20

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 40

Б.Г.Конопельченко

О РАСШИРЕНИЯХ АЛГЕБРЫ ПУАНКАРЕ СПИНОРНЫМИ ГЕНЕРАТОРАМИ

Новосибирск
1975

О РАСШИРЕНИЯХ АЛГЕБРЫ ПУАНКАРЕ СПИНОРНЫМИ ГЕНЕРАТОРАМИ

Б.Г.Конопельченко

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются возможные нетривиальные расширения алгебры Пуанкаре произвольными спинорными генераторами. Найден явный вид расширений алгебры Пуанкаре, обладающих эрмитовыми представлениями. Рассматривается реализация таких алгебр как алгебр групп преобразований соответствующих суперпространств.

I. Введение

В последнее время значительный интерес вызывают алгебры симметрии, отличные от алгебр Ли – так называемые алгебры суперсимметрии (/I–6/ и обзоры /7–9/). Алгебра суперсимметрии является расширением алгебры Пуанкаре генераторами, преобразующимися по спинорным двурядным представлениям группы Лоренца (т.е. по представлениям $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$). Группы суперсимметрии привлекательны тем, что мультиплеты таких групп содержат как бозонные, так и фермионные поля, а суперсимметричные модели обнаруживают большое число сокращений расходимостей.

В настоящей работе рассматриваются возможные нетривиальные расширения алгебры Пуанкаре произвольными спинорными генераторами, т.е. генераторами, преобразующимися по представлениям (j, k) группы Лоренца с полуцелыми $j+k$.

В разделе II показано, что нетривиальное расширение алгебры Пуанкаре должно содержать по крайней мере два спинорных генератора $Q^{(j,k)}$ и $\tilde{Q}^{(\tilde{j},\tilde{k})}$, для которых должны выполняться соотношения $|j-\tilde{j}|=\frac{1}{2}$, $|k-\tilde{k}|=\frac{1}{2}$. Все расширения S алгебры Пуанкаре двумя спинорными генераторами распадаются на два класса. Показано, что эрмитовы представления имеют только те алгебры $S^{(j)}$, для которых $|j-k|=\frac{1}{2}$. Найден вид трех типов алгебр $S^{(j)}$ для $j>\frac{1}{2}$ и двух типов для $j=\frac{1}{2}$.

В разделе III рассматривается реализация одного наиболее интересного типа алгебр $S^{(j)}$ как алгебр групп преобразований соответствующих суперпространств.

II. Структура спинорных расширений алгебры Пуанкаре

В этом разделе мы рассмотрим структуру возможных нетривиальных спинорных расширений алгебры Пуанкаре, т.е. структуру алгебр S, содержащих генераторы J_{AB}, $J_{\dot{A}\dot{B}}$ лоренцевских преобразований, генераторы $P_{A\dot{B}}$ сдвигов и спинорные генераторы

$Q^{(j,k)}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2k}}$, преобразующиеся по неприводимым представлениям (j , k) группы Лоренца ($j+k$ - полуцелое) [x].

Генераторы J_{AB} , $J_{\dot A\dot B}$ и $P_{A\dot B}$ алгебры S образуют подалгебру Пуанкаре со стандартными перестановочными соотношениями. Перестановочные соотношения J с Q однозначно фиксированы трансформационными свойствами спинора Q . Далее, для сохранения правильной связи спина и статистики алгебра S должна содержать коммутаторы P с Q и антикоммутаторы спинорных генераторов между собой. Расширение алгебры Пуанкаре мы называем нетривиальным, если хотя бы один из коммутаторов $[P,Q]$ или антикоммутаторов $\{Q,Q\}$ отличен от нуля.

Для нахождения вида коммутаторов $[P,Q]$ и антикоммутаторов $\{Q,Q\}$ (а значит и вида всей алгебры S) воспользуемся обобщенными тождествами Якоби /I/ и трансформационными свойствами генераторов J ((I,0), (0,I)), P ($(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$) и Q ((j,k)). Обобщенные тождества Якоби имеют вид /I/:

$$(-1)^{g(X_1)g(X_3)}[X_1,[X_2,X_3]] + (-1)^{g(X_2)g(X_1)}[X_2,[X_3,X_1]] + + (-1)^{g(X_3)g(X_2)}[X_3,[X_1,X_2]] = 0 , \qquad (2.I)$$

где X_1 , X_2 , X_3 - любые три генератора алгебры S, и

$$[X_1,X_2] = X_1X_2 - (-1)^{g(X_1)g(X_2)}X_2X_1 , \qquad g(J,P)=0,\ g(Q)=1 .$$

Рассмотрим алгебру S , содержащую единственный спинорный генератор $Q^{(j,k)}$. Из формул для разложения тензорных произведений представлений группы Лоренца, а именно $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes(j,k) = \sum_{+,-}\oplus(j\pm\frac{1}{2},k\pm\frac{1}{2})$ и $(j,k)\otimes(j,k)=(2j,2k)\oplus\cdots\oplus(0,0)$, вытекает, что коммутатор $[P,Q]$ равен нулю, а антикоммутатор $\{Q,Q\}$ может быть пропорционален только генератору J .

---

x) Мы используем спинорные обозначения: спинорные индексы принимают значения I,2 ($\dot 1$, $\dot 2$); $\epsilon_{AB}=-\epsilon_{BA}$, $\epsilon_{\dot A\dot B}=-\epsilon_{\dot B\dot A}$. Неприводимые величины (например J и Q) симметричны по индексам без точек (с точками). Мы опускаем спинорные индексы там, где это не приводит к недоразумениям.

Однако, из тождеств (2I) для P , Q , Q следует, что соответствующий коэффициент пропорциональности равен нулю.

Таким образом, не существует нетривиальных алгебр S , содержащих единственный спинорный генератор.

Рассмотрим теперь алгебру S , содержащую два спинорных генератора $Q^{(j,k)}$ и $\tilde Q^{(\tilde j,\tilde k)}$. Из разложений $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes(j,k) = \sum_{+,-}\oplus(j\pm\frac{1}{2},k\pm\frac{1}{2})$ и $(j,k)\otimes(\tilde j,\tilde k)=(j+\tilde j,k+\tilde k)\oplus\cdots\oplus(|j-\tilde j|,|k-\tilde k|)$, следует, что имеется две возможности. Первая возможность:

$$j-\tilde j=0 ,\ |k-\tilde k|=1 \ (\text{либо } |j-\tilde j|=1 ,\ k-\tilde k=0) .$$

При этом $[P,Q]=0$, $[P,\tilde Q]=0$, а антикоммутаторы $\{Q,Q\}$, $\{\tilde Q,\tilde Q\}$, $\{Q,\tilde Q\}$ могут быть пропорциональны генераторам J . Однако, в силу тождеств Якоби для P , Q , Q соответствующие коэффициенты пропорциональности равны нулю, тем самым, первая возможность соответствует тривиальной алгебре S . Вторая возможность: $|j-\tilde j|=\frac{1}{2}$, $|k-\tilde k|=\frac{1}{2}$. В этом случае возможны следующие перестановочные соотношения: $[P,Q]\sim\tilde Q$,

$$[P,\tilde Q]\sim Q,\ \{Q,\tilde Q\}\sim P,\ \{Q,Q\}\sim J,\ \{\tilde Q,\tilde Q\}\sim J.$$

Все алгебры S этого типа можно разбить на два класса: к первому классу отнесем алгебры $S_I^{(j,k)}$, содержащие спинорные генераторы $Q^{(j,k)}$ и $\tilde Q^{(j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}$ (или что эквивалентно $Q^{(j,k)}$ и $\tilde Q^{(j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}$), ко второму классу - алгебры $S_{II}^{(j,k)}$, содержащие спинорные генераторы $Q^{(j,k)}$ и $\tilde Q^{(j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}$. Этими двумя классами исчерпываются нетривиальные алгебры S , содержащие два спинорных генератора. Из свойств алгебр S_I и S_{II} отметим, что в общем случае они не инвариантны относительно пространственного отражения.

Для физических приложений наибольший интерес представляют эрмитовы представления алгебр (унитарные представления групп). Поскольку при эрмитовом сопряжении представление (j , k) группы Лоренца переходит в представление (k , j), то алгебра S может иметь эрмитовы представления лишь при условии, что она вместе с генератором $Q^{(j,k)}$ содержит генератор $\bar Q^{(k,j)}$. Этому требованию, как нетрудно видеть, удовлетворяет только алгебра $S_I^{(j,k)}$ с $j-k=\frac{1}{2}$ (случай $j-k=-\frac{1}{2}$ эквивалентен ему и соответствует паре $Q^{(j,k)}$ и $\tilde Q^{(j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}$).

Найдем перестановочные соотношения для алгебры $S^{(j)} \equiv S_I^{(j,j-\frac{1}{2})}$. Требование лоренц-инвариантности фиксирует вид этих перестановочных соотношений с точностью до произвольных констант:

$$[P_{A\dot B}, Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}}] = i a_1 \underset{A_1,\ldots,A_{2j}}{Sym}\, \epsilon_{AA_1} \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_2\cdots A_{2j}\dot B\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}},$$

$$[P_{A\dot B}, \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots\dot B_{2j}}] = i a_2 \underset{\dot B_1,\ldots,\dot B_{2j}}{Sym}\, \epsilon_{\dot B\dot B_1} Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{AA_1\cdots A_{2j-1}\dot B_2\cdots\dot B_{2j}},$$

$$\{Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}}, \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{C_1\cdots C_{2j-1}\dot D_1\cdots\dot D_{2j}}\} = b \underset{A,\dot B,C,\dot D}{Sym}\, \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j-1}C_{2j-1}}\epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}} P_{A_{2j}\dot D_{2j}},$$

$$\{Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}}, Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{C_1\cdots C_{2j}\dot D_1\cdots\dot D_{2j-1}}\} = c_1 \underset{A,\dot B,C,\dot D}{Sym}\, \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j}C_{2j}}\epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j-2}\dot D_{2j-2}} J_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}}$$
$$+ d_1 \underset{A,\dot B,C,\dot D}{Sym}\, \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j-1}C_{2j-1}}\epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}} J_{A_{2j}C_{2j}},$$

$$\{\overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots\dot B_{2j}}, \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{C_1\cdots C_{2j-1}\dot D_1\cdots\dot D_{2j}}\} = c_2 \underset{A,\dot B,C,\dot D}{Sym}\, \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j}C_{2j}}\epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}} J_{\dot B_{2j}\dot D_{2j}}$$
$$+ d_2 \underset{A,\dot B,C,\dot D}{Sym}\, \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j-2}C_{2j-2}}\epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j}\dot D_{2j}} J_{A_{2j-1}C_{2j-1}},$$

где Sym обозначает симметризацию по соответствующим индексам.

Обобщенные тождества Якоби (2.1) дают ограничения на возможные значения констант $a_1, a_2, b, c_1, d_1, c_2, d_2$, а именно $(j>\frac{1}{2})$: $a_1 a_2 = 0$, $a_1 b = 0$, $a_2 b = 0$, $c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = 0$.

Таким образом, возможны три следующих типа алгебр $S^{(j)}$ при $j>\frac{1}{2}$:

I $\quad [P_{A\dot B}, Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}}] = i a \underset{A_1,\ldots,A_{2j}}{Sym}\, \epsilon_{AA_1} \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_2\cdots A_{2j}\dot B\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}},$

$[P,\overline{Q}]=0,\ \{Q,\overline{Q}\}=0,\ \{Q,Q\}=0,\ \{\overline{Q},\overline{Q}\}=0.$

II $\quad [P_{A\dot B}, \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots\dot B_{2j}}] = i a \underset{\dot B_1,\ldots,\dot B_{2j}}{Sym}\, \epsilon_{\dot B\dot B_1} Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{AA_1\cdots A_{2j-1}\dot B_2\cdots\dot B_{2j}},$

$[P,Q]=0,\ \{Q,\overline{Q}\}=0,\ \{Q,Q\}=0,\ \{\overline{Q},\overline{Q}\}=0.$

III $\quad \{Q^{(j,j-\frac{1}{2})}_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}}, \overline{Q}^{(j-\frac{1}{2},j)}_{C_1\cdots C_{2j-1}\dot D_1\cdots\dot D_{2j}}\} = b \underset{A,\dot B,C,\dot D}{Sym}\, \epsilon_{A_1C_1}\cdots\epsilon_{A_{2j-1}C_{2j-1}}\epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\cdots\epsilon_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}} P_{A_{2j}\dot D_{2j}},$

$[P,Q]=0,\ [P,\overline{Q}]=0,\ \{Q,Q\}=0,\ \{\overline{Q},\overline{Q}\}=0.$

В случае $j=\frac{1}{2}$ имеется два типа алгебр:

$\mathrm{I}\,(j=\frac{1}{2})\quad [P_{A\dot B}, Q_C] = i a\, \epsilon_{AC} \overline{Q}_{\dot B},\ [P_{A\dot B}, \overline{Q}_{\dot C}] = 0,$

$\{Q_A, \overline{Q}_{\dot B}\} = b P_{A\dot B},\ \{Q_A, Q_B\} = i a b\, J_{AB},\ \{\overline{Q}_{\dot A}, \overline{Q}_{\dot B}\} = 0.$

$\mathrm{II}\,(j=\frac{1}{2})\quad [P_{A\dot B}, Q_C] = 0,\ [P_{A\dot B}, \overline{Q}_{\dot C}] = i a\, \epsilon_{\dot B\dot C} Q_A,$

$\{Q_A, \overline{Q}_{\dot B}\} = b P_{A\dot B},\ \{Q_A, Q_B\} = 0,\ \{\overline{Q}_{\dot A}, \overline{Q}_{\dot B}\} = i a b\, J_{\dot A\dot B}.$

Отметим, что при $j>\frac{1}{2}$ только генератор сдвигов $P_{A\dot B}$ имеет вид билинейной комбинации спинорных генераторов (алгебра III), в то время как при $j=\frac{1}{2}$ в общем случае ($a\neq 0$) билинейной комбинацией из спинорных генераторов являются и генераторы лоренцевских преобразований J_{AB} (или $J_{\dot A\dot B}$).

Для всех рассмотренных типов алгебр $S^{(j)}$ выполняется соотношение $[P,[P,Q(\overline{Q})]]=0$. В результате, как нетрудно убедиться, для любой конечной алгебры, содержащей подалгебру $S^{(j)}$ и не содержащей других спинорных генераторов, справедлива обобщенная теорема О'Раферти, доказанная для случая $j=\frac{1}{2}$ в /10/.

Из общих свойств алгебр $S^{(j)}$ отметим, что алгебры S_I, S_{II}, $S^{(\frac{1}{2})}_{(a\neq 0)}$ не инвариантны относительно пространственного отражения. При пространственном отражении $S_I^{(j)} \leftrightarrow S_{II}^{(j)}$. Алгебры $S_I^{(j)}$ и $S_{II}^{(j)}$ $(S^{(\frac{1}{2})}_{(a\neq 0)})$ не инвариантны также относительно эрмитового сопряжения (при этом $S_I^{(j)} \leftrightarrow S_{II}^{(j)}$) и, следовательно, не имеют унитарных представлений. Кроме того, для алгебр $S_I^{(j)}$ и $S_{II}^{(j)}\,(a\neq 0)$ оператор P^2 не является инвариантом и принимает непрерывный спектр значений. Таким образом, только алгебра $S_{III}^{(j)}$ $(S^{\frac{1}{2}}_{(a=0)})$ может рассматриваться как возможная алгебра симметрии теорий, описывающих взаимодействие частиц.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены алгебры S, содержащие более двух спинорных генераторов, а также алгебры, содержащие спинорные генераторы, преобразующиеся по приводимым представлениям группы Лоренца (например, представлениям $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})^n \otimes (\frac{1}{2},0)$). Отметим, что алгебры, содержащие нечетное число спинорных генераторов, не имеют эрмитовых представлений.

III. Реализация алгебры $S_{III}^{(j)}$ как алгебры группы преобразований суперпространства

Рассмотрим более подробно алгебру $S_{III}^{(j)}$. Положим $b=2$ – этого всегда можно добиться подходящей нормировкой спинорных генераторов. Введем, подобно случаю $j=\frac{1}{2}$ /4,6/, суперпространство – $4+4j(2j+1)$ – мерное пространство с координатами $X_{A\dot B}$ и $\theta^{(j,j-\frac{1}{2})}, \bar\theta^{(j-\frac{1}{2},j)}$ (X – координаты пространства Минковского, $\theta(\bar\theta)$ – антикоммутирующие спиноры). Алгебра $S_{III}^{(j)}$ может быть реализована как алгебра группы $G^{(j)}$ преобразований суперпространства. А именно, группа $G^{(j)}$ содержит преобразования группы Пуанкаре и суперпреобразования (преобразования, индуцируемые генераторами Q и $\bar Q$):

$$\theta \to \theta' = \theta + \xi \;, \quad \bar\theta \to \bar\theta' = \bar\theta + \bar\xi \;,$$
$$X_{A\dot B} \to X'_{A\dot B} = X_{A\dot B} - i(\xi\bar\theta)_{A\dot B} + i(\theta\bar\xi)_{A\dot B} \qquad (3.I)$$

где $\xi(\bar\xi)$ – антикоммутирующие спиноры и $(\xi\bar\theta)_{A\dot B} \equiv \xi_{AA_2\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}}\bar\theta_{A_2\cdots A_{2j}\dot B\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}}$. Суперпреобразования (3.I) не являются наиболее общими линейными преобразованиями, генераторы которых удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры $S_{III}^{(j)}$. Из этих перестановочных соотношений находим общий вид суперпреобразований:

$$\theta \to \theta' = \theta + \xi \;, \quad \bar\theta \to \bar\theta' = \bar\theta + \bar\xi \;,$$
$$X_{A\dot B} \to X'_{A\dot B} = X_{A\dot B} - i(1+f)(\xi\bar\theta)_{A\dot B} + \qquad (3.2)$$
$$+ i(1-f)(\theta\bar\xi)_{A\dot B} - ig(\xi\bar\xi)_{A\dot B} \;,$$

где f и g – произвольные константы. Преобразования (3.2) нарушают условие эрмитовости координат $X_{A\dot B}$ (вещественности координат X_μ ($\mu=0,1,2,3$)) и, следовательно, не принадлежат группе $G^{(j)}$. Однако эти преобразования играют важную роль при изучении группы $G^{(j)}$ (в случае $j=\frac{1}{2}$ см./II,6/). Отметим, что преобразования (3.I) и (3.2) тесно связаны: при $g=f$ комбинация $\tilde X_{A\dot B} = X_{A\dot B} - if(\theta\bar\theta)_{A\dot B}$

координат X, θ, $\bar\theta$, преобразующихся по закону (3.I), преобразуется по закону (3.2) и наоборот (с заменой $f \to -f$).

Введем теперь, следуя идее работы /4/, суперполя – операторозначные функции координат $\Psi(x,\theta,\bar\theta)$. Суперполя преобразуются по представлениям группы $G^{(j)}$. В частности, при суперпреобразованиях (3.I)

$$U\,\Psi(x,\theta,\bar\theta)\,U^{-1} = \Psi(x',\theta',\bar\theta') \qquad (3.3)$$

где $U = exp(i\xi Q + i\bar Q\bar\xi)$ – унитарный оператор. Одновременно с суперполями $\Psi(x,\theta,\bar\theta)$, ковариантными относительно суперпреобразований (3.I), мы будем рассматривать суперполя $\Psi_f(x,\theta,\bar\theta)$, ковариантные относительно преобразований (3.2). Легко видеть, что

$$\Psi(x,\theta,\bar\theta) = e^{-f(\theta\bar\theta)_{A\dot B}\partial_{A\dot B}}\Psi_f(x,\theta,\bar\theta) = \Psi_f(x+if(\theta\bar\theta),\theta,\bar\theta).$$

Из формулы (3.3) для Ψ_f вытекают перестановочные соотношения:

$$\left[Q_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}},\Psi_f(x,\theta,\bar\theta)\right] = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}}} - i(1+f)\underset{A_1,\ldots,A_{2j}}{Sym}\,\bar\theta_{A_2\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j}}\partial_{A_1\dot B_{2j}}\right)\Psi_f(x,\theta,\bar\theta),$$
$$\left[\bar Q_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots\dot B_{2j}},\Psi_f(x,\theta,\bar\theta)\right] = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots\dot B_{2j}}} - i(1-f)\underset{\dot B_1,\ldots,\dot B_{2j}}{Sym}\,\theta_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_2\cdots\dot B_{2j}}\partial_{A_{2j}\dot B_1}\right)\Psi_f(x,\theta,\bar\theta). \qquad (3.4)$$

Используя соотношения (3.4), находим вид ковариантных производных:

$$\mathcal{D}^f_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}} = \frac{\partial}{\partial\theta^{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}}} + i(1+f)\underset{A_1,\ldots,A_{2j}}{Sym}\,\bar\theta_{A_2\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j}}\partial_{A_1\dot B_{2j}}\;,$$
$$\bar{\mathcal{D}}^f_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots\dot B_{2j}} = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots\dot B_{2j}}} + i(1-f)\underset{\dot B_1,\ldots,\dot B_{2j}}{Sym}\,\theta_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_2\cdots\dot B_{2j}}\partial_{A_{2j}\dot B_1}\;. \qquad (3.5)$$

Перестановочные соотношения для $\mathcal{D}^f$ и $\bar{\mathcal{D}}^f$ совпадают с перестановочными соотношениями для Q и $\bar Q$ с точностью до общего знака. Определим, следуя работе /8/, "левые" и "правые" поля Ψ^+ и Ψ^-:

$$\bar{\mathcal{D}}^0_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot B_1\cdots\dot B_{2j}}\Psi^+ = 0\,, \qquad \mathcal{D}^0_{A_1\cdots A_{2j}\dot B_1\cdots\dot B_{2j-1}}\Psi^- = 0\,. \qquad (3.6)$$

В силу соотношения $\mathcal{D}^{0}=e^{-f(\theta\bar{\theta})_{A\dot{B}}P_{A\dot{B}}}\mathcal{D}^{f}e^{f(\theta\bar{\theta})_{A\dot{B}}P_{A\dot{B}}}$ условия (3.6) эквивалентны следующим:

$$\overline{\mathcal{D}}^{f=1}_{A_1\cdots A_{2j-1}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j}}\Psi^{+}_{f=1}=\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{A_1\cdots A_{2j-1}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j}}}\Psi^{+}_{f=1}=0\,, \tag{3.7а}$$

$$\mathcal{D}^{f=-1}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j-1}}\Psi^{-}_{f=-1}=\frac{\partial}{\partial\theta^{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j-1}}}\Psi^{-}_{f=-1}=0\,. \tag{3.7б}$$

Нетрудно убедиться, что суперполя Ψ^{+} и Ψ^{-}, преобразующиеся по представлениям $(Y,0)$ и $(0,Y)$ группы Лоренца являются неприводимыми. Разлагая суперполя $\Psi^{+}_{f=1}$ и $\Psi^{-}_{f=-1}$, преобразующиеся по представлениям $(Y,0)$ и $(0,Y)$ группы Лоренца в полиномы степени $2j(2j+1)$ по степеням соответственно θ и $\bar{\theta}$ получаем, что эти суперполя (а значит и Ψ^{+},Ψ^{-}) при $P^2>0$ эквивалентны набору обычных полей со спектром спинов:

$$Y-j(4j-1),\,Y-j(4j-1)+\tfrac{1}{2},\dots,Y-\tfrac{1}{2},\,Y,\,Y+\tfrac{1}{2},\dots,Y+j(4j-1)-\tfrac{1}{2},\,Y+j(4j-1). \tag{3.8}$$

Спектр спинов (3.8) в неприводимых представлениях группы $G^{(j)}$ можно также получить используя перестановочные соотношения для Q с $\overline{Q}$ (см.раздел II). В системе покоя (при $P^2>0$) эти перестановочные соотношения имеют вид $\{a_i, a^{+}_k\}=\delta_{ik}$ только для $4j$ компонент спинорного генератора $Q_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j-1}}$, для которых разность числа индексов равных 1 и числа индексов равных 2 по модулю равна единице. Далее, рассуждая аналогично /5/, находим спектр (3.8).

Суперполя, преобразующиеся по представлениям $(Y,\hat{Y})$ группы Лоренца, являются приводимыми.

Наконец, аналогично случаю $j=\frac{1}{2}$, легко найти трансформационные свойства компонент суперполей относительно суперпреобразования, а также вид вакуумных средних для свободных суперполей.

IУ. Заключение

Используя технику суперполей аналогично случаю $j=\frac{1}{2}$, можно построить ряд моделей инвариантных относительно групп $G^{(j)}$. Для этих моделей характерно присутствие полей (в частности, калибровочных) с высокими целыми и полуцелыми спинами и сокращение большого числа расходимостей. Таким образом, группы $G^{(j)}$ при $j>\frac{1}{2}$ представляют интерес для описания полей с высокими спинами.

Автор благодарен Ю.Б.Румеру за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

I. Ф.А.Березин, Г.И.Кац. Математический сборник, 82, 343 (1970).

2. Ю.А.Гольфанд, Е.П.Лихтман. Письма в ЖЭТФ, 13, 452 (1971); Сборник "Проблемы теоретической физики. Памяти Е.И.Тамма", стр. 37 "Наука" (1972).

3. J. Wess, B. Zumino, Nucl. Phys., B70, 39 (1974), Phys. Lett., B49, 52 (1974).

4. A. Salam, J. Strathdee, Nucl. Phys., B76, 477 (1974).

5. A. Salam, J. Strathdee, Nucl. Phys., B80, 499 (1974).

6. S. Ferrara, J. Wess, B. Zumino, Phys. Lett., B51, 239 (1974).

7. B. Zumino, in Proc. XVII Intern. Conf. on High-Energy Physics, London (1974).

8. A. Salam, J. Strathdee, Trieste preprint IC/74/42 (1974).

9. Б.Г.Конопельченко. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 74-96 (1974).

10. Б.Г.Конопельченко. Письма в ЖЭТФ, 20, 684 (1974).

11. P.P. Srivastava, Lett. Nuovo Cim., 12, 161 (1975).

Поступила – 17 февраля 1975 г.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 7.V-1975г. МН 02933
Усл. 0,6 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 40

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,вт