27

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 56

В.Н.Байер, А.И.Мильштейн

К ИНТЕРПРЕТАЦИИ АНОМАЛЬНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА ЭЛЕКТРОНА

Новосибирск
1975

В.Н.Байер,А.И.Мильштейн

К ИНТЕРПРЕТАЦИИ АНОМАЛЬНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА ЭЛЕКТРОНА

а н н о т а ц и я

Проведен анализ вкладов различных промежуточных состояний в аномальный магнитный момент (АММ) электрона. Соотношение между этими вкладами существенно для "наглядных"моделей АММ.Рассмотрение,проведенное в рамках операторной диаграммной техники,удалось заметно упростить,используя результаты,полученные при вычислении массового оператора электрона в магнитном поле,зависящая от спина часть которого определяет АММ.

Найдено,что вклад электронного промежуточного состояния $\mu^{(+)} = -1/6$,а вклад позитронного промежуточного состояния $\mu^{(-)} = 7/6$ (в единицах $\frac{\alpha}{2\pi}\frac{e\hbar}{2mc}$).Вклад в АММ переходов,сопровождающихся переворотом спина $\mu_{sf} = -1/2$, а вклад переходов без переворота спина $\mu_{nf} = 3/2$.Показано, что в области очень больших полей $H \gg H_0$ соотношение между вкладами меняется: $\mu_1^{(+)} = -(1+\sqrt{\pi})\frac{H_0}{2H}\ln\frac{2H}{H_0}$,

$$\mu_1^{(-)} = -(1-\sqrt{\pi})\frac{H_0}{2H}\ln\frac{2H}{H_0} .$$

Institute for Nuclear Physics,Novosibirsk,630090

TO INTERPRETATION OF AN ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT OF AN ELECTRON

V.N.Baier,A.I.Milstein

a b s t r a c t

An analysis of contributions of different intermediate states into the anomalous magnetic moment of the electron(AMM) has been made. Interrelation between these contributions is essential in intuitive reasoning for AMM. An operater approach has been used and previous results for mass operater of the electron in the magnetic field were very useful.

It is found, that the electron intermediate state contribution to AMM is $\mu^{(+)} = -1/6$ and positron intermediate stete contribution to AMM is $\mu^{(-)} = 7/6$ (an unit $\alpha/2\pi\ e\hbar/2mc$ is used). The contribution of spin-flip transitions is $\mu_{sf} = -1/2$ and spin-nonflip transitions is $\mu_{nf} = 3/2$. It is shown, that in high magnetic field region $H \gg H_0$ interrelation between these contribution is different:

$$\mu_1^{(+)} = -(1+\sqrt{\pi})\lambda \ln\frac{1}{\lambda}\ ,\ \mu_1^{(-)} = -(1-\sqrt{\pi})\lambda \ln\frac{1}{\lambda}\ ,$$

$$\lambda = \frac{H_0}{2H}\ .$$

I.После того,как была сформулирована современная квантовая электродинамика,которая дала последовательное описание вакуумных эффектов,появились работы,которые содержали полуклассическое "наглядное" описание этих эффектов.Хорошо известна работа Вельтона /I/ (см.также /2/), в которой показано,что лэмбовский сдвиг уровней появляется вследствие смещения электронов,движущихся в поле атомного ядра,под действием флуктуирующего вакуумного электромагнитного поля.Учет воздействия этого поля на врожденный магнитный момент электрона приводит к колебаниям момента относительно направления внешнего магнитного поля,что дает уменьшение модуля энергии взаимодействия магнитного момента с внешним полем,и может быть истолковано как отрицательная поправка к магнитному моменту электрона,пропорциональная вероятности взаимодействия с вакуумным полем (т.е. $\backsim \alpha$).Коба /3/ впервые обратил внимание на то,что наряду с указанным эффектом необходимо учитывать переходы электрона под действием вакуумного поля в состояния с отрицательной энергией или,что то же самое, дрожание (Zitterbewegung) электрона.Врожденный магнитный момент электрона можно наглядно представить как магнитный момент кольца с током, возникающего вследствие дрожания электрона.Переходы под действием вакуумного поля приводят к увеличению радиуса этого кольца,что даёт положительную поправку к магнитному моменту ($\backsim \alpha$).Последняя оказывается больше первой, так что суммарная поправка является положительной.При конкретном рассмотрении в /3/ использованы очень грубые приближения в обращении с расходящимися интегралами.Поэтому численный коэффициент в поправке к магнитному моменту при таком подходе остался неопределенным.

В последующие годы неоднократно предпринимались попытки усовершенствования этого качественного анализа (см.,например,/4/ и цитированную там литературу).Технически эти

попытки уже заметно сложнее стандартного расчёта аномального магнитного момента (АММ) электрона в рамках квантовой электродинамики в α – порядке, хотя фактически они не содержат прогресса в понимании проблемы по сравнению с /3/.
В частности остается неизвестным соотношение между вкладами переходов в состояния с положительными и отрицательными частотами, представляющее известный физический интерес. С нашей точки зрения, в создавшейся ситуации разумно получить ответы на вопросы, возникающие при качественном описании АММ электрона, исходя из самой квантовой электродинамики.

2. Для рассмотрения различных вкладов в АММ электрона оказывается удобным исходить из массового оператора электрона в магнитном поле, усредненного по состояниям электрона

$$\langle M\rangle = -e^2\int d^4x\, d^4x'\, \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu G(x,x')\gamma_\mu \mathcal{D}_F(x-x')\Psi(x') \qquad (\mathrm{I})$$

где $G(x,x')$ – функция Грина электрона в поле. АММ электрона связан с зависящей от спина σ часть $\langle M\rangle$: $\langle M\rangle_\sigma$. Массовый оператор электрона во внешнем магнитном поле был найден недавно в работах /5,6/ с помощью специфической операторной техники. Для определения вкладов промежуточных состояний с определенной частотой необходимо ввести соответствующий проекционный оператор. Для этого запишем функцию Грина электрона, входящую в (I), в виде:

$$G(x,x') = \int\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(x_0-x_0')}\,\frac{1}{\omega\gamma^0-\vec{\gamma}\vec{\mathcal{P}}-m+i0}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (2)$$

Учтем, что промежуточное состояние с положительной частотой определяется областью $x_0 > x_0'$, а состояние с отрицательной частотой – областью $x_0 < x_0'$, и после подстановки (2)

в (I), проведя экспоненциальную параметризацию пропагаторов (см. (2.2) работы /5/), выполним явно интегрирование по времени в соотвествующих областях, принимая во внимание самосопряженность оператора $\mathcal{P}_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$. Тогда получим:

$$M_\pm = \pm\frac{e^2}{(2\pi)^5}\int_0^\infty s\,ds\int_0^1 du\int\frac{d\omega\, d\nu}{\omega-\nu-\varepsilon\mp i0}\int d^3k\,\times$$
$$\times\exp\left[is(1-u)(\nu^2-\vec{k}^2)\right]\gamma^\mu\left[\omega\gamma^0-\vec{\gamma}(\vec{\mathcal{P}}-\vec{k})+m\right]\times$$
$$\times\exp\left\{isu\left[\omega^2-(\vec{\mathcal{P}}-\vec{k})^2-m^2+\tfrac{1}{2}e\sigma F\right]\right\}\gamma_\mu \qquad (3)$$

где $\nu = k^0$, $\pm$ означает знак частоты промежуточного состояния. Интегрирррвание по импульсу фотона в (3) может быть проведено совершенно аналогично вычислению, сделанному в /5/. При этом следует иметь в виду, что в случае чисто магнитного поля отличны от нуля только пространственные компоненты вектора-потенциала. Проводя вычисления как при выводе формулы (2.I7) в работе /5/ можно получить

$$\int d^3k\, k_i\, e^{isH_\omega} = \left(\frac{A}{D}\mathcal{P}\right)_i \int d^3k\, e^{isH_\omega} \qquad (4)$$

где использованы те же обозначения, что и в /5/, только $H_\omega = H(\mathcal{P}^0 - k^0 \to \omega)$. Для вычисления

$$\int d^3k\, e^{isH_\omega}$$

можно воспользоваться известным выражением для $L(s)$ (формула (2.20) работы /5/) и учесть, что в магнитном поле $\mathcal{P}^0 \to \varepsilon$, после чего $\int dk^0[\ldots]$ без труда берется. В итоге находим явное выражение для интересующей нас квадратуры. Классификация спиновых состояний проводится как в работе /5/ (см. формулы (3.I0), (3.I8)). Подставим полученный результ в (3), выделим в найденном выражении для массового оператора зависящий от спина член, перейдем к переменным ω, $y = \nu + \varepsilon - \omega$ и выполним интегрирование по ω. В результате получим следующее выражение:

$$\langle M_{\pm}\rangle_q = \mp \frac{\alpha}{2\pi} q m \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \int_0^1 du\, u(1-u) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi(z \pm i0)} \times$$

$$\times \frac{1}{\Delta} \exp\left\{ i\left[\lambda\left(-ux + x(1-u)(z^2 - 2z\gamma)\right) + 2n\left(a(x) - \frac{ux}{2}\right)\right]\right\} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{1-\cos x}{x} - \sin x\right)\gamma - z\left(\frac{1-\cos x}{x} + \sin x\,\frac{1-u}{u}\right)\right] \qquad (5)$$

где $\gamma = \sqrt{1 + \frac{n}{\lambda}}$, $\lambda = \frac{H_0}{2H}$, остальные обозначения те же, что в формуле (3.I8) статьи /5/. Заметим, что это выражение не требует перенормировки.

Реальная часть выражения (5) следующим образом связана с АММ электрона $\mu_n(\lambda)$ (измеряемым в единицах $\frac{\alpha}{2\pi}\frac{e}{2m}$), (см/7/):

$$Re\langle M\rangle_q = -\frac{eH}{2m} q \sqrt{1 + \frac{n}{\lambda}}\, \frac{\alpha}{2\pi}\, \mu_n(\lambda) \qquad (6)$$

Обозначим через $\mu_n^{(+)}$, $\mu_n^{(-)}$ вклады в АММ $\mu_n(\lambda)$ промежуточных состояний с положительной и отрицательной частотой. Рассмотрим область $\lambda \gg 1$, $n \ll \lambda$ (электрон на нижних уровнях в слабом магнитном поле), тогда основной вклад в интеграл (см./7/) дает область $x \sim 1/\lambda$. Разлагая в (5) функции при малых x и вычисляя после этого интегралы, находим старшие члены разложения $\mu_n^{(\pm)}$ по степеням $1/\lambda$:

$$\mu_n^{(+)} = -\frac{1}{6}, \quad \mu_n^{(-)} = \frac{7}{6}, \quad \mu_n^{(+)} + \mu_n^{(-)} = 1 \qquad (7)$$

Формулы (7) являются точными для свободных частиц, когда магнитное поле $H \to 0$ ($\lambda \to \infty$), и дают количественное соотношение между вкладами электронных и позитронных промежуточных состояний в АММ. Из них следует, что электронные промежуточные состояния дают отрицательный вклад в АММ, а позитронные промежуточные состояния – положительный; положительность же суммарного АММ обусловлена тем, что абсолютная величина последнего вклада больше, чем первого. Этот результат подтверждает качественные соображения, содержащиеся в работе Кобы /3/. Использование подхода, основанного на вычислении массового оператора электрона в магнитном поле, несмотря на кажущуюся сложность, является адекватным задаче, поскольку здесь очень просто разделяются вклады промежуточных состояний с положительной и отрицательной частотой.

В случае, когда электрон имеет большую энергию (находится на высоких уровнях в магнитном поле), так что $n \gg \lambda \gg 1$, оказывается, что в (5) вклад позитронных промежуточных состояний подавлен как $1/n$. Тогда, если $\lambda \ll n \ll \lambda^3$, то $\mu^{(+)} = $ I, $\mu^{(-)} = 0\,(1/n)$. Этот результат был получен ранее в квазиклассическом приближении /8/.

3. Другой аспект структуры АММ даёт соотношение между вкладами переходов с переворотом спина и без переворота спина в промежуточном состоянии (без разделения на состояния с положительными и отрицательными частотами). Учитывая, что разбиение амплитуды на части, соответствующие переходам с переворотом и без переворота спина, является лоренц-инвариантным, воспользуемся для анализа этого вопроса квазиклассическим приближением /9/ (предел, когда параметр $\chi \to 0$ означает переход к свободным частицам).

Зависящая от спина часть массового оператора, когда переходы в промежуточное состояние сопрвождаются переворотом спина, имеет вид (см. формулы (12.4), (I4.3), (I4.5) /9/):

$$Re(\Delta m_{sf})=\frac{\alpha}{(2\pi)^2}\left(\vec{\zeta}[\vec{v}\vec{s}]\right)\frac{2\varepsilon^2}{w}\int d\Omega(1-\vec{n}\vec{v})\int_0^\infty\frac{u^3du}{(1+u)^3}L_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\left[\frac{\varepsilon^2}{m^2}(1-\vec{n}\vec{v})\right]^{3/2}\right) \tag{8}$$

где $\vec{w}=\dot{\vec{v}}$, $\vec{s}=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$,функции L_ν определены в /9/ (см.(I2.I2)),в формуле (8) проведено интегрирование по времени τ .Вычисляя интеграл по углам,найдем:

$$Re(\Delta m_{sf})=-\frac{\alpha}{4\pi}\left(\vec{\zeta}[\vec{v}\vec{s}]\right)m\int_0^\infty\frac{u^2du}{(1+u)^3}L_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right) \tag{9}$$

В пределе $\chi\ll 1$ входящий в (9) интеграл берется,в итоге получаем,с использованием формул (I2.I9),(I2.23) /9/, следующие выражения для вкладов в АММ в единицах μ (6) :

$$\mu_{sf}=-\frac{1}{2}\ ,\quad \mu_{nf}=\frac{3}{2}\ ,\ \mu_{sf}+\mu_{nf}=1 \tag{I0}$$

где μ_{sf} - вкдад переходов с переворотом спина, μ_{nf} - вклад переходов без переворота спина.

4.АММ электрона в области сильных магнитных полей H был исследован недавно в работе /7/.В ней получено,что в области $H\sim H_0$ АММ $\mu_n(\lambda)$ быстро падает,становится отрицательным,достигает некоторого минимального значения,а затем по мере роста H стремится к нулю со стороны отрицательных значений.В этой связи представляет интерес соотношение вкладов электронного и позитроного промежуточных состояний в области сильных магнитных полей.Для случая $H\sim H_0$ необходимо провести численный анализ,а для случая $H\gg H_0$, исходя из формул (5),(6) удается в аналитической форме найти асиптотическое разложение:

$$\mu_1^{(+)}=-(1+\sqrt{\pi})\lambda\ln\frac{1}{\lambda}\ ,\ \mu_1^{(-)}=-(1-\sqrt{\pi})\lambda\ln\frac{1}{\lambda} \tag{II}$$

причем основной вклад в интеграл даёт область $x\gg 1$, $x(1-u)\sim 1$ (см./7/).Как и в области,когда поле $H\to 0$, величина $\mu_1^{(+)}$ - отрицательная,а величина $\mu_1^{(-)}$ - положительна. Однако произошла численаая перестройка вкладов и абсолютная величина вклада электронного промежуточного состояния стала больше,чем позитронного,так что в целом АММ электрона оказывается отрицательным.

Авторы благодарны В.М.Каткову и В.М.Страховенко за ценные обсуждения.

Поступила 23 мая 1975 г.

Литература

I. T.Welton.Phys.Rev.74,1157,1948
2. V.Weisskopf.Rev.Mod.Phys.21,305,1949
3. Z.Koba.Prog.Theor.Phys.4,319,1949
4. S.Lei,P.Knight,J.Eberly.Phys.Rev.Lett.32,494,1974
5.В.Н.Байер,В.М.Катков,В.М.Страховенко ЖЭТФ,67,453,I974
6. J.Schwinger.Phys.Rev.D7,1696,1973
7. V.N.Baier,V.M.Katkov,V.M.Strakhovenko.Lett.Nuovo Cimento
8.В.Н.Байер,В.М.Катков,В.М.Страховенко ДАН СССР I97,66,I97I
9.В.Н.Байер,В.М.Катков,В.С.Фадин "Излучение релятивистских электронов"Атомиздат.Москва.I973.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 3.07.1975г. МН 03062
Усл. 0,7 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 56

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР.