И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 36

Б.Н.Брейзман

СТАЦИОНАРНЫЕ СПЕКТРЫ ЛЕНГМЮРОВСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ О НАГРЕВЕ ПЛАЗМЫ ПУЧКОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Новосибирск
1975

СТАЦИОНАРНЫЕ СПЕКТРЫ ЛЕНГМЮРОВСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ О НАГРЕВЕ ПЛАЗМЫ ПУЧКОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Б.Н.Брейзман

А Н Н О Т А Ц И Я

Найдены стационарные спектры турбулентности для случая, когда в плазме имеется заданный внешний источник (релятивистский электронный пучок), возбуждающий ленгмюровские колебания. Стационарное состояние поддерживается за счет того, что в результате нелинейного взаимодействия друг с другом и с электромагнитными волнами ленгмюровские колебания выходят из резонанса с пучком и поглощаются затем за счет кулоновских столкновений. Механизм нелинейного взаимодействия - индуцированное рассеяние колебаний на ионах. Показано, что при учете взаимодействия ленгмюровских колебаний с электромагнитными оказывается возможным обеспечить столкновительную диссипацию колебаний даже в случае сильной надкритичности ($\gamma \gg \nu$, где γ - инкремент неустойчивости, а ν - частота столкновений). Это позволяет существенно смягчить условия применимости теории слабой турбулентности к задаче о пучковом нагреве плазмы.

I. В в е д е н и е

При исследовании нагрева плазмы релятивистским электронным пучком или мощной электромагнитной волной возникает задача о нелинейном ограничении уровня ленгмюровских колебаний, возбуждаемых в плазме внешним источником. Если не выходить за рамки теории слабой турбулентности /I–3/, то основной нелинейный эффект-это обычно индуцированное рассеяние ленгмюровских волн на ионах. Известно два канала рассеяния: рассеяние ленгмюровских волн в ленгмюровские ($\ell\ell$) и рассеяние ленгмюровских волн в электромагнитные (ℓt). Вероятности этих процессов по порядку величины одинаковы, но из-за малой оптической толщины плазмы или неоднородности её концентрации ℓt – рассеяние может быть подавлено. Тогда главным оказывается $\ell\ell$ -рассеяние. Оно приводит к перекачке колебаний, возбуждаемых источником, в длинноволновую часть спектра, где генерация отсутствует. Если изменение дисперсионной добавки к частоте волны в каждом элементарном акте рассеяния мало (дифференциальная перекачка), то соответствующее кинетическое уравнение для волн оказывается относительно простым. Стационарные спектры ленгмюровской турбулентности для этого случая получены в работе /4/, где показано, что при анизотропном возбуждении спектр колебаний сосредоточен на нескольких поверхностях (струях) в пространстве волновых векторов[x)]. В случае достаточно сильного затухания длинноволновых колебаний струи обрываются в длинноволновой области, а при малом затухании решение здесь соответствует постоянному потоку ленгмюровских квантов по спектру. Отметим, что полная энергия ленгмюровских колебаний в этом решении линейно зависит от инкремента неустойчивости, а мощность, выделяемая в плазме, пропорциональна квадрату инкремента.

В настоящей работе получены стационарные спектры турбулентности для случая, когда разрешено как $\ell\ell$, так и ℓt -рассеяние. Отличительная особенность этих спектров состоит в том, что при большом отношении инкремента неустойчивости ленгмюровских колебаний γ к частоте электрон-ионных столкновений

---

x) Сферически симметричная задача была рассмотрена ранее в книге /3/.

ν стабилизация неустойчивости обеспечивается, главным образом, за счет электромагнитных колебаний (их энергия значительно превосходит энергию ленгмюровских). При этом мощность, диссипируемая в плазме, прямо пропорциональна γ. Существенно, что полученные спектры не требуют привлечения дополнительных механизмов диссипации длинноволновых колебаний, как это имеет место при $\gamma \gg \nu$ в отсутствие ℓt - рассеяния, когда в длинноволновой области существует постоянный поток ленгмюровских квантов по спектру.

В предлагаемой статье выбрана следующая последовательность изложения. В разделе 2 приведены кинетические уравнения для ленгмюровских и электромагнитных колебаний в предположении о дифференциальном характере спектральной перекачки. В разделе 3 рассмотрена задача о стационарных спектрах турбулентности при изотропном возбуждении ленгмюровских колебаний. Уже эта простая модель показывает, что ℓt -рассеяние (если оно разрешено) качественно изменяет вид стационарных спектров. В разделе 4 получен спектр, соответствующий возбуждению ленгмюровских колебаний двумя релятивистскими электронными пучками, инжектируемыми в плазму навстречу друг другу. В последнем (пятом) разделе работы содержится обсуждение полученных результатов.

2. Основные уравнения

Представим электрическое поле колебаний в плазме в виде суперпозиции полей ленгмюровских (ℓ) и электромагнитных (t) волн с медленно меняющимися амплитудами:

$$\vec{E}(\vec{r};t) = \int E^{\ell}(\vec{k}) \frac{\vec{k}}{k} e^{i\vec{k}\vec{r} - i(\omega^{\ell}+\omega_0)t} d^3\vec{k} + \int \vec{E}^{t}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r} - i(\omega^{t}+\omega_0)t} d^3\vec{k} + \text{к.с.} \qquad (1)$$

где

$$\omega^{\ell}(\vec{k}) = \frac{3}{2}\omega_0 k^2 r_D^2 \ ; \qquad \omega^{t}(\vec{k}) = \frac{1}{2}\omega_0 \frac{k^2c^2}{\omega_0^2}$$

Поскольку частоты всех интересующих нас колебаний близки к электронной плазменной частоте ω_0, мы явно выделили эту величину

