24

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 44

Б.Н.Брейзман

УСТАНОВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ИНДУЦИРОВАННОМ РАССЕЯНИИ ВОЛН НА ЧАСТИЦАХ

Новосибирск

1976

УСТАНОВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ИНДУЦИРОВАННОМ РАССЕЯНИИ ВОЛН НА ЧАСТИЦАХ

Б.Н.Брейзман

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе рассмотрена задача об эволюции спектра турбулентности за счет процессов рождения, гибели и индуцированного рассеяния волн. Показано, что любое начальное распределение волн релаксирует к стационарному. Дана оценка времени релаксации.

При исследовании плазменной турбулентности часто приходится иметь дело со следующим кинетическим уравнением для чисел заполнения $n(\vec{k};t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} n = 2\gamma_{\vec{k}}\, n + n \int A(\vec{k};\vec{k}')\, n(\vec{k}';t)\, d^3\vec{k}' + \varepsilon_{\vec{k}} \qquad (I)$$

К решению этого уравнения сводятся, в частности, задачи о спектрах турбулентности, возбуждаемой при пучковом или параметрическом нагреве плазмы (см., например, /I-4/), а также некоторые задачи нелинейной оптики /5,6/.

Первое слагаемое в правой части уравнения (I) описывает процессы индуцированного излучения и поглощения волн (в зависимости от знака инкремента $\gamma_{\vec{k}}$), второе – процессы индуцированного рассеяния волн на частицах. Вероятность рассеяния характеризуется ядром $A(\vec{k};\vec{k}')$. Конкретный вид ядра для дальнейшего не важен. Существенно лишь то, что при рассеянии сохраняется число квантов. Формальным выражением этого является антисимметрия ядра по отношению к перестановке аргументов $\vec{k}$ и $\vec{k}'$:

$$A(\vec{k};\vec{k}') = -A(\vec{k}';\vec{k})$$

Третье слагаемое в правой части (I) представляет собой интенсивность источника тепловых шумов.

Предположим, что уравнение (I) имеет стационарное решение и рассмотрим вопрос об установлении этого стационара. Стационарное решение (мы будем обозначать его $n_\infty(\vec{k})$) в ряде случаев удается найти аналитически (см./2,4/). Из определения $n_\infty(\vec{k})$ следует, что

$$n_\infty\left[2\gamma_{\vec{k}} + \int A(\vec{k};\vec{k}')\, n_\infty(\vec{k}')\, d^3\vec{k}'\right] + \varepsilon_{\vec{k}} = 0$$

Найдем отсюда инкремент неустойчивости $\gamma_{\vec{k}}$ и подставим $\gamma_{\vec{k}}$ в уравнение (I). В результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -\varepsilon_{\vec{k}}\,\frac{n-n_\infty}{n_\infty} + n\int A(\vec{k};\vec{k}')\left[n(\vec{k}';t) - n_\infty(\vec{k}')\right] d^3\vec{k}'$$

Домножим обе части этого соотношения на величину $\frac{n-n_\infty}{n}$ и проинтегрируем по $\vec{k}$. Учитывая антисимметрию ядра $A(\vec{k};\vec{k}')$, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} I = -\int \varepsilon_{\vec{k}}\,\frac{(n-n_\infty)^2}{n n_\infty}\, d^3\vec{k} \ , \qquad (2)$$

где

$$I = \int \left(n - n_\infty - n_\infty \ln \frac{n}{n_\infty}\right) d^3\vec{k} \qquad (3)$$

Правая часть равенства (2) обращается в нуль только в том случае, когда спектр $n(\vec{k};t)$ совпадает со стационарным. Для любого другого распределения волн она меньше нуля[x)]. Поэтому в нестационарном случае интеграл I обязательно уменьшается со временем. Заметим, теперь, что этот интеграл ограничен снизу, поскольку при любых значениях $x > 0$ выполняется неравенство $x - 1 - \ln x \geq 0$. Минимум интеграла I достигается при стационарном распределении волн.

Из сказанного следует, что при любом начальном условии решение уравнения (I) стремится к стационарному (если, разумеется, стационар существует). Стремление к стационару при малых отклонениях от него было доказано ранее в работе /4/.

Условие (2) позволяет получить полезную оценку максимального числа квантов, существующих в системе в каждый момент перехода к стационару. Запишем для этого следующее соотношение

$$I \equiv N - N_\infty - \int n_\infty \ln \frac{n}{n_\infty} d^3\vec{k} \leq I_0 \qquad (4)$$

где величина I_0 соответствует начальному распределению квантов, а через N и N_∞ обозначены соответственно полные числа квантов в момент времени t и в стационарном состоянии (предполагается, что в стационарном состоянии число квантов конечно). Для интеграла, входящего в формулу (4), можно написать следующую цепочку неравенств:

$$\int n_\infty \ln \frac{n}{n_\infty} d^3\vec{k} \leq \int n\left[\max_{\vec{k}}\left(\frac{n_\infty}{n} \ln \frac{n}{n_\infty}\right)\right] d^3\vec{k} \leq \qquad (5)$$

$$\leq \frac{1}{e} \int n \, d^3\vec{k} = \frac{N}{e}$$

---

x) Во избежание недоразумений укажем, что $\varepsilon_{\vec{k}}$, $n(\vec{k};t)$ и $n_\infty(\vec{k})$ – это положительно определенные функции. Введение отрицательных чисел заполнения имеет смысл для волн, обладающих отрицательной энергией /7/. В данной работе такие волны не рассматриваются.

Комбинируя соотношения (4) и (5), находим, что

$$N \leq \frac{e}{e-1}\left(I_0 + N_\infty\right) \qquad (6)$$

Перейдем теперь к оценке характерного времени релаксации τ. Естественно ввести это время следующим образом:

$$\tau = \frac{\int \left(n - n_\infty - n_\infty \ln \frac{n}{n_\infty}\right) d^3\vec{k}}{\int \varepsilon_{\vec{k}} \frac{(n-n_\infty)^2}{n\, n_\infty} d^3\vec{k}} \qquad (7)$$

Простое исследование выражения (7) на максимум показывает, что величина τ максимальна на заключительной стадии процесса релаксации, когда n и n_∞ близки друг к другу. Поэтому

$$\tau_{max} \approx \frac{\int n_\infty \left(\frac{n}{n_\infty} - 1\right)^2 d^3\vec{k}}{2 \int \varepsilon_{\vec{k}} \left(\frac{n}{n_\infty} - 1\right)^2 d^3\vec{k}} \leq \frac{1}{2} \max_{\vec{k}} \frac{n_\infty}{\varepsilon_{\vec{k}}} \qquad (8)$$

Как видно из формулы (8), при заданной спектральной функции n_∞ время τ_{max} обратно пропорционально мощности источника тепловых шумов. Фактически τ_{max} равно тому времени, в течение которого источник шумов "накачивает" в каждой области $\vec{k}$ -пространства столько квантов, сколько их должно быть в стационарном состоянии. Из-за малой интенсивности источника шумов τ_{max} обычно существенно превышает характерное время нарастания колебаний за счет неустойчивости, равное $\gamma_{\vec{k}}^{-1}$. Поэтому в процессе релаксации можно выделить две стадии. Сначала быстро (за время порядка I0 $\gamma_{\vec{k}}^{-1}$) достигается нелинейная стабилизация неустойчивости и обеспечивается выполнение "грубого" условия баланса между накачкой и затуханием. На второй (более длительной) стадии происходит установление деталей распределения волн по спектру.

В заключение заметим, что все изложенные результаты легко распространить на тот случай, когда при рассеянии может происходить трансформация исходных волн в волны другого типа. Примером такого процесса является, скажем, рассеяние ленгмюровских волн на ионах плазмы с превращением в электромагнитные волны. Обобщение формулы (2) на случай нескольких типов волн

$n_i(\vec{k};t)$, $i = 1,2....$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_i I_i = -\sum_i \int \varepsilon_i(\vec{k})\frac{(n_i - n_{\infty i})^2}{n_i n_{\infty i}}\, d^3\vec{k}$$

где величины I_i вводятся по формуле (3), а именно,

$$I_i = \int \left(n_i - n_{\infty i} - n_{\infty i}\ln\frac{n_i}{n_{\infty i}}\right) d^3\vec{k}$$

Автор благодарен Д.Д.Рютову за внимание к работе.

Литература

1. Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, П.З.Чеботаев, ЖЭТФ, 62, 1409,1972.
2. Б.Н.Брейзман, В.Е.Захаров, С.Л.Мушер, ЖЭТФ, 64, 1297, 1973.
3. E.Valeo, C.Oberman, F.W.Perkins, Phys. Rev. Lett., 28, 340, 1972.
4. W.L.Kruer, E.J.Valeo, Phys. Fluids, 16, 675, 1973.
5. С.А.Ахманов, Ю.Е.Дьяков, Письма в ЖЭТФ, 18, 519, 1973.
6. Г.А.Пасманик, М.С.Сандлер, Известия вузов. Радиофизика, 17, 1486, 1974.
7. В.М.Дикасов, Л.И.Рудаков, Д.Д.Рютов. ЖЭТФ, 48, 913, 1965.

Работа поступила - 26 февраля 1976 г.

Ответственный за выпуск С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати I7.У-1976г. МН 02786
Усл.0,4 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 44

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР