И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

7

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 12

Б.Г.Конопельченко

О БЕСКОНЕЧНЫХ НАБОРАХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ - ВРЕМЕНИ I

Новосибирск
1976

С БЕСКОНЕЧНЫХ НАБОРАХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ I

Б.Г.Конопельченко

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что релятивистки-инвариантные уравнения для свободных полей с любым спином в четырехмерном пространстве-времени обладают бесконечными наборами законов сохранения. Найдены соответствующие уравнения для вакуумных средних. Обсуждается возможная интерпретация бесконечного числа сохраняющихся величин как генераторов групп преобразований.

Как известно ряд уравнений в двумерном пространстве-времени обладает бесконечными наборами законов сохранения. Наибольший интерес, естественно, представляют релятивистски инвариантные уравнения, обладающие этим свойством - например, уравнение $\Box\varphi + \sin\varphi = 0$ /I-3/. Само существование бесконечного числа сохраняющих величин является очень важным свойством конкретной модели, т.к. оно приводит к сильным ограничениям на структуру S -матрицы /4/.

Способ построения бесконечного набора сохраняющихся величин для нетривиальных моделей был намечен в работе /2/, в которой было показано, что бесконечный набор сохраняющихся величин для двумерного уравнения $\Box\varphi + \sin\varphi = 0$ может быть получен деформацией соответствущего бесконечного набора для уравнения $\Box\varphi + m^2\varphi = 0$. Таким образом, в качестве первого шага необходимо построить бесконечные наборы сохраняющихся величин для свободных полей.

В настоящей работе мы рассмотрим случай четырехмерного пространства - времени и покажем, что релятивистски-инвариантные уравнения для свободных полей с любым спином обладают бесконечными наборами законов сохранения. В квантовой теории существование бесконечных наборов сохраняющихся операторов приводит к бесконечной системе уравнений для вакуумных средних, имеющей простое решение. В результате требование отсутствия взаимодействия может быть сформулировано на групповом языке.

Во втором разделе работы выписаны бесконечные наборы сохраняющихся величин для свободных полей:

I) заряженного скалярного поля, 2) спинорного поля,
3) мультиплета полей с любой группой внутренней симметрии,
4) мультиплета скалярных и спинорных полей, имеющих одинаковую массу.

В третьем разделе получены уравнения для вакуумных средних, вытекающие из существования бесконечных наборов сохраняющихся величин. В четвертом разделе обсуждается вопрос о возможной интерпретации новых сохраняющихся величин как генераторов групп преобразований.

II.

Существование бесконечных наборов сохраняющихся величин для уравнений, описывающих свободные поля с любым спином, достаточно очевидно. Действительно, поскольку уравнение для свободного поля ψ_s со спином s линейно по полю, то этому же уравнению удовлетворяет и поле $\frac{\partial^n}{\partial x^{\mu_1}\dots\partial x^{\mu_n}}\psi_s(x)$, где x^μ – координаты пространства Минковского (μ =0,1,2,3), а n – любое целое положительное число[x)]. Далее, т.к. при построении сохраняющейся величины (например, заряда, вектора энергии-импульса) из поля ψ_s важно только то, что поле ψ_s удовлетворяет некоторому уравнению, то при построении сохраняющейся величины вместо поля ψ_s может быть использована любая компонента поля $\frac{\partial^n}{\partial x^{\mu_1}\dots\partial x^{\mu_n}}\psi_s(x)$. В результате для свободного поля с любым спином получаем бесконечный набор (мультиплет) сохраняющихся величин (n =1,2,3...), связанных с исходной сохраняющейся величиной (n =0).

В качестве примеров рассмотрим скалярное и спинорное поля.

1. Заряженное скалярное поле.

Уравнения $\Box\varphi + m^2\varphi = 0$, $\Box\varphi^* + m^2\varphi^* = 0$.
Имеется два бесконечных мультиплета независимых сохраняющихся величин. Первый мультиплет

$$Q^{(n)}_{(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \int d\sigma_\mu \, J^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)},$$

$$J^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial^n\varphi^*}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\cdot\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial x^\mu\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} - \frac{\partial^{n+1}\varphi^*}{\partial x^\mu\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\cdot\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}}\right) + э.с. \qquad (2.1)$$

n =0,1,2, ... , μ, τ, ρ =0,1,2,3.

Второй мультиплет:

$$P^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \int d\sigma_\nu \, T^{(n)}_{\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)},$$

$$T^{(n)}_{\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{n+1}\varphi^*}{\partial x^\mu\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\cdot\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial x^\nu\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} + \frac{\partial^{n+1}\varphi^*}{\partial x^\nu\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\cdot\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial x^\mu\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} - g_{\mu\nu}\frac{\partial^{n+1}\varphi^*}{\partial x^\sigma\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\cdot\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial x^\sigma\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} + m^2 g_{\mu\nu}\frac{\partial^n\varphi^*}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\cdot\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}}\right) + э.с. \qquad (2.2)$$

n =0,1,2, ... ,

Величины $Q^{(0)}$ и $P^{(0)}_\mu$ являются зарядом и 4 -вектором энергии-импульса для скалярного поля φ . Соответствующие бесконечные мультиплеты сохраняющихся величин $\{Q^{(n)}_{(\dots)}\}$ и

---

x) Отметим, что поле $\frac{\partial^n}{\partial x^{\mu_1}\dots\partial x^{\mu_n}}\psi_s(x)$ переносит тот же спин, что и поле $\psi_s(x)$.

$\{ P^{(n)}_{\mu(\dots)} \}$ могут быть названы мультиплетами заряда и 4 - импульса.

Аналогичным образом может быть построен мультиплет моментов $\mathcal{Y}^{(n)}_{\mu\nu(\dots)} = \int d\sigma_\lambda\, M^{(n)}_{\lambda,\mu\nu(\dots)}$. Однако в силу соотношения

$$M^{(n)}_{\lambda,\mu\nu(\dots)} = x_\mu T^{(n)}_{\lambda\nu(\dots)} - x_\nu T^{(n)}_{\lambda\mu(\dots)}$$

величины $\mathcal{Y}^{(n)}_{\mu\nu(\dots)}$ не являются независимыми и сохраняются в силу сохранения $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$.

Отметим, что и не все величины $Q^{(n)}_{(\dots)}$ и $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$ независимы, т.к. их свертка по любой паре индексов пропорциональна $Q^{(n-1)}_{(\dots)}$ и $P^{(n-1)}_{\mu(\dots)}$, например:

$$Q^{(n)}_{(\tau_1\dots\tau_{n-1}\tau_n)(\rho_1\dots\rho_{n-1}\tau_n)} = m^2 Q^{(n-1)}_{(\tau_1\dots\tau_{n-1})(\rho_1\dots\rho_{n-1})},$$

$$P^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_{n-1}\tau_n)(\rho_1\dots\rho_{n-1}\tau_n)} = m^2 P^{(n-1)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_{n-1})(\rho_1\dots\rho_{n-1})}.$$

Смысл величин $Q^{(n)}_{(\dots)}$ и $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$ становится прозрачным, если записать их в импульсном представлении. Вводя операторы рождения и уничтожения стандартным образом ($\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}}\left(a(k)e^{-ikx} + b^+(k)e^{ikx}\right)$), находим

$$Q^{(n)}_{(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \int d^3k \cdot k_{\tau_1}\dots k_{\tau_n} k_{\rho_1}\dots k_{\rho_n}\left(a^+(k)a(k) - b(k)b^+(k)\right), \quad (2.3)$$

$$P^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \int d^3k \cdot k_\mu k_{\tau_1}\dots k_{\tau_n} k_{\rho_1}\dots k_{\rho_n}\left(a^+(k)a(k) + b(k)b^+(k)\right). \quad (2.4)$$

Таким образом $Q^{(n)}_{(\dots)}$ и $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$ являются моментами величин $a^+(k)a(k) \mp b(k)b^+(k)$ x).

---

x) После завершения работы нам стал известен препринт /5/, в котором отмечалось, что сами величины $a^+(k)a(k)$ образуют бесконечный набор сохраняющихся величин. Автор признателен И.В.Полубаринову, обратившему внимание автора на работу /5/.

2. Спинорное поле. Уравнения

$$i\gamma_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - m\psi = 0, \quad i\frac{\partial\bar\psi}{\partial x^\mu}\gamma_\mu + m\bar\psi = 0$$

Имеется три бесконечных набора (мультиплета) независимых сохраняющихся величин. Первый мультиплет - мультиплет заряда:

$$Q^{(n)}_{(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \int d\sigma_\mu\, \mathcal{Y}^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)}, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$\mathcal{Y}^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^n\bar\psi}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\cdot\gamma_\mu\frac{\partial^n\psi}{\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} + \text{э.с.} \quad (2.5)$$

Второй мультиплет - мультиплет 4-импульса:

$$P^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \int d\sigma_\nu\, T^{(n)}_{\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)}, \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (2.6)$$

$$T^{(n)}_{\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \frac{i}{2}\frac{\partial^n\bar\psi}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\gamma_\mu\frac{\partial^{n+1}\psi}{\partial x^\nu\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} + \text{э.с.}$$

Наконец третий мультиплет - мультиплет моментов:

$$\mathcal{Y}^{(n)}_{\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \int d\sigma_\lambda\, M^{(n)}_{\lambda,\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)}, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$M^{(n)}_{\lambda,\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = x_\mu T^{(n)}_{\lambda\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} - x_\nu T^{(n)}_{\lambda\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)}$$

$$+ \frac{1}{8}\frac{\partial^n\bar\psi}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\left(\gamma_\lambda\sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}\gamma_\lambda\right)\frac{\partial^n\psi}{\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} + \quad (2.7)$$

$$+ \frac{1}{8}\frac{\partial^n\bar\psi}{\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}}\left(\gamma_\lambda\sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}\gamma_\lambda\right)\frac{\partial^n\psi}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}},$$

где $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$.

В импульсном представлении $Q^{(n)}_{(\dots)}$, $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$, $\mathcal{Y}^{(n)}_{\mu\nu(\dots)}$ имеют вид полностью аналогичный выражениям (2.3) и (2.4). В частности, $Q^{(n)}_{(\dots)}$ и $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$ прямо имеют вид (2.3),(2.4) с заменой $a^+(k)a(k) \to \sum_\sigma a^+_\sigma(k)a_\sigma(k)$, $b(k)b^+(k) \to -\sum_\sigma b_\sigma(k)b^+_\sigma(k)$ (σ - проекция спина).

Аналогичным образом могут быть построены три бесконечных мультиплета сохраняющихся величин для свободного поля с любым спином.

3. Нетрудно видеть, что, если система свободных полей обладает группой внутренней симметрии, то существует бесконечный мультиплет сохраняющих величин, связанных с инвариантностью относительно этой группы. Например, для системы N спинорных полей соответствующий бесконечный мультиплет имеет вид

$$\Gamma^{(n)}_{A(z_1\dots z_n)(\varrho_1\dots\varrho_n)} = \int d\sigma_\mu\, \mathcal{Y}^{(n)}_{A\mu(z_1\dots z_n)(\varrho_1\dots\varrho_n)}, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$\mathcal{Y}^{(n)}_{A\mu(z_1\dots z_n)(\varrho_1\dots\varrho_n)} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^n\bar{\psi}_i}{\partial x^{z_1}\dots\partial x^{z_n}}\,\gamma_\mu(\Gamma_A)_{ik}\,\frac{\partial^n\psi_k}{\partial x^{\varrho_1}\dots\partial x^{\varrho_n}} + \text{э.с.}, \tag{2.8}$$

где $i,k=1,\dots,N$; $A=1,\dots,P$ (P - число параметров группы внутренней симметрии); Γ_A - матрицы N-рядного представления группы внутренней симметрии.

4. Наконец, для системы свободных полей, состоящей из скалярного поля $A(x)$, псевдоскалярного поля $B(x)$ и спинорного (майорановского) поля $\psi(x)$, имеющих одинаковые массы m и, следовательно, инвариантной относительно суперпреобразований (см.,например, обзоры /6,7/) кроме бесконечных мультиплетов 4-импульса и моментов имеется еще один бесконечный мультиплет сохраняющихся величин:

$$Q^{(n)}_{\alpha(z_1\dots z_n)(\varrho_1\dots\varrho_n)} = \int d\sigma_\nu\, \mathcal{Y}^{(n)}_{\alpha\nu(z_1\dots z_n)(\varrho_1\dots\varrho_n)}, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$\mathcal{Y}^{(n)}_{\alpha\nu(z_1\dots z_n)(\varrho_1\dots\varrho_n)} = \frac{1}{2}\left\{\gamma_\lambda\left(\frac{\partial^{n+1}A}{\partial x^\lambda\partial x^{z_1}\dots\partial x^{z_n}} - \gamma_5\frac{\partial^{n+1}B}{\partial x^\lambda\partial x^{z_1}\dots\partial x^{z_n}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,\gamma_\mu\frac{\partial^n\psi}{\partial x^{\varrho_1}\dots\partial x^{\varrho_n}} + m\left(\frac{\partial^n A}{\partial x^{z_1}\dots\partial x^{z_n}} + \gamma_5\frac{\partial^n B}{\partial x^{z_1}\dots\partial x^{z_n}}\right)\gamma_\mu\frac{\partial^n\psi}{\partial x^{\varrho_1}\dots\partial x^{\varrho_n}}\right\}_\alpha,$$

где α - спинорный индекс (α =I,2,3,4).

Итак, мы видим, что уравнения, описывающие свободные поля с любым спином в четырехмерном пространстве-времени обладают бесконечными наборами законов сохранения. Бесконечные мультиплеты сохраняющихся величин могут быть классифицированы по группам симметрии, с которыми они связаны. Например, мультиплет $\{Q^{(n)}_{(\dots)}\}$ связан с симметрией относительно группы $U(1)$, мультиплеты $\{P^{(n)}_{\mu(\dots)}\}$ и $\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\mu\nu(\dots)}\}$ - соответственно с трансляционной и лоренц-инвариантностью. Причем первый член $(n=0)$ бесконечного мультиплета может быть получен по обычной теореме Нетер.

В заключение отметим, что все результаты этого раздела(и последующих разделов) справедливы для пространства-времени произвольной размерности m. При этом лоренцевские индексы принимают значения $0,1,\dots,m-1$.

Ш

Результаты предыдущего раздела справедливы как в классической, так и в квантовой теории (с использованием нормального произведения). В квантовой теории мы имеем бесконечные мультиплеты сохраняющихся операторов, удовлетворяющих определенным перестановочным соотношениям. Предполагая канонические перестановочные соотношения для полей, нетрудно убедиться, что все операторы $Q^{(n)}_{(\dots)}$ и $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$ коммутируют между собой, а операторы $\mathcal{Y}^{(n)}_{\mu\nu(\dots)}$ не коммутируют в общем случае ни сами с собой, ни с операторами $Q^{(n)}_{(\dots)}$ и $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$. Таким образом, в случае скалярного поля независимые сохраняющиеся операторы образуют бесконечную абелеву алгебру, в случае поля с ненулевым спином – неабелеву алгебру. Отметим, что операторы (2.8), возникающие в случае существования группы внутренней симметрии, удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\left[F^{(n)}_{A(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)},\ F^{(m)}_{B(\mu_1\dots\mu_m)(\nu_1\dots\nu_m)}\right]=$$

$$= C_{ABC}\, F^{(n+m)}_{C(\tau_1\dots\tau_n\mu_1\dots\mu_m)(\rho_1\dots\rho_n\nu_1\dots\nu_m)},$$

где C_{ABC} – структурные константы группы внутренней симметрии.

Найдем теперь ограничения на вакуумные средние, вытекающие из существования бесконечных мультиплетов сохраняющихся операторов. Для этого необходимо найти перестановочные соотношения сохраняющихся операторов с полями. Используя канонические перестановочные соотношения для полей, получаем

$$\left[Q^{(n)}_{(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)},\psi(x)\right]=(-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}}\psi(x), \qquad (3.\mathrm{I})$$

$$\left[P^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)},\psi(x)\right]=\frac{1}{i}(-1)^n\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}}\psi(x), \qquad (3.2)$$

$$\left[\mathcal{Y}^{(n)}_{\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)},\psi(x)\right]=(-1)^n i\left(x_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}-x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\Sigma_{\mu\nu}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}}\psi(x), \qquad (3.3)$$

$$\left[F^{(n)}_{A(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)},\psi_i(x)\right]=(-1)^n(\Gamma_A)_{ik}\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}}\psi_k(x), \qquad (3.4)$$

В формулах (3.I) – (3.4) $\psi(x)$ – свободное поле с произвольным спином, $\Sigma_{\mu\nu}$ – соответствующая спиновая матрица.

Рассмотрим сначала мультиплет $\{P^{(n)}_{\mu(\dots)}\}$. Предполагая, что $P^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)}|0\rangle=0$, где $|0\rangle$ – вакуум и используя соотношения (3.2), получаем бесконечную систему уравнений для вакуумных средних $\langle 0|\psi(x_1)\dots\psi(x_\ell)|0\rangle$:

$$\left(\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x_1^{\mu}\partial x_1^{\tau_1}\dots\partial x_1^{\rho_n}}+\dots+\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x_\ell^{\mu}\partial x_\ell^{\tau_1}\dots\partial x_\ell^{\rho_n}}\right)\langle 0|\psi(x_1)\dots\psi(x_\ell)|0\rangle=0 \qquad (3.5)$$

$(\ell=0,\mathrm{I},2,\dots;\quad n=0,\mathrm{I},2,\dots.)\ (\mu,\tau,\rho=0,1,2,3)$

В импульсном представлении уравнения (3.5) имеют вид

($W(k_1,\dots,k_\ell)$ – фурье-образ $\langle 0|\psi(x_1)\dots\psi(x_\ell)|0\rangle$):

$$\left(k_1^{\mu}k_1^{z_1}\dots k_1^{z_n}k_1^{\rho_1}\dots k_1^{\rho_n}+\dots+k_\ell^{\mu}k_\ell^{z_1}\dots k_\ell^{z_n}k_\ell^{\rho_1}\dots k_\ell^{\rho_n}\right)W(k_1,\dots,k_\ell)=0 \qquad (3.6)$$

Нетрудно убедиться, что бесконечная система уравнений (3.6) имеет решение

$$W(k_1)=\delta(k_1)\tilde{W}(k_1),$$
$$W(k_1,k_2)=\delta(k_1+k_2)\tilde{W}(k_1,k_2), \qquad (3.7)$$
$$W(k_1,k_2,k_3)=W(k_1,k_2)W(k_3)+W(k_1,k_3)W(k_2)+W(k_2,k_3)W(k_1),$$
$$W(k_1,k_2,k_3,k_4)=W(k_1,k_2)W(k_3,k_4)+W(k_1,k_3)W(k_2,k_4)+$$
$$+W(k_1,k_4)W(k_2,k_3),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$W(k_1,\dots,k_{2\ell+1})=\sum_1 W(k_1)\sum_2 W(k_1,k_2)\dots W(k_{2\ell},k_{2\ell+1}),$$
$$W(k_1,\dots,k_{2\ell})=\sum_2 W(k_1,k_2)\dots W(k_{2\ell-1},k_{2\ell}),$$

где $\sum_2$ обозначает суммирование по всевозможным разбиениям четного числа импульсов на независимые пары.

Аналогичным образом получаем систему уравнений, связанную с мультиплетом $\{Q^{(n)}_{(\dots)}\}$

$$\left(\frac{\partial^{2n}}{\partial x_1^{z_1}\dots\partial x_1^{\rho_n}}+\dots+\frac{\partial^{2n}}{\partial x_k^{z_1}\dots\partial x_k^{\rho_n}}-\frac{\partial^{2n}}{\partial x_{k+1}^{z_1}\dots\partial x_{k+1}^{\rho_n}}-\dots\right. \qquad (3.8)$$
$$\left.-\frac{\partial^{2n}}{\partial x_\ell^{z_1}\dots\partial x_\ell^{\rho_n}}\right)\langle 0|\psi(x_1)\dots\psi(x_k)\psi^+(x_{k+1})\dots\psi^+(x_\ell)|0\rangle=0$$
$$(\ell=1,2\dots; \quad n=0,1,2,\dots)$$

Решение этой системы уравнений с учетом (3.7) имеет вид

$$\langle 0|\psi(x_1)\dots\psi(x_k)\psi^+(x_{k+1})\dots\psi^+(x_\ell)|0\rangle=0, \text{ если } \ell\neq 2k,$$
$$\langle 0|\psi(x_1)\dots\psi(x_k)\psi^+(x_{k+1})\dots\psi^+(x_{2k})|0\rangle= \qquad (3.9)$$
$$=\sum_1\langle 0|\psi(x_1)\psi^+(x_{k+1})|0\rangle\dots\langle 0|\psi(x_k)\psi^+(x_{2k})|0\rangle.$$

Мы видим, что следствием существования бесконечных мультиплетов сохраняющихся величин является распадение многоточечных вакуумных средних в произведения двух- и одноточечных вакуумных средних. С другой стороны, распадение многоточечных функций в произведение двухточечных является следствием отсутствия взаимодействия. Таким образом, существование бесконечных мультиплетов сохраняющихся величин накладывает сильные ограничения на возможную динамику и наоборот, некоторые предположения динамического характера могут быть сформулированы с помощью бесконечных мультиплетов сохраняющихся величин. В частности, требование отсутствия взаимодействия эквивалентно существованию бесконечного мультиплета $\{P^{(n)}_{\mu(z_1\dots z_n)(\rho_1\dots\rho_n)}\}$ сохраняющихся величин, удовлетворяющих перестановочным соотношениям (3.2) x).

---

x) Нетрудно убедиться, что если операторы $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (3.2), условие $[P^{(n)}_{\mu(\dots)},\int d^4x\,\mathcal{L}(x)]=0$ ($\mathcal{L}$ -лагранжиан) выполняется только, если потенциальная энергия содержит степень поля не выше второй.

В случае же существования бесконечного мультиплета сохраняющихся величин для взаимодействующих полей, правая часть перестановочных соотношений сохраняющихся операторов с полем должна содержать нелинейные по полю члены. Выражения для самих сохраняющихся величин могут быть получены "деформацией" соответствующих выражений((2.I) - (2.8)) для свободных полей.

Если в четырехмерном пространстве-времени существуют модели, обладающие бесконечными наборами сохраняющихся величин (например, типа $\{ P^{(n)}_{\mu(\ldots)} \}$), то, в таких моделях аналогично двумерному случаю /4/, имеются сильные ограничения на структуру S -матрицы. Действительно, в силу независимости от времени

$$P^{(n)\,in}_{\mu(\ldots)} = P^{(n)}_{\mu(\ldots)} = P^{(n)\,out}_{\mu(\ldots)} \tag{3.I0}$$

Далее, т.к. $P^{(n)\,in}_{\mu(\ldots)}$ и $P^{(n)\,out}_{\mu(\ldots)}$ даются формулами (2.4),имеем

$$P^{(n)\,in}_{\mu(z_1\ldots z_n)(\rho_1\ldots\rho_n)}|k_1,\ldots,k_m\rangle_{in} = \big(k^{in}_{1\mu} k^{in}_{1z_1}\ldots k^{in}_{1z_n} k^{in}_{1\rho_1}\ldots k^{in}_{1\rho_n} + \ldots + k^{in}_{m\mu} k^{in}_{mz_1}\ldots k^{in}_{mz_n} k^{in}_{m\rho_1}\ldots k^{in}_{m\rho_n}\big)|k_1,\ldots,k_m\rangle_{in}, \tag{3.II}$$

$$P^{(n)\,out}_{\mu(z_1\ldots z_n)(\rho_1\ldots\rho_n)}|k_1,\ldots,k_m\rangle_{out} = \big(k^{out}_{1\mu} k^{out}_{1z_1}\ldots k^{out}_{1z_n} k^{out}_{1\rho_1}\ldots k^{out}_{1\rho_n} + \ldots + k^{out}_{m\mu} k^{out}_{mz_1}\ldots k^{out}_{mz_n} k^{out}_{m\rho_1}\ldots k^{out}_{m\rho_n}\big)|k_1,\ldots,k_m\rangle_{out}$$

Из формул (3.I0) и (3.II) вытекает, что импульс каждой частицы сохраняется и отсутствует множественное рождение. Следовательно, S -матрица имеет диагональный вид.

Рассмотрим теперь связь бесконечных мультиплетов сохраняющихся величин с группами преобразований. Первые члены ($n=0$) этих мультиплетов являются, естественно, генераторами соответствующих групп преобразований. Остальные же члены $(n \geq 1)$ бесконечных мультиплетов не могут рассматриваться ни как генераторы некоторых групп преобразований в пространстве Минковского, ни как генераторы групп внутренней симметрии. Действительно, перестановочные соотношения таких величин с полями содержат в своей правой части производную поля по координатам порядка не ниже второго (см.формулы (3.I) - (3.4)), в то время как для пространственно-временных групп преобразований максимальный порядок производной поля в правой части всегда равен единице, а для групп внутренней симметрии - равен нулю.

Однако возможна интерпретация всех членов бесконечных мультиплетов сохраняющихся величин как генераторов групп преобразований в импульсном пространстве. Рассмотрим, например, мультиплеты $\{ Q^{(n)}_{(\ldots)} \}$, $\{ P^{(n)}_{\mu(\ldots)} \}$. Запишем перестановочные соотношения величин $Q^{(n)}_{(\ldots)}$, $P^{(n)}_{\mu(\ldots)}$ с фурье-образами поля $\psi(x)$:

$$\big[Q^{(n)}_{(z_1\ldots z_n)(\rho_1\ldots\rho_n)}, a(k) \big] = -k_{z_1}\ldots k_{z_n} k_{\rho_1}\ldots k_{\rho_n}\, a(k), \tag{4.I}$$

$$\big[P^{(n)}_{\mu(z_1\ldots z_n)(\rho_1\ldots\rho_n)}, a(k) \big] = -k_\mu k_{z_1}\ldots k_{z_n} k_{\rho_1}\ldots k_{\rho_n}\, a(k). \tag{4.2}$$

Нетрудно убедиться, что формулы (4.I), (4.2) представляют собой инфинитезимальную запись следующих законов преобразований:

$$\mathcal{U}_n(\alpha)\, a(k)\, \mathcal{U}^{-1}_n(\alpha) = e^{-i\alpha_{z_1\ldots\rho_n} k_{z_1}\ldots k_{\rho_n}}\, a(k), \tag{4.3}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots,)$$

$$U_n(a)\,a(k)\,U_n^{-1}(a)=e^{-i a_{\mu z_1\dots \rho_n} k_\mu k_{z_1}\dots k_{\rho_n}}\,a(k) \qquad (4.4)$$

$$(n=0,1,2,\dots)$$

где

$$U_n(\alpha)=e^{i\alpha_{z_1\dots z_n \rho_1\dots \rho_n} Q^{(n)}_{(z_1\dots z_n)(\rho_1\dots \rho_n)}}$$

$$U_n(a)=e^{i a_{\mu z_1\dots z_n \rho_1\dots \rho_n} P^{(n)}_{\mu(z_1\dots z_n)(\rho_1\dots \rho_n)}},$$

а полностью симметричные тензорные величины $\alpha_{z_1\dots \rho_n}$, $a_{\mu z_1\dots \rho_n}$ – параметры преобразований.

Наконец, каждый бесконечный мультиплет сохраняющихся величин может быть интерпретирован как система генераторов некоторой локальной группы преобразований в импульсном пространстве. Действительно, бесконечный набор преобразований (4.3) (n=0, I,2,...) эквивалентен одному преобразованию с параметром, зависящим от импульса

$$a(k)\to a'(k)=e^{-if(k)}\,a(k) \qquad (4.5)$$

где $f(k)$ – произвольная четная скалярная $(f(-k)=f(k))$ функция импульса. В эквивалентности (4.5) и (4.3) можно убедиться разлагая функцию $f(k)$ в ряд по степеням импульса. При этом коэффициенты разложения будут играть роль параметров $\alpha_{z_1\dots z_n \rho_1\dots \rho_n}$ (n=0,I,2 ...). Аналогично, набор преобразований (4.4) эквивалентен одному преобразованию

$$a(k)\to a'(k)=e^{-if_\mu(k)k_\mu}\,a(k) \qquad (4.6)$$

где $f_\mu(k)$ – произвольная четная векторная функция импульса. Учитывая, что подобные же рассуждения справедливы и для операторов $b(k)$, нетрудно видеть, что гамильтониан

$$H=P_0=\int d^3k\, k_0\left(a^+(k)a(k)+b^+(k)b(k)\right)$$

инвариантен относительно преобразований (4.5) и (4.6).

Таким образом, существование бесконечных наборов сохраняющихся величин (типа $Q^{(n)}_{(\dots)}$, $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$, $y^{(n)}_{\mu\nu(\dots)}$) связано с инвариантностью гамильтониана системы относительно локальных преобразований в импульсном пространстве.

Литература

1. Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, ТМФ, 21, 160 (1974)
   Л.А.Тахтаджян, ЖЭТФ, 66, 476 (1974).
2. П.П.Кулиш, Препринт ИФВЭ СТФ 74-155 (1974)
3. L.D.Faddeev, Quantization of solitons, Princeton preprint (1975).
4. А.М.Поляков, см./3/, стр.10
5. И.В.Полубаринов, О теореме эквивалентности и наблюдаемых в теории поля, сообщение ОИЯИ, Р2-5266 (1970).
6. Б.Г.Конопельченко, Суперсимметрия. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 74-96 (1974).
7. В.И.Огиевецкий, Л.Мезинческу. УФН, 117, вып.4 (1975).

Работа поступила - 4 ноября 1975г.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 30.I-1976 г. МН 02627
Усл. 1,0 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 12.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,вт