

52

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 97

Д.Д.Рютов

О КРИТИЧЕСКОМ ВАКУУМНОМ ТОКЕ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

Новосибирск

1975

С КРИТИЧЕСКОМ ВАКУУМНОМ ТОКЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ
ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

Д.Д.Рютов

А Н Н О Т А Ц И Я

Показана достижимость критического тока Смита и Хартмана при инъекции релятивистского электронного пучка в вакуумное дрейфовое пространство.

Общепринятый способ определения предельного вакуумного тока релятивистского электронного пучка (РЭП) основан на анализе решения электростатической задачи вдали от места инжекции. При этом, поскольку распределение потенциала около источника пучка не исследуется, остается открытым вопрос о возможности образования в этой области виртуального катода при токах инжекции, меньших значения, найденного упомянутым выше способом. Этот вопрос выяснен в настоящей работе. Показано, что в случаях цилиндрического обратного токопровода и обратного токопровода с плавно увеличивающимся радиусом значение тока, определенное с помощью вышеуказанной процедуры, действительно дает правильную границу появления виртуального катода.

Типичная схема эксперимента по инжекции РЭП в вакуум представлена на рис. I. Пучок, эмиттированный катодом 1, ускоряется в диодном промежутке и сквозь анодную фольгу 2 попадает в дрейфовое пространство 3. Ток пучка, собранный коллектором 4, замыкается на анод через обратный токопровод 5. Наличие анодной фольги в этой схеме не обязательно, причем все дальнейшие рассуждения могут быть приспособлены и к бесфольговой системе. Тем не менее, ниже для определенности всюду говорится о случае, когда фольга имеется.

Обратный токопровод считается аксиально-симметричным, его форма определяется зависимостью его радиуса r от координаты z (рис. I). Предполагается, что за переходной областью, примыкающей к анодной фольге, токопровод представляет собой цилиндр радиуса R , т.е. при больших z $r(z) \rightarrow R = \text{const}$ (подразумевается, что длина дрейфового пространства значительно превышает R).

Важная характеристика рассматриваемой системы — это предельный ток релятивистских электронов, который может быть пропущен через дрейфовое пространство. В настоящей работе будет исследована ситуация, когда в дрейфовом пространстве имеется сильное ведущее магнитное поле, направленное вдоль оси пучка. Такое поле снимает все вопросы, связанные с радиальным равновесием пучка, и единственным ограничением на ток пучка становится электростатическое задержание потока электронов на

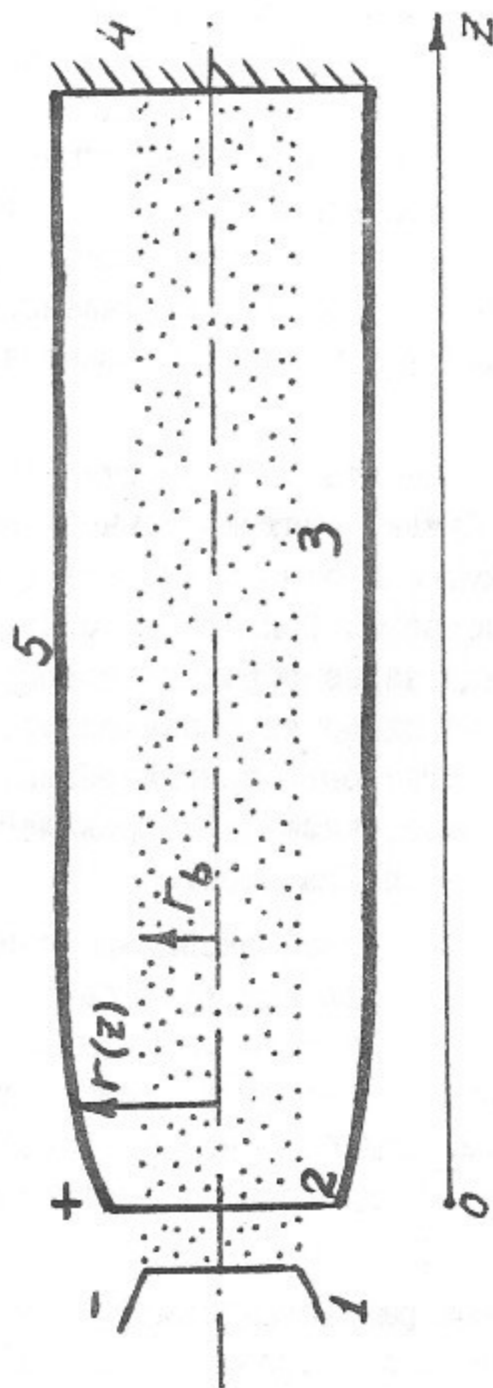


Рис. I. Схема эксперимента по инжекции релятивистского электронного пучка в вакуум.

входе в дрейфовое пространство. Причиной запираания является аксиальное электрическое поле, создаваемое отрицательным зарядом электронов и выталкивающее их назад на анод. Ясно, что когда ток пучка станет таким, что потенциал дрейфового пространства достигнет величины порядка энергии пучка, дальнейшее увеличение тока электронов станет невозможным.

Примем за нуль потенциала φ его значение на стенках дрейфового пространства (стенки дрейфового пространства, включая анодную фольгу, очевидно, образуют эквипотенциальную поверхность). Ввиду отрицательности заряда пучка, потенциал внутри дрейфового пространства будет всюду отрицательным (тормозящим электроны). Наибольшее по абсолютной величине значение φ будет достигаться на оси пучка. Соответственно, при увеличении тока инжекции запираяться начнут, прежде всего, электроны приосевой области, и пучок станет полым. При дальнейшем увеличении тока инжекции будет "вырезаться" все большая часть внутренней области пучка и, в конце концов, мы придем к ситуации трубчатого пучка с бесконечно малой толщиной стенок. При этом радиус пучка r_b (см.рис. I) задается радиусом катода. Таким образом, трубчатый пучок является некоторым стандартным состоянием пучка при больших токах инжекции, и в дальнейшем мы будем заниматься именно им. Подчеркнем еще раз, что мы рассматриваем системы с сильным ведущим магнитным полем, так что вопроса о радиальном равновесии и об устойчивости пучка не возникает.

Приведем полезное для дальнейшего соотношение между током трубчатого пучка I , поверхностной плотностью заряда σ и скоростью электронов v :

$$I = 2\pi r_b \sigma v \quad (1)$$

(во избежание путаницы отметим, что под I , σ и v мы понимаем абсолютные значения соответствующих величин).

Обычный вывод формулы для критического тока основан на рассмотрении движения электронов в средней части дрейфового пространства, вдали от фольги и коллектора, и состоит в следующем (см. статью Смита и Хартмана /1/, а также обзоры /2,3/).

В этой области электрическое поле можно считать чисто радиальным, что позволяет легко найти распределение электростатического потенциала. В частности, абсолютное значение потенциала на поверхности пучка, которое мы будем обозначать через φ_b , следующим образом выражается через \mathcal{E} и, соответственно, через I (см./I/):

$$\varphi_b = 4\pi r_b \mathcal{E} \ln \frac{R}{r_b} = \frac{2eI}{v} \ln \frac{R}{r_b} \quad (2)$$

где e - абсолютная величина заряда электрона. Чаще вместо φ_b мы будем пользоваться безразмерной величиной ξ :

$$\xi = \frac{e\varphi_b}{mc^2}, \quad (3)$$

где m - масса электрона, c - скорость света.

За счет торможения электронов в электростатическом потенциале скорость v отличается от начальной скорости электронов v_0 на входе в дрейфовое пространство и может быть найдена с помощью закона сохранения энергии, который дает:

$$v = c [1 - (\gamma_0 - \xi)^{-2}]^{1/2} \equiv c\beta(\xi) \quad (4)$$

где $\gamma_0 = (1 - \frac{v_0^2}{c^2})^{-1/2}$. Подставляя v в формулу (2) и учитывая определение (3), получаем уравнение, которое позволяет найти ξ :

$$\frac{I^*}{I \ln \frac{R}{r_b}} = \frac{1}{\xi \beta(\xi)} \equiv F(\xi) \quad (5)$$

где $I^* = mc^3/2e \approx 8,5 \text{ кА}$.

На первый взгляд кажется, что предельный вакуумный ток I_{crit} должен определяться из того условия, чтобы пучок полностью потерял свою кинетическую энергию в тормозящем потенциале ($\xi = \gamma_0 - 1$). В действительности, однако, ситуация более тонкая. График функции $F(\xi)$, стоящей в пра-

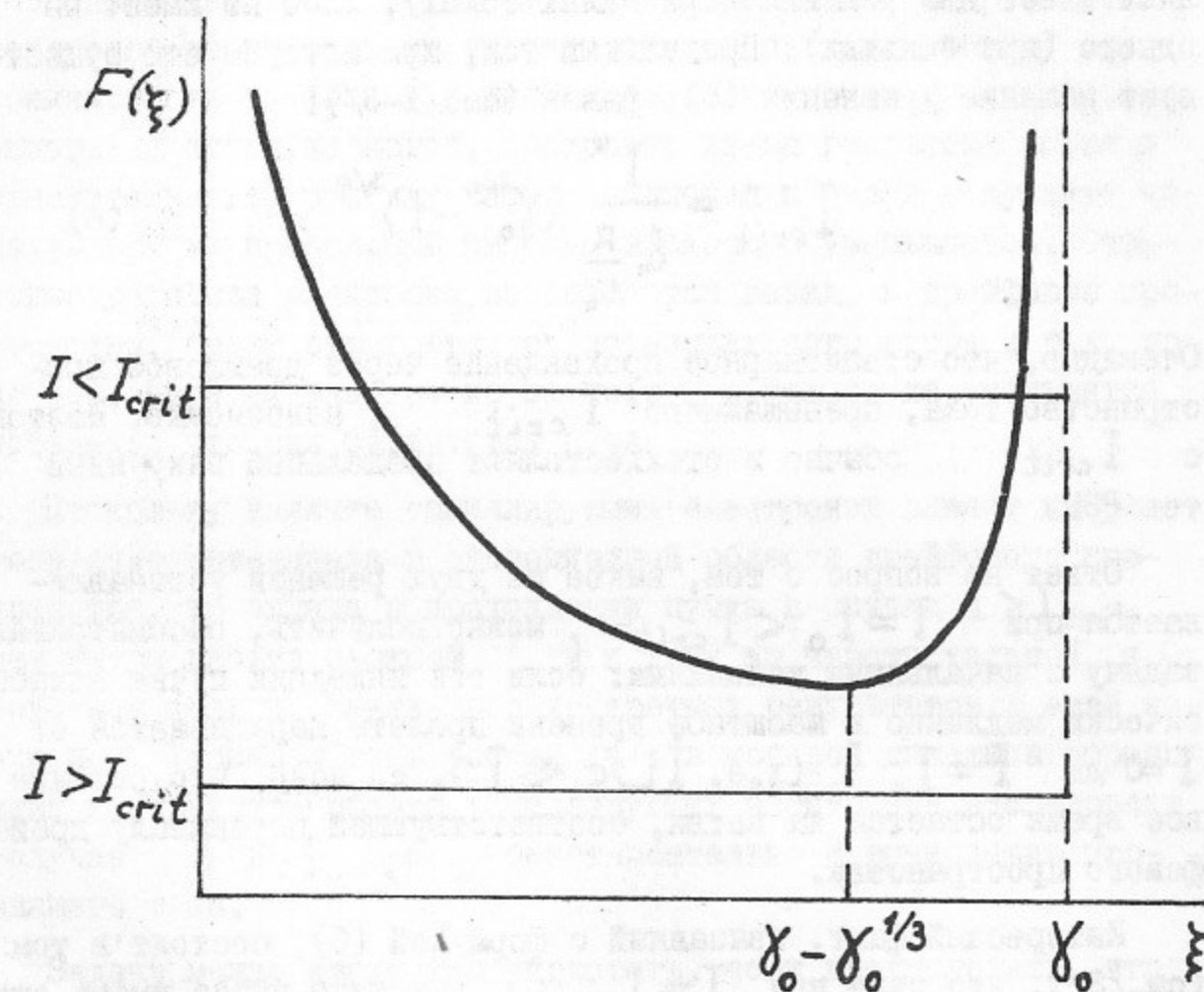


Рис. 2. График функции $F(\xi) = [\xi\beta(\xi)]^{-1}$

вой части уравнения (5), имеет вид, изображенный на рис.2. Из рисунка видно, что при заданном токе пучка уравнение (5) либо имеет два решения (при малых токах), либо не имеет ни одного (при больших). Предельный ток, при котором еще существует решение уравнения (5), равен (см./I-3/):

$$I_{crit} = \frac{I^*}{l_m \frac{R}{r_b}} (\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2} \quad (6)$$

Очевидно, что стационарное прохождение через дрейфовое пространство тока, превышающего I_{crit} , невозможно. Поэтому с I_{crit} обычно и отождествляют предельный вакуумный ток РЭП.

Ответ на вопрос о том, какое из двух решений устанавливается при $I = I_0 < I_{crit}$, можно получить, рассматривая задачу с начальными условиями: если ток инжекции пучка адиабатически медленно в масштабе времени пролета наращивается от $I=0$ до $I=I_0$ (т.е. $lL/c \ll l$), то ясно, что решение все время остается на ветви, соответствующей потенциалу дрейфового пространства.

Интересный факт, связанный с формулой (6), состоит в том (см./3/), что даже при $I = I_{crit}$ частицы пучка имеют еще большой запас кинетической энергии: при $I = I_{crit}$

$\xi = \gamma_0 - \gamma_0^{1/3}$, и кинетическая энергия электронов равна $mc^2(\gamma_0^{2/3} - 1)$ (заметим, что при $\gamma_0 \gg 1$ остаточная кинетическая энергия даже релятивистская). Поскольку на больших расстояниях от входа ток заведомо не может превышать I_{crit} ,

возникает вопрос, каким же образом происходит отражение избыточных электронов при инжекции тока, превышающего I_{crit} . Очевидно, здесь имеется следующая

возможность: немонотонная зависимость от z потенциала $\varphi_b(z)$, при которой вблизи входа пучка в дрейфовое пространство имеется потенциальный барьер высотой $(\gamma_0 - 1)mc^2$, обеспечивающий отражение "лишних" электронов^{х)}.

х) При этом прохождение части электронов всегда можно обеспечить за счет даже бесконечно малого энергетического разброса пучка.

При $I > I_{crit}$ в области между вершиной потенциального горба и анодной фольгой возникает поток электронов, направленный навстречу исходному пучку. На фольге энергия этих электронов равна энергии инжектируемого пучка. Поэтому они проникают сквозь фольгу в диод и долетают почти до катода, но попасть на катод не могут, поскольку из-за рассеяния (хотя и незначительного) при двукратном - вперед и назад - пролете через фольгу их продольный импульс несколько уменьшается. Отраженные у катода электроны возвращаются назад, в дрейфовое пространство, снова отражаются от потенциального горба и т.д. до тех пор, пока их энергия из-за потерь в фольге не уменьшится настолько, что они поглотятся в ней.

Поскольку наличие осциллирующих электронов влияет на распределение потенциала в околодиодной области дрейфового пространства, то задача о прохождении пучка в случае $I > I_{crit}$ становится весьма сложной^{х)} и к тому же чувствительной к свойствам фольги. Каких-либо конкретных результатов в этой задаче нет. Упомянем лишь работу /4/, в которой динамика образования и структура облака осциллирующих электронов исследованы в случае $I \gg I_{crit}$ безотносительно к вычислению проходящего тока.

Задачу можно несколько упростить, если предположить, что электроны, отраженные от горба потенциала сразу же поглощаются в диоде, так что течение в рассматриваемой области дрейфового пространства делается лишь двухпоточковым. Такая ситуация может осуществляться в случае, когда ускоряющее напряжение на диоде медленно уменьшается со временем. Тогда если фольга достаточно тонкая, то потеря продольного импульса в ней не сможет перекрыть падения ускоряющего напряжения за время пролета электронов до точки поворота в дрейфовом пространстве и обратно, так что отраженные электроны будут сразу попадать на катод^{хх)}. Однако и в относительно простом случае двухпоточкового

х) В частности не исключено, что наличие взаимопроникающих потоков в околофольговой области может служить источником неустойчивости.

хх) Следует отметить, что вообще, если фольга тонкая (а тем более если ее нет вовсе), то ситуация при $I > I_{crit}$ делается очень чувствительной к возможной малой нестационарности ускоряющего напряжения.

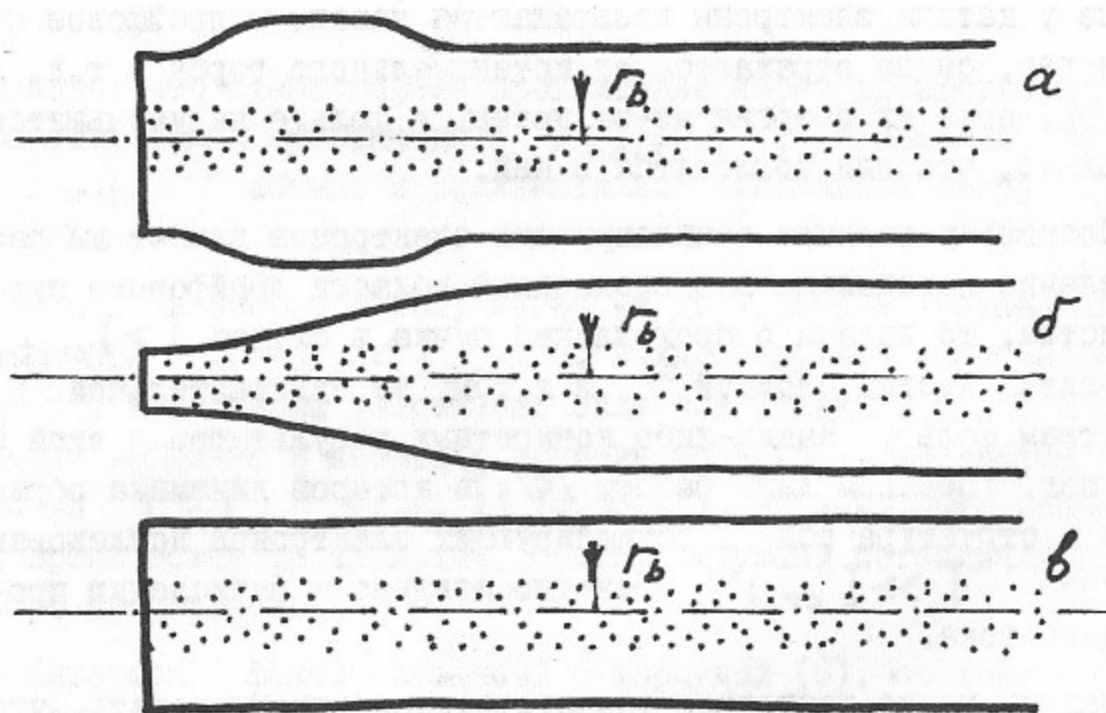


Рис.3. К вопросу о зависимости предельного тока от формы стенок обратного токопровода. В случае трубчатого пучка электроны заполняют цилиндрическую поверхность радиуса r_b .

течения распределение потенциала в дрейфовом пространстве и величина проходящего тока при $I > I_{crit}$ не найдены.

В связи с изложенным возникает вопрос, нет ли потенциального горба, отражающего электроны, и при $I < I_{crit}$, иными словами, достигим ли критический ток (6), или ограничение тока происходит на меньшем уровне, а осциллирующие электроны появляются и при $I < I_{crit}$. Исследование этого вопроса проводится ниже.

Как уже отмечалось, формула (6), полученная из анализа ситуации при больших z , дает, вообще говоря, только верхнюю границу тока, который может быть стационарным образом пропущен через дрейфовое пространство. Ответ на вопрос о том, достигим ли этот ток в действительности, существенным образом определяется структурой решения при $z \sim r$, в частности, профилем стенок токопровода $r = r(z)$ при $z \sim r$. Например, если токопровод выглядит так, как это показано на рис.3а, то предельный ток (6), очевидно, не будет достигнут, поскольку уже при меньшем токе значительная доля электронов будет отражена в широкой части токопровода при малых z .

Мы покажем, что в случае адиабатически медленного ($dr/dz \ll 1$) монотонного увеличения радиуса стенок токопровода (рис.3б) к критическому току можно приблизиться сколь угодно близко. В самом деле, при $dr/dz \ll 1$ для определения связи между потенциалом и поверхностной плотностью заряда можно локально считать токопровод цилиндрическим и пользоваться соотношением (2), в котором вместо R следует писать $r(z)$ и которое дает локальную связь между $\varphi_b(z)$ и $\epsilon(z)$ (рассматривается трубчатый пучок). Соответственно, функция $\varphi_b(z)$ может быть определена из уравнения (5), в которое z входит через функцию $r(z)$ ($r(z)$ пишем вместо R). Из графического решения уравнения (5) (см.рис.2) видно, что при монотонном возрастании $r(z)$ функция $\varphi_b(z)$ будет также монотонно возрастать, что и свидетельствует об отсутствии отраженных электронов.

Приближение локальной связи между ϵ и φ , а вместе с ним и все приведенные рассуждения нарушаются, когда ток достигает критического значения. Действительно, при $I > I_{crit}$

горизонтальная прямая, определяющая графически решение уравнения (5), при некотором z касается графика функции $F(\xi)$ (рис.2). Как видно из формулы

$$\frac{d\xi}{dz} = -\frac{I^*}{I} \frac{1}{\frac{dF}{d\xi} \ln \frac{r(z)}{r_b}} \frac{d}{dz} \ln \frac{r(z)}{r_b},$$

следующей из (5), в этой точке производная $d\xi/dz$ обращается в бесконечность, что очевидным образом и означает нарушение приближения локальной связи. Однако, используя токопроводы со все более плавным профилем (со все меньшими значениями dr/dz), можно приблизиться к критическому току сколь угодно близко.

Разумеется, все сказанное в этом разделе можно без существенных изменений перенести на случай, когда от z зависит не только радиус токопровода r , но и радиус пучка (последняя возможность осуществляется при неоднородном ведущем поле).

Рассмотрим теперь цилиндрический обратный токопровод (рис.3в). В этом случае связь между φ_b и σ уже не является локальной, а выражается через функцию Грина, которую мы обозначим через $K(z, z')$:

$$\varphi_b(z) = 4\pi r_b \ln \frac{R}{r_b} \int_0^\infty K(z, z') \sigma(z') dz'. \quad (7)$$

Множитель перед знаком интеграла введен для удобства записи последующих формул. Функцию $K(z, z')$ можно выразить через функцию Грина Q для бесконечного в обоих направлениях цилиндра, которая, очевидно, зависит только от $z - z'$:

$Q = Q(z - z')$. Соответствующее выражение имеет следующий вид:

$$K(z, z') = Q(z - z') - Q(z + z') \quad (8)$$

Второй член в правой части учитывает роль зарядов изображения, связанных с наличием проводящей фольги, и обеспечивает автоматическое выполнение граничного условия $\varphi|_{z=0} = 0$.

Функция $Q(z)$ неотрицательна и экспоненциально убывает при $z \rightarrow \infty$ (характерный масштаб спада - величина порядка R). Это и оправдывает использование в интеграле (7) бесконечного верхнего предела и пренебрежение искажением потенциала за счет наличия коллектора (иными словами, можно считать, что $L \rightarrow \infty$). Не представляет труда записать явное выражение для Q , но для дальнейшего это выражение не потребуется. При $z \rightarrow \infty$ между φ_b и σ имеется соотношение (2), которое означает, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^\infty K(z, z') dz' = 1 \quad (9)$$

Ядро $K(z, z')$ обладает важным свойством, которое можно назвать свойством монотонности: если σ есть неотрицательная и неубывающая функция z , то функция $\varphi_b(z)$, определяемая формулой (7), также будет неотрицательной и неубывающей. Для доказательства достаточно воспользоваться тождеством

$$\frac{d\varphi_b(z)}{dz} = 4\pi r_b \ln \frac{R}{r_b} \left\{ \int_0^\infty [Q(z-z') + Q(z+z')] \frac{d\sigma(z')}{dz'} dz' + 2Q(z)\sigma(0) \right\},$$

следующим из формул (7), (8), и учесть неотрицательность Q .

Выражая $\sigma(z')$ через потенциал с помощью формул (1) и (4), из (7) получаем следующее нелинейное интегральное уравнение для безразмерного потенциала ξ :

$$\xi(z) = \varepsilon \int_0^\infty dz' K(z, z') \left\{ 1 - [\gamma_0 - \xi(z')]^2 \right\}^{-1/2}, \quad (10)$$

где введено обозначение $\varepsilon \equiv (I/I^*) \ln R/r_b$. Задача теперь состоит в том, чтобы установить, при каких значениях ε решение этого уравнения является неубывающей функцией z . Для этого предварительно заметим, что в разложении

функции $\beta^{-1}(\xi) \equiv [1 - (\gamma_0 - \xi)^2]^{-1/2}$ по степеням ξ ,

$$\beta^{-1}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k,$$

все коэффициенты a_k положительны (в этом легко убедиться непосредственным вычислением). Далее будем искать решение уравнения (I0) в виде формального ряда по степеням ε :

$$\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \xi_n(z) \quad (II)$$

(о сходимости этого ряда см. ниже). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях уравнения (I0), получаем:

$$\begin{aligned} \xi_1(z) &= a_0 \int_0^{\infty} dz' K(z, z'), \\ \xi_2(z) &= a_1 \int_0^{\infty} dz' K(z, z') \xi_1(z'), \\ \xi_3(z) &= \int_0^{\infty} dz' K(z, z') [a_1 \xi_2(z') + a_2 \xi_1^2(z')], \\ \xi_4(z) &= \int_0^{\infty} dz' K(z, z') [a_1 \xi_3(z') + 2a_2 \xi_1(z') \xi_2(z') + \\ &\quad + a_3 \xi_1^3(z')] \\ \dots \end{aligned} \quad (I2)$$

Очевидно, что в связи с положительностью коэффициентов a_k и с отмеченным выше свойством монотонности ядра K все функции $\xi_n(z)$ являются неубывающими, а, следовательно, и решение (II) также не убывает.

Перейдем теперь в соотношениях (I0) и (II) к пределу $z \rightarrow \infty$. При этом из (I0) получается уравнение

$$\xi(\infty) = \frac{\varepsilon}{\beta[\xi(\infty)]}, \quad (I3)$$

совпадающее с (5), а из (II) - решение этого уравнения в виде ряда по степеням ε :

$$\xi(\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \xi_n(\infty). \quad (I4)$$

Поскольку функции $\xi_n(z)$ неотрицательные и неубывающие (см. (I2)), то сходимость ряда (I4) будет автоматически означать и сходимость ряда (II). С другой стороны, из теории алгебраических функций (см., например, /5/, стр. 18) известно, что если $d[\xi \beta(\xi)]/d\xi \neq 0$, то ряд (I4) сходится и представляет решение уравнения (I3). Иными словами, сходимость ряда (I4) и, следовательно, существование монотонного решения уравнения (I0) гарантированы при $I < I_{crit}$ (см. рис. 2). Тем самым доказана достижимость критического тока (6) в случае цилиндрического обратного токопровода.

Применяя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, можно доказать достижимость критического тока для обратного токопровода, характеризуемого произвольной монотонно возрастающей функцией $\Gamma(z)$. Тем самым "перекрывается" и рассмотренный выше отдельно случай адиабатически плавного профиля стенок. Однако, специальное рассмотрение адиабатического случая оправдано тем, что именно в этом случае, по-видимому, легче всего можно будет перейти к анализу ситуации при инъекции надкритических токов.

Л и т е р а т у р а

1. L. P. Smith, P. L. Hartmann. J. Appl. Phys., 11, 220 (1940).
2. Л.С.Богданкевич, А.А.Рухадзе. УФН, 103, 609 (1971).
3. V.N. Breizman, D.D. Ryutov. Nucl. Fusion, 14, 873 (1974).
4. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков. ЖЭТФ, 70, (1976).
5. Б.А.Фукс, В.И.Левин. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. ГИИТЛ, Москва, 1951.

Работа поступила - 2 сентября 1975 г.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 30.X-1975 г. МН 03208
Усл. I, 0 печ. л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 97 .

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР, вт