в формуле (I) и ввели дисперсионные добавки ω^{ℓ} и ω^{t}. В дальнейшем подразумевается, что фазы волн случайны, так что

$$\langle E^{\ell}(\vec{k}) E^{\ell *}(\vec{k}') \rangle = 2\pi(\omega_0 + \omega^{\ell}) N^{\ell}(\vec{k}) \delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad (2)$$

$$\langle E^{t}_{\alpha}(\vec{k}) E^{t *}_{\beta}(\vec{k}') \rangle = 2\pi(\omega_0 + \omega^{t}) N^{t}_{\alpha\beta}(\vec{k}) \delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad (3)$$

Угловые скобки означают усреднение по фазам. Величины $N^{\ell}(\vec{k})$ и $N^{t}_{\alpha\beta}(\vec{k})$ представляют собой спектральные функции ℓ и t колебаний, связанные с соответствующими плотностями энергии U^{ℓ} и U^{t} следующими соотношениями:

$$U^{\ell} = \int (\omega_0 + \omega^{\ell}) N^{\ell}(\vec{k}) d^3\vec{k} \qquad (4)$$

$$U^{t} = \int (\omega_0 + \omega^{t}) N^{t}_{\alpha\alpha}(\vec{k}) d^3\vec{k} \qquad (5)$$

Отметим, что в формуле (3) не проведено усреднение по поляризациям электромагнитных колебаний. Дело в том, что из-за вырожденности закона дисперсии разность фаз между t волнами с различной поляризацией, вообще говоря, нельзя считать случайной. По этой причине спектральная функция $N^{t}_{\alpha\beta}$ оказывается тензором. Описание t волн с помощью одной скалярной величины (спектральной плотности числа квантов) обычно предполагает, что волны не поляризованы. Это, разумеется, справедливо в сферически симметричном случае, но лишено оснований при более низкой симметрии (в частности, аксиальной).

Система уравнений для спектральных функций, описывающая процессы $\ell\ell$ и ℓt - рассеяния на ионах, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} N^{\ell}(\vec{k}) = N^{\ell}(\vec{k}) \int \frac{(\vec{k}\vec{k}')^2}{k^2 k'^2} N^{\ell}(\vec{k}') \operatorname{Im} G_{\vec{k}-\vec{k}';\omega^{\ell}-\omega'^{\ell}} d^3\vec{k}' + N^{\ell}(\vec{k}) \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} N^{t}_{\alpha\beta}(\vec{k}') \operatorname{Im} G_{\vec{k}-\vec{k}';\omega^{\ell}-\omega'^{t}} d^3\vec{k}' \qquad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N^{t}_{\alpha\beta}(\vec{k}) = -\frac{i}{2}\Gamma_{\alpha\mu}(\vec{k}) N^{t}_{\mu\beta}(\vec{k}) + \frac{i}{2}\Gamma^{*}_{\beta\mu}(\vec{k}) N^{t}_{\alpha\mu}(\vec{k}) \qquad (7)$$

где

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\vec{k}) = \int \frac{[k'_\alpha k^2 - k_\alpha(\vec{k}\vec{k}')][k'_\beta k^2 - k_\beta(\vec{k}\vec{k}')]}{k^4 k'^2} N^{\ell}(\vec{k}') \cdot G_{\vec{k}-\vec{k}';\, \omega^t - \omega'^{\ell}}\, d^3\vec{k}'$$

Функция $G_{\vec{k};\omega}$, входящая в уравнения (6), (7), задается следующей формулой:

$$G_{\vec{k};\omega} = \frac{\dfrac{\omega_0^2}{2n}\displaystyle\int \frac{\vec{k}\,\partial f/\partial\vec{p}}{\vec{k}\vec{v} - \omega}\, d^3\vec{p}}{1 - T\displaystyle\int \frac{\vec{k}\,\partial f/\partial\vec{p}}{\vec{k}\vec{v} - \omega}\, d^3\vec{p}} \qquad (8)$$

где f – равновесная функция распределения ионов, нормированная на единицу, $\vec{p}$ – импульс иона, n – концентрация плазмы, T – температура электронов.

При вычислении интеграла в формуле (8) полюс следует обходить по правилу Ландау, так что

$$G_{-\vec{k};-\omega} = G^*_{\vec{k};\omega}$$

Система уравнений (6), (7) может быть получена общими методами теории слабой турбулентности /I-3/, однако вычисления оказываются более компактными, если с самого начала, следуя работе /5/, разделить уравнения для быстрых (электронных) и медленных (ионных) движений, а затем провести в этих уравнениях усреднение по случайным фазам. Такой вывод выражения для вероятности $\ell\ell$ – рассеяния приведен в работе /4/. Он легко обобщается на случай ℓt -рассеяния /6/. Нетрудно также учесть в исходных уравнениях процесс рассеяния электромагнитной волны в электромагнитную, но эта добавка несущественна, поскольку она содержит дополнительный малый параметр $\frac{T}{mc^2}$ по отношению к вкладу от $\ell\ell$ и ℓt процессов (см., например, /3/, стр.3I3.).

В дальнейшем нас будут интересовать спектры, обладающие аксиальной симметрией. Это позволяет упростить систему уравнений (6),(7). Введем единичный вектор $\vec{n}$, задающий выделенное направление, и два единичных взаимно перпендикулярных вектора $\vec{e}_1(\vec{k})$ и $\vec{e}_2(\vec{k})$, соответствующие двум направлениям электрического поля электромагнитной волны с волновым вектором $\vec{k}$:

$$\vec{e}_1(\vec{k}) = \frac{\vec{n}k^2 - \vec{k}(\vec{n}\vec{k})}{|\vec{n}k^2 - \vec{k}(\vec{n}\vec{k})|} \qquad (9)$$

$$\vec{e}_2(\vec{k}) = \frac{[\vec{n}\times\vec{k}]}{|[\vec{n}\times\vec{k}]|} \qquad (10)$$

Нетрудно проверить, что в аксиально симметричном случае матрица $\Gamma_{\alpha\beta}(\vec{k})$ может быть представлена в следующем виде:

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\vec{k}) = \Gamma_1\, e_{1\alpha} e_{1\beta} + \Gamma_2\, e_{2\alpha} e_{2\beta} \qquad (11)$$

Тензор $N^t_{\alpha\beta}(\vec{k})$ также может быть разложен по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$:

$$N^t_{\alpha\beta}(\vec{k}) = N_1 e_{1\alpha} e_{1\beta} + N_2 e_{2\alpha} e_{2\beta} + N_{12} e_{1\alpha} e_{2\beta} + N^*_{12} e_{1\beta} e_{2\alpha} \qquad (12)$$

Заметим теперь, что из-за аксиальной симметрии отличный от нуля вклад в правую часть уравнения (6) дают лишь два первых слагаемых в формуле (I2). Поэтому вместо исходной системы уравнений удобнее иметь дело с тремя уравнениями для величин $N^{\ell}(\vec{k})$, $N_1(\vec{k})$ и $N_2(\vec{k})$

$$\frac{\partial}{\partial t} N^{\ell}(\vec{k}) = N^{\ell}(\vec{k}) \int \frac{(\vec{k}\vec{k}')^2}{k^2 k'^2} N^{\ell}(\vec{k}')\, \mathrm{Im}\, G_{\vec{k}-\vec{k}';\, \omega^{\ell} - \omega'^{\ell}}\, d^3\vec{k}' + \sum_{\lambda=1,2} N^{\ell}(\vec{k}) \int \frac{(\vec{k}\vec{e}'_\lambda)^2}{k^2} N_\lambda(\vec{k}')\, \mathrm{Im}\, G_{\vec{k}-\vec{k}';\, \omega^{\ell} - \omega'^{t}}\, d^3\vec{k}' \qquad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N_\lambda(\vec{k}) = N_\lambda(\vec{k}) \int \frac{(\vec{k}'\vec{e}_\lambda)^2}{k'^2} N^{\ell}(\vec{k}')\, \mathrm{Im}\, G_{\vec{k}-\vec{k}';\, \omega^{t} - \omega'^{\ell}}\, d^3\vec{k}' \qquad (14)\quad \lambda = 1;2$$

Мы будем рассматривать не слишком узкие спектры колебаний (такие, для которых характерное значение фазовой скорости биений $\frac{\omega - \omega'}{|\vec{k} - \vec{k}'|}$ существенно превышает скорость звука). Тогда в уравнениях (I3), (I4) можно перейти к дифференциальному приближению. Формально это сводится к записи мнимой части функции $G_{\vec{k};\omega}$ в следующем виде:

$$\mathrm{Im}\, G_{\vec{k};\omega} = \frac{\pi\omega_0^2}{2nM}\, \delta'\!\left(\frac{\omega}{k}\right) \qquad (15)$$

Здесь M – масса иона, штрих у δ -функции означает дифференцирование по аргументу.

Из того, что частоты взаимодействующих ℓ и t волн близки (см.(I5)), следует, что волновой вектор электромагнитной волны, участвующей в ℓt -рассеянии, мал по сравнению с волновым вектором ленгмюровской волны ($k^t/k^\ell \sim \left(\frac{T}{mc^2}\right)^{1/2} \ll 1$). Поэтому в аргументе функции G, определяющей взаимодействие ℓ и t волн, разность $\vec{k}-\vec{k}'$ можно заменить на волновой вектор ленгмюровской волны.

Для дальнейшего упрощения записи уравнений (I3), (I4) перейдем в них к безразмерным переменным ω, x, τ, где ω – безразмерная дисперсионная добавка к частоте волны (за единицу частоты выбрана величина $\frac{3}{2}\omega_0 \frac{T}{mc^2}$), x – косинус угла между волновым вектором и выделенным направлением, τ – безразмерное время ($\tau \equiv \frac{3}{2}\omega_0 \frac{T}{mc^2} t$). Безразмерные спектральные функции $N^\ell(\omega; x)$, $N_1(\omega; x)$ и $N_2(\omega; x)$ определим следующим образом:

$$N^\ell(\omega;x)\,d\omega\,dx \equiv \frac{8\pi^2}{27}\frac{m}{M}\left(\frac{mc^2}{T}\right)^2\frac{\omega_0}{nT}N^\ell(\vec{k})\,k^2dk\,dx$$

$$N_\lambda(\omega;x)\,d\omega\,dx \equiv \frac{8\pi^2}{27}\frac{m}{M}\left(\frac{mc^2}{T}\right)^2\frac{\omega_0}{nT}N_\lambda(\vec{k})\,k^2dk\,dx \qquad \lambda = 1;2 \tag{I6}$$

Воспользовавшись формулами (9), (I0), (I5) и усреднив ядра интегралов (I3), (I4) по азимутальному углу, получим в новых обозначениях следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}N^\ell(\omega;x) = N^\ell(\omega;x)\Big[\omega^{1/2}\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^{1/2}\int_{-1}^{1}N^\ell(\omega;x')\,T(x;x')\,dx' + \sum_{\lambda=1;2}\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\int_{-1}^{1}N_\lambda(\omega;x')\,T_\lambda(x;x')\,dx' + 2\gamma(\omega;x) - \nu\Big] \tag{I7}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}N_\lambda(\omega;x) = N_\lambda(\omega;x)\Big[\frac{\partial}{\partial\omega}\omega\int_{-1}^{1}N^\ell(\omega;x')\,T_\lambda(x';x)\,dx' - \nu\Big] \qquad \lambda = 1;2 \tag{I8}$$

где

$$T(x;x') \equiv 1 - x^2 - x'^2 - 3xx' + 3x^2x'^2 + 3xx'^3 + 3x^3x' - 5x^3x'^3 \tag{I9}$$

$$T_1(x;x') \equiv x^2 + \frac{1}{2}x'^2 - \frac{3}{2}x^2x'^2 \tag{20}$$

$$T_2(x;x') \equiv \frac{1}{2}(1 - x^2) \tag{21}$$

Мы включили в уравнения (I7), (I8) инкремент раскачки ленгмюровских колебаний внешним источником $\gamma(\omega; x)$ и декремент столкновительного затухания колебаний $\nu/2$. Эти величины обезразмерены таким же образом, как и дисперсионная добавка к частоте.

В заключение раздела приведем исходные уравнения для сферически симметричного случая, с которого будет начато рассмотрение стационарных спектров. Эти уравнения получаются из системы (I7), (I8), если положить $N_1(\omega;x) = N_2(\omega;x) = \frac{1}{2}N^t(\omega)$; $N^\ell(\omega;x) = N^\ell(\omega)$ и выполнить интегрирование по x' .

$$\frac{\partial}{\partial\tau}N^\ell = N^\ell\Big[\frac{4}{3}\omega^{1/2}\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^{1/2}N^\ell + \frac{2}{3}\omega\frac{\partial}{\partial\omega}N^t + 2\gamma - \nu\Big] \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}N^t = N^t\Big[\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial\omega}\omega N^\ell - \nu\Big] \tag{23}$$

С точностью до обозначений эта система совпадает с приведенной в книге /3/ стр.3I3 (см.также /7/, стр.I94).

3. Изотропные решения

Цель этого раздела состоит в том, чтобы выяснить, как меняется характер стационарного решения уравнений (22),(23) по мере увеличения инкремента неустойчивости[x)]. Мы будем считать для определенности, что инкремент $\gamma(\omega)$ обращается в нуль при малых и больших ω , а в промежутке положителен и имеет единственный максимум. Предположим вначале, что в спектре имеются только ленгмюровские колебания, а $N^t=0$ (как будет показано ниже, такая ситуация соответствует малому превышению над порогом возникновения неустойчивости). Приравняв нулю правую часть уравнения (22),

---

x) В работах /3/ и /7/ сделано утверждение, что система (22), (23) не имеет стационарных решений, для которых $N^t \neq 0$. Из содержания этого раздела будет видно, что в действительности такие решения существуют.

получим:

$$N^\ell = \begin{cases} 0 & , \ \omega > \omega_+ \\ \dfrac{3}{4\omega^{1/2}} \displaystyle\int_\omega^{\omega_+} \dfrac{2\gamma - \nu}{\omega^{1/2}}\, d\omega & , \ \omega < \omega_+ \end{cases} \qquad (24)$$

где ω_+ – больший из двух корней уравнения $\gamma(\omega) = \nu/2$. При $\omega > \omega_+$ колебания отсутствуют, поскольку спектральная перекачка идет с уменьшением частоты, а сам источник не возбуждает колебаний с частотами, превышающими ω_+. Если превышение над порогом неустойчивости невелико, так что выполняется условие

$$\int_0^{\omega_+} \frac{2\gamma - \nu}{\omega^{1/2}}\, d\omega < 0 \qquad (25)$$

то спектр обрывается в некоторой точке $\omega = \tilde{\omega} > 0$, где величина N^ℓ, определяемая формулой (24), обращается в нуль. Тогда формулу (24) следует дополнить условием:

$$N^\ell = 0 \ , \ \omega < \tilde{\omega} \qquad (26)$$

которое означает, что колебания, возбужденные источником, успевают поглотиться за счет кулоновских столкновений раньше, чем они в результате спектральной перекачки достигнут точки $\omega = 0$. Если же

$$\int_0^{\omega_+} \frac{2\gamma - \nu}{\omega^{1/2}}\, d\omega > 0 \qquad (27)$$

то имеется постоянный сток колебаний в точку $\omega = 0$, и возникает вопрос о механизме диссипации этих волн. Заметим, однако, что решение со стоком в точку $\omega = 0$ неустойчиво относительно возбуждения электромагнитных колебаний. В этом можно убедиться, вычислив согласно (23) инкремент возбуждения t – волн:

$$\Gamma^t = \frac{1}{8\omega^{1/2}} \int_\omega^{\omega_+} \frac{2\gamma - \nu}{\omega^{1/2}}\, d\omega - \frac{\gamma}{2} - \frac{\nu}{4}$$

Если выполнено неравенство (27), то при малых частотах, очевидно, $\Gamma^t > 0$. Спектр, обрывающийся при $\omega = \tilde{\omega}$, напротив, устойчив. Действительно, в этом случае величина $\omega^{1/2}(\Gamma^t + \gamma/2)$ отрицательна (она отрицательна при $\omega = 0$ и убывает с ростом ω). Поэтому отрицательна и величина Γ^t. Таким образом, при малой надкритичности (когда выполнено неравенство (25)) стационарный спектр задается формулами (24), (26) и состоит только из ленгмюровских волн, а с увеличением инкремента в спектре появляются электромагнитные колебания.

В той области частот, где величина N^t отлична от нуля, стационарное решение уравнений (22), (23) имеет вид:

$$\begin{aligned} N^\ell &= \frac{3}{2}\nu + \frac{A}{\omega} \\ N^t &= -\frac{A}{\omega} + B + 3\int_\omega^{\omega_+} \frac{\gamma}{\omega}\, d\omega \end{aligned} \qquad (28)$$

А и В – константы интегрирования.

В точке, где величина N^t обращается в нуль, решение (28) должно быть сшито с решением (24). Кроме того, функции N^ℓ и N^t по своему смыслу положительны при всех значениях ω. Определяя из этих двух условий константы А и В, получим окончательно следующую формулу для спектра, относящуюся к случаю сильной (выполнено неравенство (27)) надкритичности:

$$N^\ell = \begin{cases} 0 & \omega > \omega_+ \\ \dfrac{3}{4\omega^{1/2}} \displaystyle\int_\omega^{\omega_+} \dfrac{2\gamma - \nu}{\omega^{1/2}}\, d\omega & \omega^* < \omega < \omega_+ \\ \dfrac{3}{2}\nu & \omega < \omega^* \end{cases}$$

$$N^t = \begin{cases} 0 & \omega > \omega^* \\ 3\displaystyle\int_\omega^{\omega^*} \dfrac{\gamma}{\omega}\, d\omega & \omega < \omega^* \end{cases} \qquad (29)$$

Здесь ω^* – корень уравнения: $\displaystyle\int_\omega^{\omega_+} \frac{2\gamma - \nu}{\omega^{1/2}}\, d\omega = 2\nu\omega^{1/2}$

Воспользовавшись формулой (29), нетрудно вычислить полную плотность квантов в системе N:

$$N = \int_{-1}^{1} dx \int_0^\infty (N^\ell + N^t)\, d\omega = 3\int_0^{\omega_+} (2\gamma - \nu)\, d\omega \qquad (30)$$

С точностью до малых поправок порядка $k^2 r_D^2$ эта величина пропорциональна полной плотности энергии колебаний $U = U^\ell + U^t$

Для наглядности мы приведем результат в размерных переменных:

$$U = \frac{27}{\pi} n T \frac{M}{m} \frac{T}{m\omega_0^3} \int_0^{k_+} [2\gamma(k) - \nu] k dk \qquad (31)$$

(k_+ - больший корень уравнения $\gamma(k) = \nu/2$).

Подчеркнем, что для спектра, определяемого формулой (29), сток энергии в точку $\omega = 0$ отсутствует: энергия, теряемая источником, полностью поглощается за счет кулоновских столкновений. Поэтому мощность, выделяемая в плазме, равна (в размерных переменных) νU. Видно, что мощность линейно зависит от интенсивности источника γ. Отметим также, что при больших превышениях γ над ν энергия сосредоточена, главным образом, в электромагнитных колебаниях, а энергия ленгмюровских волн мала. Как будет показано в следующем разделе, перечисленные здесь качественные утверждения в равной мере относятся и к анизотропному спектру.

4. Спектр, возбуждаемый анизотропным источником

Мы рассмотрим здесь конкретный пример, для которого стационарный спектр удается найти аналитически. Будем считать, что ленгмюровские колебания возбуждаются двумя одинаковыми пучками релятивистских электронов, инжектируемыми в плазму навстречу друг другу. Решение задачи для любого другого источника не содержит принципиальных трудностей, но может потребовать численного интегрирования уравнений. Воспользуемся результатом вычисления инкремента неустойчивости релятивистского электронного пучка с малым угловым разбросом $\Delta\theta$ (см., например, /8/). Относительно параметров пучка предположим, что они удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\Delta\theta > max\left[\left(\frac{n_b}{n}\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^{1/4};\ \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/6}\left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^{1/2}\right]$$

$$\Delta\theta > \frac{mc^2}{\mathcal{E}}$$

где n_b - концентрация пучка, а $\mathcal{E}$ -энергия электронов. Первое из неравенств означает, что неустойчивость является кинетической, а второе позволяет пренебречь влиянием энергетического разброса на разброс скоростей в пучке. Для дальнейшего существенно, что на плоскости $k_\parallel ; k_\perp$ ($k_\parallel$ и $k_\perp$ - продольная и поперечная по отношению к оси пучка составляющие волнового вектора) инкремент отличен от нуля в узкой окрестности линии $k_\parallel = \omega_0/c$. При заданном значении $k_\perp$ инкремент (как функция $k_\parallel$) имеет резкий максимум. В максимуме справедлива следующая оценка:

$$\gamma_m \approx \omega_0 \frac{n_b}{n} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{1}{\Delta\theta^2} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + k_\perp^2 c^2} \qquad (32)$$

Для длинноволновых колебаний ($k < \omega_0/c$) инкремент равен нулю, поскольку их фазовая скорость превышает скорость света.

Отсюда следует, что в используемых нами безразмерных переменных инкремент $\gamma(\omega; x)$, соответствующий двум пучкам, имеет при каждом значении $\omega > 1$ два узких максимума по x в точках $x = \pm\,\omega^{-1/2}$, причем

$$\gamma(\omega; x) = \frac{\gamma_0}{\omega} \quad \text{при} \quad x = \pm\,\omega^{-1/2} \quad (\omega > 1) \qquad (33)$$

где $\gamma_0 = \frac{2}{3} \frac{n_b}{n} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \frac{mc^2}{T} \frac{1}{\Delta\theta^2}$

Кроме того,

$$\gamma(\omega; x) = 0 \quad \text{при} \quad \omega < 1 \qquad (34)$$

Как будет видно из дальнейшего, этих сведений об инкременте достаточно для определения стационарного спектра колебаний.

Обратимся теперь к уравнениям (17), (18). В стационарном случае они имеют вид:

$$N^\ell(\omega; x)\, \Gamma^\ell(\omega; x) = 0$$
$$N_\lambda(\omega; x)\, \Gamma_\lambda(\omega; x) = 0 \qquad \lambda = 1; 2 \qquad (35)$$

где через Γ^ℓ и Γ_λ обозначены выражения, стоящие в квадратных скобках. Наряду с этими соотношениями должно выполняться еще требование устойчивости:

$$\Gamma^{\ell}(\omega;x) \leq 0$$
$$\Gamma_{\lambda}(\omega;x) \leq 0 \qquad \lambda = 1;2 \tag{36}$$

Из-за симметрии источника инкремент $\gamma(\omega;x)$ симметричен относительно замены x на $-x$. Естественно предположить, что той же симметрией обладает и решение. Тогда вместо промежутка $-1 < x < 1$ достаточно рассмотреть промежуток $0 < x < 1$. При этом, очевидно, вклад в уравнения дает лишь четная по x часть ядра $T(x;x')$ (см.формулу (I9)), т.е. можно положить

$$T(x;x') = 1 - x^2 - x'^2 + 3x^2x'^2 \tag{37}$$

Далее заметим, что величина Γ_2 не зависит от x и $\Gamma_2(\omega) = \Gamma_1(\omega;1)$. Кроме того, функция N_2 дает в величину Γ^{ℓ} точно такой же вклад, как и функция $N_1 = \delta(x-1+0)\int N_2\,dx$. Это означает, что если функции N^{ℓ}, N_1 и N_2 удовлетворяют соотношениям (35), (36), то функции

$$\bar{N}^{\ell} = N^{\ell}\;;\quad \bar{N}_1 = N_1 + \delta(x-1+0)\int_0^1 N_2\,dx\;;\quad \bar{N}_2 = 0$$

также удовлетворяют этим соотношениям, причем спектры (N^{ℓ} ; N_1 ; N_2) и ($\bar{N}^{\ell}$; $\bar{N}_1$; $\bar{N}_2$) соответствуют одной и той же полной энергии колебаний. Другими словами, можно без ограничения общности положить $N_2 = 0$ и тем самым свести задачу к решению лишь двух первых уравнений из системы (35). Величины Γ^{ℓ} и Γ_1 в этих уравнениях имеют следующий вид:

$$\Gamma^{\ell}(\omega;x) = 2\gamma(\omega;x) - \nu + 2\omega^{1/2}\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^{1/2}\int_0^1 N^{\ell}(\omega;x')\,T(x;x')\,dx' + 2\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\int_0^1 N_1(\omega;x')\,T_1(x;x')\,dx' \tag{38}$$

$$\Gamma_1(\omega;x) = -\nu + 2\frac{\partial}{\partial\omega}\omega\int_0^1 N^{\ell}(\omega;x)\,T_1(x';x)\,dx'$$

где $T(x;x')$ задается формулой (37), а $T_1(x;x')$ – формулой (20). Рассмотрим функцию Γ^{ℓ}. В области $\omega > 1$ входящие в нее слагаемые существенно по-разному зависят от x ($\gamma(\omega;x)$ – функция с резким максимумом при $x = \omega^{-1/2}$, а интегралы имеют вид: $a(\omega)x^2 + b(\omega)$). Поэтому при каждом фиксированном значении ω равенство $\Gamma^{\ell} = 0$ может выполняться лишь в

отдельных точках $x_i = x_i(\omega)$ $i = 1,2\ldots$. Как видно из уравнения (35), именно в этих точках должна быть сосредоточена спектральная плотность квантов N^{ℓ}, т.е. спектр по терминологии работы /4/ является струйным. Поскольку нули функции Γ^{ℓ} являются одновременно ее максимумами (см.(36)), в интересующем нас случае имеется всего три возможных положения струи: $x = \omega^{-1/2}$; $x = 0$ и $x = 1$, а число струй при каждом значении ω не превышает двух. Отсюда вытекает, что при $\omega > 1$ необходимо рассмотреть следующие варианты:

I) $\Gamma^{\ell}(\omega;\omega^{-1/2}) = \Gamma^{\ell}(\omega;0) = 0$

при этом $N^{\ell} = A_1(\omega)\,\delta(x-\omega^{-1/2}) + B_1(\omega)\,\delta(x-0)$

2) $\Gamma^{\ell}(\omega;\omega^{-1/2}) = \Gamma^{\ell}(\omega;1) = 0$

$N^{\ell} = A_2(\omega)\,\delta(x-\omega^{-1/2}) + B_2(\omega)\,\delta(x-1+0)$

3) $\Gamma^{\ell}(\omega;\omega^{-1/2}) = 0;\ \Gamma^{\ell}(\omega;0) < 0;\ \Gamma^{\ell}(\omega;1) < 0$ (39)

$N^{\ell} = A_3(\omega)\,\delta(x-\omega^{-1/2})$

4) $\Gamma^{\ell}(\omega;0) = 0;\ \Gamma^{\ell}(\omega;\omega^{-1/2}) < 0;\ \Gamma^{\ell}(\omega;1) < 0$

$N^{\ell} = A_4(\omega)\,\delta(x-0)$

5) $\Gamma^{\ell}(\omega;1) = 0;\ \Gamma^{\ell}(\omega;\omega^{-1/2}) < 0;\ \Gamma^{\ell}(\omega;0) < 0$

$N^{\ell} = A_5(\omega)\,\delta(x-1+0)$

6) $\Gamma^{\ell}(\omega;x) < 0\,,\quad 0 \leq x \leq 1$

$N^{\ell} = 0$

Аналогичные рассуждения применительно к величине Γ_1 дают (во всем диапазоне частот) следующий перечень:

I) $\Gamma_1(\omega;0) = 0;\ \Gamma_1(\omega;1) < 0$

при этом $N_1 = C_1(\omega)\,\delta(x-0)$

2) $\Gamma_1(\omega;1) = 0;\ \Gamma_1(\omega;0) < 0$

$N_1 = C_2(\omega)\,\delta(x-1+0)$

3) $\Gamma_1(\omega;0) = \Gamma_1(\omega;1) = 0$ (40)

это означает, что $\Gamma_1(\omega;x) = 0$ при всех значениях x ; спектр в этом случае может не иметь струйного вида (см.ниже)

4) $\Gamma_1(\omega; x) < 0$ при $0 \le x \le 1$

$N_1 = 0$

Если заменить здесь индекс "1" на индекс "ℓ", то получится соответствующий перечень для ленгмюровских колебаний в области $\omega < 1$. Далее надлежит поочередно рассмотреть все комбинации, возникающие при выборе одного варианта из группы (39) и одного из группы (40). Для каждой такой пары условия, наложенные на величины Γ^ℓ и Γ_1, дают систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой легко может быть выписано. Затем необходимо учесть непрерывность функций N^ℓ и N_1 по ω и их положительность. Это позволяет однозначно построить из полученных решений искомый спектр. Вся процедура оказывается несложной, но довольно громоздкой. Мы приведем здесь только результат. Для краткости ограничимся случаем очень высокого превышения над порогом неустойчивости ($\gamma_0 \gg \nu$). Спектр удается найти и в остальных случаях, но при $\gamma_0 \gg \nu$ роль ℓt -рассеяния проявляется наиболее отчетливо (см.раздел 3).

В интересующей нас ситуации весь диапазон частот разбивается на пять областей с различными функциональными зависимостями $N^\ell(\omega, x)$ и $N_1(\omega, x)$. Опишем каждый из участков в отдельности, начиная с больших значений ω.

$\overline{\text{I}}$ $\omega > 2\gamma_0/\nu$

Здесь инкремент $\gamma(\omega, x)$ ниже порога возникновения пучковой неустойчивости, поэтому

$$N^\ell(\omega; x) = N_1(\omega; x) = 0 \tag{41}$$

$\overline{\text{II}}$ $\gamma_0/2\nu < \omega < 2\gamma_0/\nu$

На этом участке электромагнитные колебания по-прежнему отсутствуют, а

$$N^\ell(\omega; x) = \left[\nu^{1/2} - \left(\frac{2\gamma_0}{\omega}\right)^{1/2}\right]^2 \delta(x - \omega^{-1/2}) \tag{42}$$

$\overline{\text{III}}$ $3 < \omega < \gamma_0/2\nu$

В точке $\omega = \gamma_0/2\nu$ возникает струя электромагнитных колебаний, расположенная при $x = 1$

$$N_1(\omega; x) = \left[-4\nu + \frac{2\nu}{\omega - 1} - \frac{2\nu}{(\omega-1)^2} + (3\nu - 2\gamma_0)\ln\frac{\omega - 1}{\omega}\right]\delta(x - 1 + 0)$$

$$N^\ell(\omega; x) = \nu\frac{\omega}{\omega - 1}\delta(x - \omega^{-1/2}) \tag{43}$$

$\overline{\text{IV}}$ $1 < \omega < 3$

На верхней границе ($\omega = 3$) появляется вторая струя ленгмюровских волн, расположенная в точке $x = 0$

$$N^\ell(\omega; x) = \frac{\nu\omega}{2}\delta(x - \omega^{-1/2}) + \frac{\nu}{2}(3 - \omega)\delta(x - 0) \tag{44}$$

Величина $\Gamma_1(\omega, x)$ на этом участке равна нулю при всех значениях x, т.е. спектр электромагнитных колебаний здесь, вообще говоря, не имеет струйного вида. В такой ситуации условия (35), (36) дают лишь значения двух моментов углового распределения колебаний:

$$\begin{aligned} \int_0^1 N_1 x^2 dx &= -\frac{7}{2}\nu + (2\gamma_0 - 3\nu)\ln\frac{3}{2} \\ \int_0^1 N_1(1 - x^2)dx &= \gamma_0 \ln\frac{3}{\omega} \end{aligned} \tag{45}$$

Другими словами, в рассматриваемом случае имеется целый набор стационарных решений, отличающихся друг от друга величинами угловых моментов более высокого порядка. Заметим, однако, что для всех этих решений обратное влияние колебаний на источник оказывается одинаковым, поскольку оно характеризуется только спектром ленгмюровских колебаний, взаимодействующих с пучками, а этот спектр определяется однозначно. В частности, всем решениям соответствует одна и та же величина энергии, теряемой пучками в плазме

$\overline{\text{V}}$ $0 < \omega < 1$

Здесь $\Gamma_1(\omega; x) = \Gamma^\ell(\omega; x) = 0$ при всех значениях x, и соответственно, заданы только моменты спектральных функций (см.

пункт IУ):

$$\int_0^1 N^\ell x^2 dx = \frac{\nu}{2}\,; \qquad \int_0^1 N^\ell (1-x^2)\, dx = \nu$$

$$\int_0^1 N_1 x^2 dx = -\frac{7}{2}\nu + (2\gamma_0 - 3\nu)\ln\frac{3}{2}\,; \quad \int_0^1 N_1 (1-x^2)\, dx = \gamma_0 \ln 3 \tag{46}$$

Напомним, что спектр симметричен относительно замены x на $-x$, а формулы (4I) - (46) относятся к промежутку $0 < x < 1$. Эти формулы написаны с точностью до членов первого порядка (включительно) по параметру ν/γ_0. Однако, как уже отмечалось, для аналитического решения задачи условие $\nu/\gamma_0 \ll 1$ не обязательно.

Вычисление полной плотности энергии колебаний U в спектре (4I) - (46) дает (в размерных переменных) следующий результат:

$$U = \frac{18}{\pi}\frac{M}{m}\frac{n_b}{n}\frac{nT}{\Delta\theta^2}\frac{T}{\mathcal{E}}\ln\left(\frac{\omega_0}{\nu}\frac{n_b}{n}\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\frac{1}{\Delta\theta^2} - 2\right) \tag{47}$$

Мы воспользовались явным выражением для γ_0 (см.(33)). Энергия определяется, в основном, электромагнитными колебаниями, но из-за того, что инкремент $\gamma(\omega, x)$ убывает достаточно медленно ($\backsim \omega^{-1}$), отношение U^t/U^ℓ оказывается пропорциональным не γ_0/ν, а лишь логарифму этой величины. Так же, как и в изотропном случае (см.раздел 3) конденсация колебаний в точке $\omega = 0$ отсутствует, и в единице объема плазмы выделяется мощность, равная (в размерных переменных) νU.

5. Обсуждение результатов

Перечислим условия применимости решений, полученных в разделах 3 и 4.

В исходных уравнениях мы пренебрегли выносом электромагнитных волн из плазмы. Это можно сделать, если время выноса, равное L/V_g (L - размер системы, V_g - групповая скорость волны), существенно превышает время столкновительного затухания.

Групповая скорость электромагнитных волн, возникающих в результате ℓt рассеяния при нагреве плазмы релятивистским пучком, по порядку величины равна тепловой скорости электронов. Поэтому ограничение на L имеет вид: $L > \lambda$, где λ - длина свободного пробега электронов. Это довольно жесткое требование. Более реалистичен случай, когда электромагнитные колебания оказываются запертыми по другой причине (из-за того, что в области, по которой идет пучок, концентрация плазмы несколько ниже, чем снаружи). Для запирания интересующих нас колебаний необходим перепад концентрации $\frac{\delta n}{n}$, по порядку величины равный $\frac{T}{mc^2}$. Если такой перепад существует, то ограничение $L > \lambda$ снимается.

Следующее условие относится к процессу tt -рассеяния, который также не был включен в исходные уравнения. Влиянием этого процесса можно пренебречь, если

$$\tau^{tt} > \nu^{-1} \tag{48}$$

где τ^{tt} - характерное время tt -рассеяния. Как уже отмечалось, величина τ^{tt} связана со временем ℓt рассеяния: $\tau^{tt} \sim \frac{mc^2}{T}\tau^{\ell t}$ (см./3/). С другой стороны, в разделах 3 и 4 было показано, что в случае сильной надкритичности время ℓt рассеяния равно обратному инкременту пучковой неустойчивости. Отсюда видно, что неравенство (48) дает следующее ограничение на параметры пучка и плазмы:

$$\gamma/\nu < \frac{mc^2}{T} \tag{49}$$

В этой работе мы с самого начала интересовались только стационарными спектрами и совсем не касались вопроса об установлении стационара. Вопрос этот пока не ясен и должен быть рассмотрен отдельно. Он особенно интересен в случае сильной надкритичности, когда ℓt -рассеяние качественно меняет вид стационарного спектра. Здесь надо иметь в виду следующее. Если ℓt -рассеяние запрещено, то оценка плотности энергии ленгмюровских колебаний, взаимодействующих с пучком, не очень чувствительна к тому, является ли спектр истинно стационарным (см./8/), причем в случае сильной надкритичности оба решения (и стационарное, и нестационарное) соответствуют накоплению колебаний в длинноволновой части спектра ($k < r_D^{-1}\sqrt{\frac{m}{M}}$). При учете lt рассеяния различие между решениями может быть гораздо более существенным. Как показано в работе /9/, где численными методами решалась задача с начальными условиями, в неустановившемся режиме учет lt -рассеяния приводит лишь к тому, что наряду с ленгмюровскими колебаниями появляются электромагнитные волны, плотность энергии которых по порядку величины равна плотности энергии ленгмюровских колебаний. В остальном ситуация остается качественно такой же, как и в случае, когда имеется только ll -взаимодействие. Что же касается стационарного спектра, то на нем, как мы уже отмечали, lt - рассеяние сказывается в значительно большей степени. К сожалению, на основании результатов работы /9/ нельзя сделать никаких выводов относительно установления стационара, поскольку во всех вариантах счета рассматривались промежутки времени малые по сравнению с обратной частотой столкновений. В соответствии со сказанным было бы интересно провести вычисления аналогичные выполненным в работе /9/, увеличив временной интервал по крайней мере до нескольких обратных частот столкновений. Поскольку результат может существенно зависеть от начальных условий, желательно наряду с естественным условием (тепловые шумы) рассмотреть и другие возможности (в частности, случай, когда начальный спектр не очень сильно отличается от стационарного).

В заключение укажем, что спектру, найденному в разделе 4, соответствует (см.,например, /8/) следующая оценка длины торможения пучка:

$$l \sim \frac{1}{10}\frac{c}{\nu}\frac{m}{M}\left(\frac{\mathcal{E}}{T}\right)^2\left(\ln\frac{\omega_0}{\nu}\frac{n_b}{n}\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^{-1} \qquad (50)$$

В случае достаточно плотной плазмы эта оценка дает вполне приемлемые (с экспериментальной точки зрения) значения l (при $n \sim 10^{18}$ см$^{-3}$, $n_b \sim 10^{13}$ см$^{-3}$, $T \sim 10^4$ эв, $\mathcal{E} \sim 10^6$ эв для дейтериевой плазмы получается $l \sim 2$ м). Существенно, что в рассматриваемом режиме энергия, потерянная пучком, диссипирует за счет кулоновских столкновений и, следовательно, передается основной массе электронов плазмы.

Автор приносит глубокую благодарность Д.Д.Рютову за обсуждение работы.

Литература

1. Б.Б.Кадомцев, В сб. "Вопросы теории плазмы" под ред. М.А.Леонтовича, вып.4, стр.188. Атомиздат, 1964.
2. А.А.Галеев, В.И.Карпман, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 5, 20, 1965.
3. В.Н.Цытович. Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат;1971.
4. Б.Н.Брейзман, В.Е.Захаров, С.Л.Мушер. ЖЭТФ, 64, 1297, 1973.
5. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.
6. Е.А.Кузнецов, ЖЭТФ, 66, 2037, 1974.
7. С.А.Каплан, В.Н.Цытович. Плазменная астрофизика. М.,"Наука", 1972.
8. Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, Ядерный синтез, 14, 873, 1974.
9. С.А.Каплан, В.Н.Цытович. АЖ, 44, 1194, 1967.

Поступила – 19 марта 1975 г.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 30.IУ-1975г. МН 02917
Усл. I,3 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 36
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,мп,вт