28

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 50

Б.Г.Конопельченко

ГРУППЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ВЫСШИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Новосибирск
1976

ГРУППЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ВЫСШИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Б.Г.Конопельченко

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается связь между высшими законами сохранения и инвариантностью уравнений относительно нелинейных преобразований полевых переменных.

Institute of Nuclear Physics

THE GROUPS OF THE NONLINEAR TRANSFORMATIONS

AND HIGHER CONSERVATION LAWS

B.G.Konopel'chenko

Abstract

The relation between the higher conservation laws and the invariance of linear and nonlinear equations under the nonlinear transformations of the fields variables is considered.

I. Введение

В последнее время интенсивно исследуются нелинейные уравнения, допускающие точное решение (см.обзоры /I,2/). Характерной особенностью таких уравнений является существование бесконечных наборов законов сохранения /I-5/. Наличие дополнительных (высших) законов сохранения является важным свойством уравнений и сильно ограничивает возможную динамику.

В настоящей работе мы покажем, что существование высших законов сохранения связано с инвариантностью уравнений относительно непрерывных нелинейных преобразований полевых переменных. Мы также покажем, что любое трансляционно-инвариантное уравнение либо обладает бесконечным набором высших законов сохранения,либо совсем не обладает высшими законами сохранения. В работе приведен широкий класс нелокальных уравнений (в пространстве- времени любой размерности), обладающих высшими законами сохранения.

Краткое содержание статьи. Во втором разделе рассматриваются линейные уравнения. В третьем разделе приведен вид широкого класса нелокальных уравнений в пространстве-времени любой размерности, инвариантных относительно бесконечной группы преобразований, линейных по полю. В частности, уравнения, описывающие сверхпроводимость в приближении Бардина-Купера-Шриффера, принадлежат к этому классу. В четвертом разделе рассматриваются нелинейные локальные уравнения и соответствующие нелинейные преобразования. В этом же разделе показано, что для того, чтобы трансляционно-инвариантное уравнение обладало бесконечным набором высших законов сохранения достаточно, чтобы это уравнение имело хотя бы один высший закон сохранения.

2. Линейные уравнения

Рассмотрим локальные линейные уравнения вида

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi(x) = 0 . \qquad (2.I)$$

Здесь x_μ - координаты пространства-времени (μ =0,I,... N),

$\mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x})$ – некоторый дифференциальный оператор, $\psi(x)$ – полевые переменные. Размерность N пространства-времени и число компонент поля произвольны.

Уравнение (2.I), как нетрудно убедиться, инвариантно относительно преобразования

$$\psi(x)\to\psi'(x) = e^{if(i\frac{\partial}{\partial x})}\,\psi(x) \qquad (2.2)$$

где $f(i\frac{\partial}{\partial x})$ – произвольная функция $i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ x). Разлагая функцию f в ряд по степеням $i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ приходим к бесконечной абелевой группе преобразований

$$\psi(x)\to\psi'(x)=e^{i^{n+1}\alpha_{\mu_1\ldots\mu_n}\frac{\partial^n}{\partial x^{\mu_1}\ldots\partial x^{\mu_n}}}\,\psi(x), \qquad (2.3)$$
$$n=0,1,2,\ldots,$$

где $\alpha_{\mu_1\ldots\mu_n}$ (коэффициенты разложения функции f) – параметры преобразований. В инфинитезимальной форме (2.3) имеет вид

$$\psi(x)\to\psi'(x)=\psi(x)+i^{n+1}\alpha_{\mu_1\ldots\mu_n}\frac{\partial^n}{\partial x^{\mu_1}\ldots\partial x^{\mu_n}}\,\psi(x). \qquad (2.4)$$

Из инвариантности уравнения (2.I) относительно бесконечной группы преобразований (2.3) следует по теореме Нетер существование бесконечного набора сохраняющихся величин $C_{\mu_1\ldots\mu_n}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ /6–8/.

Мы рассматриваем как релятивистски-инвариантные, так и релятивистски-неинвариантные уравнения. В первом случае сохраняющиеся величины являются тензорами и по повторяющимся лоренцевским индексам (μ) производится обычное фейнмановское суммирование. Во втором случае суммирование (например, в формулах (2.3)-(2.4) отсутствует.

Сохраняющиеся величины $C_{\mu_1\ldots\mu_n}$ имеют размерность $[\text{масса}]^n$. Сохраняющиеся величины, имеющие размерность больше единицы, т.е. $C_{\mu_1\ldots\mu_n}$ с $n>1$, мы будем называть высшими, а соответст-

x) В импульсном представлении это преобразование является локальным преобразованием

$$\psi(p)\to\psi'(p)=e^{if(p)}\,\psi(p).$$

вующие законы сохранения – высшими законами сохранения. Заметим, что инфинитезимальные преобразования, соответствующие высшим законам сохранения, т.е. преобразования (2.4) с $n>1$ содержат степень производной поля выше первой и поэтому не могут рассматриваться как преобразования координат пространства-времени. Преобразование (2.3) с $n=1$ – это обычный сдвиг. Бесконечные группы симметрии уравнения (2.I), отличные от (2.2) и соответствующие сохраняющиеся величины рассмотрены в работе /8/.

В заключение этого раздела отметим, что хотя преобразования (2.2) по-существу являются нелокальными, они сохраняют причинные свойства полей $\psi(x)$. Действительно, нетрудно убедиться (переходя, например, в импульсное представление), что

$$[\psi'(x),\psi'^{+}(y)]=[\psi(x),\psi^{+}(y)],$$

где $[\,,]$ обозначает коммутатор или антикоммутатор.

3. Нелокальные уравнения

I. В предыдущем разделе мы убедились, что локальные трансляционно-инвариантные линейные уравнения инвариантны относительно бесконечной группы преобразований (2.2) – (2.3).

Найдем теперь общий вид уравнений, не обязательно локальных, инвариантных относительно преобразований вида (2.3). Рассмотрим для простоты случай вещественного скалярного поля $\varphi(x)=\int d^Np\,(a(p)e^{-ipx}+a^{+}(p)e^{ipx})$. Для величин $a(p)$, $a^{+}(p)$ закон преобразования (2.2) имеет вид

$$a(p)\to a'(p)=e^{if(p)}a(p),$$
$$a^{+}(p)\to a^{+\prime}(p)=e^{-if(p)}a^{+}(p), \qquad (3.I)$$

где $f(-p)=-f(p)$,

При инфинитезимальных преобразованиях (2.4) имеем:

$$\delta a(p)=i\alpha_{\mu_1\ldots\mu_n}p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_n}\,a(p), \qquad (3.2)$$

$$\delta a^{+}(p)=-i\alpha_{\mu_1\ldots\mu_n}p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_n}\,a^{+}(p),$$
$$(n=2m+1,\ m=0,1,2,\ldots)$$

Из формул (3.I) вытекает, что величина $a^+(p)a(p)$ является инвариантом бесконечной группы преобразований (3.I) (3.2). С другой стороны, можно показать, что величина $a^+(p)a(p)$ является единственным инвариантом любого преобразования вида (3.2) с $n\geqslant 3$. Таким образом, все группы преобразований (3.2) с различными $n\geqslant 3$ и бесконечная группа (3.I) имеют единственный и общий для всех их инвариант – $a^+(p)a(p)$.

Исходя из этого легко написать уравнения инвариантные относительно бесконечной группы преобразований (3.I). Запишем эти уравнения в импульсном представлении

$$\mathcal{D}(p)\,a(p) + a(p)\sum_e \beta_e \int dq_1\dots dq_e\, V(p,q_1,\dots,q_e)\times$$
$$\times F\big(\chi_1(q_1)a^+(q_1)a(q_1),\dots,\chi_e(q_e)a^+(q_e)a(q_e)\big)=0 \qquad (3.3)$$

где $\mathcal{D}(p)$ – некоторый полином от p, (например $\mathcal{D}(p)=p^2-m^2$), V, F, χ_e – произвольные функции своих аргументов, β_e – произвольные коэффициенты. В инвариантности уравнения (3.I) легко убедиться. Действительно, функция F, зависящая только от инвариантных аргументов $\chi(p)a^+(p)a(p)$, инвариантна относительно этих преобразований, и следовательно, обе части уравнения (3.3) преобразуются одинаково (как $a(p)$).

Отметим, что уравнения, инвариантные относительно хотя бы одного преобразования вида (3.2) с $n\geqslant 3$, также имеет вид (3.3). Таким образом инвариантность уравнения относительно хотя бы одного преобразования (3.2) с $n\geqslant 3$ является достаточным условием инвариантности этого уравнения относительно бесконечной группы преобразований (3.I).

Среди всех уравнений вида (3.3) только линейные уравнения, т.е. уравнения с $V=0$, являются локальными в пространственно-временных переменных. Тем самым требования инвариантности относительно преобразований (3.I) и локальности совместимы только для линейных уравнений.

В координатном представлении уравнения (3.3) имеют в общем случае весьма громоздкий вид. Приведем лишь один простейший пример:

$$(\Box_x - m^2)\varphi(x) + \int dydzdt\, V(x-y,z-t)\,\varphi(y)\varphi(z)\varphi(t)=0,$$

где $V(\xi,\eta)$ – произвольная функция.

Инвариантность уравнений (3.3) относительно бесконечной группы преобразований приводит к существованию бесконечного набора сохраняющихся величин $C_{\mu_1\dots\mu_n}$ (вообще говоря нелокальных). В квантовой теории операторы $C_{\mu_1\dots\mu_n}$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям с полями

$$[C_{\mu_1\dots\mu_n},\varphi(x)] = i^n\frac{\partial^n}{\partial x^{\mu_1}\dots\partial x^{\mu_n}}\varphi(x)$$

В импульсном представлении

$$[C_{\mu_1\dots\mu_n}, a(p)] = p_{\mu_1}\dots p_{\mu_n}\,a(p) \qquad (3.4)$$
$$(n=2m+1,\ m=0,1,2,\dots)$$

Из формул (3.4) и инвариантности вакуума $|0\rangle$ $(C_{\mu_1\dots\mu_n}|0\rangle=0)$ находим уравнения для вакуумных средних $W(p_1,\dots,p_n)=\int dx_1\dots dx_n\times e^{-ip_1x_1-\dots-ip_nx_n}\langle 0|\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)|0\rangle$:

$$(p^1_{\mu_1}\dots p^1_{\mu_n}+\dots+p^e_{\mu_1}\dots p^e_{\mu_n})\,W(p_1,\dots,p_e)=0 \qquad (3.5)$$
$$(e=1,2,\dots;\ n=2m+1,\ m=0,1,2,\dots)$$

Уравнения (3.5) имеют решения

$$W(p_1)=\delta(p_1)\tilde W(p_1),\quad W(p_1,p_2)=\delta(p_1+p_2)\tilde W(p_1,p_2),$$
$$W(p_1,p_2,p_3)=\delta(p_1+p_2)\delta(p_3)\tilde W_1(p_1,p_2,p_3)+$$
$$+\delta(p_1+p_3)\delta(p_2)\tilde W_2(p_1,p_2,p_3)+\delta(p_2+p_3)\delta(p_1)\tilde W_3(p_1,p_2,p_3), \qquad (3.6)$$
$$W(p_1,p_2,p_3,p_4)=\delta(p_1+p_2)\delta(p_3+p_4)\tilde W_1(p_1,p_2,p_3,p_4)+$$
$$+\delta(p_1+p_3)\delta(p_2+p_4)\tilde W_2(p_1,p_2,p_3,p_4)+\delta(p_1+p_4)\delta(p_2+p_3)\tilde W_3(p_1,p_2,p_3,p_4),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$W(p_1,\dots,p_{2e})=\sum_i\delta(p_1+p_2)\cdots\delta(p_{2e-1}+p_{2e})\tilde W_i(p_1,\dots,p_{2e}),$$
$$W(p_1,\dots,p_{2e+1})=\sum_i\delta(p_i)\delta(p_1+p_2)\cdots\delta(p_{2e}+p_{2e+1})\tilde W_i(p_1,\dots,p_{2e+1}),$$

где $\sum_1$ обозначает суммирование по всевозможным разбиениям четного числа импульсов на независимые пары , W_i – произвольные функции.

Уравнения аналогичные (3.3) – (3.6) могут быть написаны для поля с произвольным спином. Подчеркнем, что уравнения инвариантные относительно бесконечной группы преобразований (3.I) могут быть написаны в форме, аналогичной уравнению (3.3), как для нейтрального, так и для заряженного поля, в пространстве-времени любой размерности (в частности, в пространстве Минковского) и в случае любой заданной группы симметрии.

2. К классу уравнений, рассмотренных в этом разделе, принадлежат уравнения, описывающие сверхпроводимость в приближении Бардина–Купера–Шриффера /9,I0/. Эти уравнения имеют вид:

$$i\frac{da_s(\vec p,t)}{dt} = \left(\frac{\vec p^{\,2}}{2m}-\mu\right)a_s(\vec p,t)+\nu w(\vec p,s)a^+_{-s}(-\vec p,t) - \tag{3.7}$$

$$-\frac{1}{V}\sum_{\vec p,s} J(\vec p,\vec p',s,s')\,a^+_{-s}(-\vec p,t)\,a_{-s'}(-\vec p',t)\,a_{s'}(\vec p',t),$$

где s – проекция спина, μ – химический потенциал, J, w – некоторые функции.

Нетрудно видеть, что уравнения (3.7) и соответствующий им модельный гамильтониан H /9,I0/ инвариантны относительно бесконечной группы преобразований

$$a_s(\vec p)\to a'_s(\vec p) = e^{if(\vec p)}a_s(\vec p) \tag{3.8}$$

где $f(\vec p)$ – произвольная скалярная нечетная функция импульса $\vec p$.

Из инвариантности уравнения (3.7) относительно бесконечной группы преобразований (3.8) вытекает, что уравнение (3.7) обладает бесконечным набором коммутирующих интегралов движения, а функции Грина удовлетворяют уравнениям

$$\left(\pm p^1_{i_1}\cdots p^1_{i_n} \pm \cdots \pm p^e_{i_1}\cdots p^e_{i_n}\right) W(\vec p_1,\ldots,\vec p_e) = 0 \tag{3.9}$$

где $i_k = 1,2,3$; $e = 1,2,\ldots$; $n = 2m+1$, $m = 0,1,\ldots$. Знак + перед k-тым членом в (3.9) соответствует операторам $a_s(\vec p_k)$, $a^+_s(-\vec p_k)$ в $W(\vec p_1,\ldots,\vec p_e)$, знак минус – операторам $a^+_s(\vec p_k)$, $a_s(-\vec p_k)$. Решения уравнения (3.9) имеют вид

$$W(\vec p_1,\ldots,\vec p_e) = \langle a^+(\vec p_1)a(\vec p_1)\cdots a^+(\vec p_{k-1})a(\vec p_{k-1})a^+(\vec p_k)a^+(-\vec p_k)\cdots \tag{3.I0}$$

$$\cdots a^+(\vec p_f)a^+(\vec p_f)\cdots\ a(-\vec p_e)a(\vec p_e)\rangle,$$

где k, f – произвольные числа, ограниченные условием $1<k,f<e$.

Интересно, что функции Грина вида (3.I0) – это как раз те функции Грина, которые удовлетворяют бесконечной цепочке зацепляющихся уравнений, рассмотренной в работах /I0/. Тем самым, эта цепочка уравнений инвариантна относительно бесконечной группы преобразований (3.8).

Отметим, что оператор рождения пары $a^+_s(\vec p)a^+_{-s}(-\vec p)$ инвариантен относительно преобразований (3.8) и поэтому во всех инвариантных выражениях будет встречаться именно этот оператор, а не каждый из операторов $a_s(\vec p)$, $a^+_{s'}(\vec p')$ по отдельности. Тем самым, предположение о существовании куперовских пар эквивалентно предположению об инвариантности теории относительно преобразований (3.8).

Итак, мы видим, что инвариантность относительно бесконечной группы преобразований (3.8) является адекватной математической формулировкой основных предположений теории сверхпроводимости.

4. Нелинейные локальные уравнения

I. Перейдем к локальным нелинейным уравнениям. Существование бесконечных наборов сохраняющихся величин и в этом случае связано с инвариантностью уравнений относительно бесконечной группы преобразований полевых переменных (рассмотрим для простоты инфинитезимальные преобразования)[x].

x) После завершения работы автору стала известна работа /II/, в которой рассматриваются преобразования подобного типа.

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) + i\alpha_{\mu_1 \dots \mu_n} K_{\mu_1 \dots \mu_n}\left(\psi, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \qquad (4.1)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

Однако в случае нелинейных уравнений оператор $K_{\mu_1 \dots \mu_n}(\psi, \frac{\partial}{\partial x})$ не только нелинейным образом зависит от $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, но и является некоторой (нелинейной) функцией $\psi(x)$. Условие инвариантности уравнения, например $\mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x})\psi(x) + V(\psi(x)) = 0$, относительно преобразований (4.1) имеет вид

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) K_{\mu_1 \dots \mu_n}\psi(x) + \frac{\partial V(\psi)}{\partial \psi} K_{\mu_1 \dots \mu_n}\psi(x) = 0 \qquad (4.2)$$

Величины $K_{\mu_1 \dots \mu_n}(\psi, \frac{\partial}{\partial x})\psi(x)$ могут быть найдены из уравнения (4.2). Если же известны сохраняющиеся величины $C_{\mu_1 \dots \mu_n}$ (как, например, в двумерных точно решаемых моделях /1-5/), то $K_{\mu_1 \dots \mu_n}(\psi, \frac{\partial}{\partial x})\psi(x)$ находятся из соотношения

$$K_{\mu_1 \dots \mu_n}\left(\psi, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = i\{C_{\mu_1 \dots \mu_n}, \psi(x)\},$$

где $\{C, \psi\}$ – скобка Пуассона. Например, для нелинейного уравнения Шредингера /4/:

$$K_n\left(\psi, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = \frac{\delta C_n}{\delta \psi^*(x)}$$

где $\frac{\delta}{\delta \psi^*(x)}$ – функциональная производная.

Обратим внимание на то, что преобразования типа (4.1) с $n \geq 2$ нелинейны по полю. В результате, такие преобразования не оставляют N – частичные подпространства Фока инвариантными и "перемешивают" состояния с различным числом частиц. Состояния, преобразующиеся сами через себя при преобразованиях, генерируемых высшими сохраняющимися величинами ($n \geq 2$), являются суперпозициями бесконечного числа состояний с различным числом частиц. Для уравнений, решаемых методом обратной задачи рассеяния, переменные, соответствующие таким состояниям совпадают с данными рассеяния. Они удовлетворяют линейным уравнениям и описывают независимые друг от друга "нормальные моды" /1,2/.

2. Как мы видели, любое трансляционно-инвариантное локальное линейное уравнение обладает бесконечным набором законов

сохранения. Для локальных <u>нелинейных</u> уравнений справедливо следующее <u>утверждение</u>: локальное трансляционно-инвариантное нелинейное уравнение либо обладает бесконечным набором высших законов сохранения, либо совсем не обладает высшими законами сохранения.

Действительно, пусть нелинейное уравнение имеет хотя бы один высший закон сохранения. Этот закон сохранения связан с инвариантностью уравнения относительно нелинейного по $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ и полю ψ преобразования вида (4.1). Совершим такую замену переменных, чтобы это преобразование стало линейным в новых переменных (однако нелинейным по $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$), т.е. чтобы в импульсном представлении оно имело вид:

$$\delta \xi(p) = i\alpha_{\mu_1 \dots \mu_n} p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} \rho(p)\, \xi(p), \qquad (4.3)$$

где $\rho(p)$ – некоторая скалярная функция p, n – фиксированное число. Уравнение для новых переменных ξ инвариантно относительно преобразования (4.3). Нетрудно показать, что единственным инвариантом преобразования (4.3) является величина $\xi^+(p)\,\xi(p)$. Аналогично разделу 3, отсюда следует, что уравнение для величины $\xi(p)$, инвариантное относительно одного преобразования с $n \geq 2$ инвариантно относительно всех преобразований с $n \geq 2$, т.е. инвариантно относительно бесконечной группы преобразований $\xi(p) \to \xi'(p) = \exp if(p) \cdot \xi(p)$. В результате и исходное уравнение инвариантно относительно бесконечной группы преобразований и, следовательно, обладает бесконечным набором высших законов сохранения.

Мы рассмотрели уравнения для классических полей. Для квантовых полей справедливы аналогичные результаты. Существование высших законов сохранения приводит также к тождествам Уорда и к бесконечной системе уравнений, связывающих между собой функции Грина различного порядка. Эти и близкие к ним вопросы будут рассмотрены в другом месте.

Литература

I. В.Е.Захаров. Метод обратной задачи рассеяния. гл.в книге И.А.Кунина "Теория упругих сред с микроструктурой", "Наука" 1975.

2. H.Flaschka, A.Newell, Lecture Notes in Physics, 38, 355 (1975).

3. R.M.Miura, C.S.Gardner, M.D.Kruskal, J. Math. Phys., 9, 1204 (1968).

4. В.Е.Захаров, А.Б.Шабад. ЖЭТФ, 6I, II8 (I97I).

5. Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, ТМФ, 2I, I60 (I974).

6. T.W.B.Kibble, J. Math. Phys., 6, 1022 (1965).

7. D.B.Fairlie, Nuovo Cim., 37, 897 (1965).

8. Б.Г.Конопельченко, Препринт ИЯФ СО АН СССР 76-I2. Новосибирск (I976).

9. Дж. Шриффер, Теория сверхпроводимости, Наука, I970.

I0. Н.Н.Боголюбов. Избранные труды. "Наукова думка", т.3,стр.98, II0.(1971).

II. S.Kumei, J.Math. Phys., 16, 2461 (1975).

Работа поступила - I2 марта I976 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 2.УI-I976г. МН 02808
Усл. 0,7 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 50.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР