям для f_2 получим:

$$f_2 = \frac{e}{T}f_0\Phi_2 - \frac{1}{T}f_0 U + \frac{1}{v}\int_{-\infty}^{0} Q(\vec{r} + \vec{n}\xi)\,d\xi, \qquad (12)$$

где $\vec{n} = \vec{v}/v$, а через $Q(\vec{r}, \vec{v})$ мы обозначили последнее слагаемое в (11):

$$Q(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}\nabla_\alpha Q_{\alpha\beta}$$

Выражение для Φ_2 можно получить из условия квазинейтральности плазмы

$$\int f_2\,d^3v = 0$$

В результате:

$$\Phi_2 = \frac{e}{m\omega_p^2}\Big\{|\vec{\mathcal{E}}|^2 - \frac{2T}{m\omega_p^2}\nabla_\alpha\big[\mathcal{E}_\alpha\nabla_\beta\mathcal{E}_\beta^* - \qquad (13)$$

$$-\mathcal{E}_\beta\nabla_\beta\mathcal{E}_\alpha^*\big] - \frac{3T^2}{nm^2\omega_p^2}\mathcal{J}\Big\},$$

где

$$\mathcal{J} = \int\frac{d^3v}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}\int_{-\infty}^{0}\nabla_\alpha q_{\alpha\beta}(\vec{r} + \vec{n}\xi)\,d\xi, \qquad (14)$$

а

$$q_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma\mathcal{E}_\gamma^*\nabla_\alpha\mathcal{E}_\beta + \nabla_\gamma\mathcal{E}_\gamma\nabla_\alpha\mathcal{E}_\beta^* - 2\delta_{\alpha\beta}|\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{E}}|^2$$

Отметим, что в выражении для Φ_2 все слагаемые, кроме последнего, экспоненциально быстро убывают при удалении от области возмущения. Произведем в этом члене все возможные интегрирования. Перейдем сначала в интеграле по скоростям к сферическим координатам:

$$v_x = v \sin\vartheta \cos\varphi$$

$$v_y = v \sin\vartheta \sin\varphi$$

$$v_z = v \cos\vartheta$$

В результате:

$$\mathcal{J} = -\frac{m}{T}\int_0^\infty f_0 v^2 dv \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^0 n_\beta \nabla_\alpha q_{\alpha\beta}(\vec{r} + \vec{n}\xi)\, d\xi$$

При вычислении последних трех интегралов целесообразно сделать следующую замену переменных:

$$x' = x + \xi \sin\vartheta \cos\varphi$$

$$y' = y + \xi \sin\vartheta \sin\varphi$$

$$z' = z + \xi \cos\vartheta$$

Учитывая, что в таких обозначениях $n_\beta = \dfrac{x'_\beta - x_\beta}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|}$, получим:

$$\mathcal{J} = -\frac{m}{T}\int_0^\infty f_0 v^2 dv \iiint_{-\infty}^{\infty} dx'dy'dz' \frac{x'_\beta - x_\beta}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} q_{\alpha\beta}(\vec{r}\,')$$

или же, после интегрирования по v :

$$\mathcal{J} = -\frac{nm}{4\pi T}\int dr' \left[\frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^3} - 3\frac{(x'_\alpha - x_\alpha)(x'_\beta - x_\beta)}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^5}\right] q_{\alpha\beta}(\vec{r}\,') \quad (I5)$$

На больших расстояниях ($|\vec{r}| \gg L$) в (I5) можно произвести разложение по параметру $|\vec{r}\,'|/|\vec{r}|$. Ограничиваясь при этом первым членом разложения, получим

$$\mathcal{J} = -\frac{nm}{4\pi T}\left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\vec{r}|^3} - 3\frac{x_\alpha x_\beta}{|\vec{r}|^5}\right)\int d\vec{r}\,' q_{\alpha\beta}(\vec{r}\,')$$

Окончательно для Φ_2 можно написать:

$$\Phi_2 = \frac{e}{m\omega_p^2}\left\{|\vec{\mathcal{E}}|^2 - \frac{2T}{m\omega_p^2}\nabla_\alpha\left[\mathcal{E}_\alpha \nabla_\beta \mathcal{E}^*_\beta - \mathcal{E}_\beta \nabla_\beta \mathcal{E}^*_\alpha\right] + \right. \quad (I6)$$

$$\left. + \frac{3T}{4\pi m\omega_p^2}\left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\vec{r}|^3} - 3\frac{x_\alpha x_\beta}{|\vec{r}|^5}\right)\int d\vec{r}\,' \left[\nabla_\gamma \mathcal{E}^*_\gamma \nabla_\alpha \mathcal{E}_\beta + \nabla_\gamma \mathcal{E}_\gamma \nabla_\alpha \mathcal{E}^*_\beta - 2\delta_{\alpha\beta}|\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{E}}|^2\right]\right\}$$

Таким образом, дальнодействующая часть электрического потенциала имеет квадрупольный характер[3]. Соответствующий ей квадрупольный момент есть:

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \frac{9eT}{2\pi m^2\omega_p^4}\int d\vec{r}\left[\Delta\varphi^* \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Delta\varphi \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - 2\delta_{\alpha\beta}|\Delta\varphi|^2\right] \quad (I7)$$

Легко показать, что величина $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ сохраняется. Действительно, возьмем производную по времени от $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ и в подынтегральном выражении воспользуемся уравнением (4). В результате получим:

$$\frac{\partial \mathcal{D}_{\alpha\beta}}{\partial t} = i\frac{27eT^2}{4\pi m^3\omega_p^5}\int d\vec{r}\left\{\Delta\varphi^* \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Delta\varphi - \Delta\Delta\varphi^* \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \right.$$

$$\left. + \Delta\Delta\varphi \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Delta\varphi \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Delta\varphi^* - 2\delta_{\alpha\beta}\left[\Delta\varphi^* \Delta\Delta\varphi - \Delta\varphi \Delta\Delta\varphi^*\right]\right\}$$

Производя теперь дважды интегрирование по частям, скажем, во втором, третьем и в пятом членах подынтегрального выражения, получим, что

$$\frac{\partial \mathcal{D}_{\alpha\beta}}{\partial t} \equiv 0$$

Таким образом, тензор $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ можно выразить через характеристики возмущения в начальный момент времени:

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \frac{9eT}{2\pi m^2\omega_p^4}\int d\vec{r}\left[\Delta\varphi_0^* \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Delta\varphi_0 \frac{\partial^2\varphi_0^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - 2\delta_{\alpha\beta}|\Delta\varphi_0|^2\right]$$

$$\varphi_0 = \varphi(\vec{r}, 0)$$

---

3) Отметим, что наличие непотенциального слагаемого в высокочастотной силе приводит также к появлению в области возмущения вихревых токов и соответствующего им магнитного поля. В принципе, этот эффект может представлять самостоятельный интерес, но в рассматриваемой задаче он несуществен, поскольку содержит малость $\sim v_{Te}/c$.

По порядку величины квадрупольный момент, очевидно, равен $e L^2 N_D (W/n_0 T)(r_D/L)$, где N_D – дебаевское число, а $W \sim \mathcal{E}^2/8\pi$ – плотность энергии ленгмюровского возмущения.

Наличие квадрупольного электрического поля означает, что область влияния локализованного ленгмюровского возмущения значительно превышает размер возмущения L.

В заключение автор выражает благодарность Д.Д.Рютову за обсуждение результатов работы.

Литература

1. М.Н.Рютова, ЖЭТФ, 2161 (1974).

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 3.II-1975г. МН 02646
Усл. 0,7 печ.л., тираж 150 экз. Бесплатно
Заказ № 14. Препринт
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР